РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1995

УДК 621.391 : 53.08

Ю. Е. Воскобойников

(Новосибирск)

ОЦЕНИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Предлагается статистический подход к оцениванию оптимального параметра регуляризации, при котором не требуется знания априорной информации о значениях восстанавливаемого изображения. Приведенные результаты вычислительного эксперимента иллюстрируют эффективность разработанного алгоритма оценивания оптимального параметра.

Введение. Часто в качестве математической модели системы формирования оптического изображения выступает интегральное соотношение [1, 2]

$$\iint_{\Omega} K(x, y, x', y')\varphi(x', y')dx'dy' = f(x, y), \qquad (1)$$

где $\varphi(x, y)$ — исходное изображение; $K(x, y, x', y')$ — аппаратная функция (или функция рассеяния точки); $f(x, y)$ — выходное изображение; Ω — область определения $\varphi(x, y)$. Если оптическая система инвариантна к сдвигу, то имеет место следующая модель:

$$\iint_{\Omega} K(x - x', y - y')\varphi(x', y')dx'dy' = f(x, y). \qquad (2)$$

Под задачей восстановления понимается следующая обратная задача [2]: по выходному изображению $f(x, y)$ необходимо оценить исходное изображение $\varphi(x, y)$, другими словами, решить уравнения (1), (2) относительно $\varphi(x, y)$.

Как известно, решение интегральных уравнений I рода (к которым относятся (1), (2)) является некорректно поставленной задачей [3]. Основная трудность, возникающая при решении таких задач, связана с неустойчивостью «обычных» решений к погрешности восприятия $f(x, y)$. Для преодоления этой трудности (а также проблем неединственности и отсутствия решения) используют различные методы регуляризации [4], в том числе и метод регуляризации А. Н. Тихонова [3]. Любой из этих методов включает в себя параметр, варьируя которым можно управлять точностью восстановления изображения. На практике объективный выбор приемлемого значения этого параметра до сих пор является сложной проблемой. Остановимся на этой проблеме.

Схема регистрации $f(x, y)$ и цифровая форма методов обработки изображений обусловливают следующую дискретную модель формирования изображения (конечномерную аппроксимацию интегралов (1), (2)) [5]: из значений изображений $\varphi(x', y')$, $f(x, y)$ на сетках размером $M_x \times M_y$, $N_x \times N_y$ формируются векторы φ, f размерностью $M = M_x \times M_y$, $N = N_x \times N_y$ соответственно. Тогда, введя матрицу K размером $N \times M$, аппроксимирующую (1), (2), приходим к системе

$$K\varphi = f, \qquad (3)$$

составленной из N уравнений относительно M неизвестных проекций вектора φ. Вместо точной правой части f доступен вектор

$$\tilde{f} = f + \eta,$$

где η — вектор «шума измерений», определяемый ошибками дискретизации изображения $f(x, y)$, шумами измерительной аппаратуры и т. д.

В общем виде регуляризованное решение φ_α плохо обусловленной (а возможно, и вырожденной) системы (3) определяется как решение системы

$$(K^T W_f K + \alpha W_\varphi)\varphi_\alpha = K^T W_f \tilde{f}, \qquad (4)$$

где α — параметр регуляризации, индекс T означает транспонирование соответствующей матрицы. Матрица W_f определяется на основе априорной информации о числовых характеристиках вектора шума η и, как правило, с точностью до константы равняется V_η^{-1}, где V_η — корреляционная матрица вектора шума. Матрица W_φ размером $M \times M$ характеризует априорную гладкость изображения $\varphi(x, y)$, в частности порядок регуляризации (подробнее см. [6]).

Определенное таким образом регуляризованное решение φ_α и точность восстановления существенно зависят от параметра α, который априори неизвестен. Выбор этого параметра зависит от принятого критерия точности восстановления изображения. Учитывая случайный характер вектора шума η, а следовательно, и стохастичность решения φ_α, в качестве критерия примем среднеквадратическую ошибку (СКО):

$$\Delta^2(\alpha) = M[\|\varphi - \varphi_\alpha\|^2],$$

где $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания (по ансамблю векторов φ_α); φ — точное решение. Значение $\alpha_{\text{опт}}$ параметра α, минимизирующее $\Delta^2(\alpha)$, назовем оптимальным.

Нахождение точного значения $\alpha_{\text{опт}}$ требует априорного знания проекций искомого решения φ [4, с. 161]. Широко используемый на практике принцип невязки (как детерминированный [3, 7], так и статистический вариант [4]) дает значение α, только оптимальное по порядку, т. е. отношение нормы ошибки решения, построенного при этом α, к норме ошибки оптимального решения больше 1 (в зависимости от принятой нормировки это отношение может принимать значения от 1,2 до 1,4).

В данной работе на основе критерия оптимальности регуляризирующего алгоритма [4, с. 161] строится процедура, позволяющая более точно оценивать оптимальное значение параметра регуляризации в достаточно общих ситуациях, включая случай вырожденной корреляционной матрицы вектора шума (ранее не рассматривавшийся).

Алгоритм оценивания оптимального параметра. Введем случайный вектор невязки $e(\alpha) = \tilde{f} - K\varphi_\alpha$ и в качестве его числовой характеристики примем матрицу вторых моментов $V_e(\alpha) = M[e(\alpha)e^T(\alpha)]$. Относительно вектора шума измерения η сделаем следующие предположения: а) шум имеет нулевое среднее; т. е. $M[\eta] = \bar{0}$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор; б) известна корреляционная матрица $V_\eta = M[\eta\eta^T]$. При этих предположениях в [4, с. 161] доказано, что для оптимальности параметра α достаточно выполнения матричного тождества

$$V_e(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha), \qquad (5)$$

где $E(\alpha) = I - K(K^T W_f K + \alpha W_\varphi)^{-1} K^T W_f$ — оператор невязки, используя который вектор невязки можно представить в виде $e(\alpha) = E(\alpha)\tilde{f}$.

Заметим, что в это тождество не входит априорная информация о значениях вектора φ, что выгодно отличает условие (5) от других известных условий, используемых при построении оптимальных алгоритмов. Так как в (5) входит характеристика $V_e(\alpha)$ вектора невязки, получаемая в процессе построения регуляризирующего алгоритма (РА), то (5) можно рассматривать как статистический критерий оптимальности РА.

Как правило, в наличии имеется одна реализация правой части, а следовательно, для каждого значения α можно вычислить только одну реализацию вектора $e(\alpha)$, по которой невозможно получить достоверную оценку матрицы $V_e(\alpha)$. Поэтому в качестве оценки для $\alpha_{\text{опт}}$ будем принимать значение α_w, статистически не противоречащее тождеству (5). Это можно осуществить, привлекая методы проверки статистических гипотез [8], позволяющие дать ответ о выполнении или невыполнении проверяемого свойства по ограниченной выборке.

Введем статистику

$$\rho_w(\alpha) = e^T(\alpha) W^+(\alpha) e(\alpha), \tag{6}$$

где $W^+(\alpha)$ — псевдообратная матрица Мура — Пенроуза [9] для $W(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha)$.

Утверждение 1. Пусть вектор η подчиняется нормальному распределению и $W(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha)$ есть матрица ранга m. Тогда если α не противоречит гипотезе (5), то:

а) $M[\rho_w(\alpha)] = m$;

б) квадратичная форма $\rho_w(\alpha)$ есть сумма квадратов m независимых нормально распределенных случайных величин с единичными вторыми моментами.

Доказательство этого утверждения приведено в приложении.

Свойства «а», «б» позволяют при принятии гипотезы (5) аппроксимировать распределение статистики $\rho_w(\alpha)$ χ^2-распределением с m степенями свободы. Поэтому проверку гипотезы (5) можно заменить проверкой следующей гипотезы о распределении статистики $\rho_w(\alpha)$:

$$\rho_w(\alpha) \sim \chi^2_m. \tag{7}$$

Для проверки этой гипотезы обратимся к стандартному приему математической статистики [8]. Определим интервал

$$\Theta_m(q) = [\theta_m(q/2),\ \theta_m(1-q/2)],$$

где $\theta_m(q/2)$, $\theta_m(1-q/2)$ — квантили χ^2_m-распределения уровней $q/2$, $1-q/2$ соответственно. Если значение $\rho_w(\alpha)$ попадает в этот интервал, т. е.

$$\theta_m(q/2) \le \rho_w(\alpha) \le \theta_m(1-q/2), \tag{8}$$

то гипотеза (5) принимается с вероятностью ошибки первого рода, равной q ($q = 0{,}05 \div 0{,}10$), а значение α_w, которое удовлетворяет (8), — в качестве оценки для $\alpha_{\text{опт}}$.

Перейдем к вычислению α_w для регуляризующего алгоритма (4). Первоначально остановимся на ранге матрицы $W(\alpha)$. Для любого $\alpha > 0$ матрица $E(\alpha)$ имеет ранг, равный N (это следует из (П5), (П6) приложения), и тогда ранг $W(\alpha)$ зависит от ранга матрицы V_η. Если матрица V_η не вырождена, то $\operatorname{rank}(W(\alpha)) = N$; если $\operatorname{rank}(V_\eta) = m < N$, то $\operatorname{rank}(W(\alpha)) = m$. В качестве простого примера появления вырожденной матрицы V_η можно привести модель некоррелированного (в соседних узлах) шума измерения и точной регистрации некоторых проекций вектора f. Для общности дальнейших построений будем предполагать, что $\operatorname{rank}(W(\alpha)) = m \le N$.

Свойство «а» статистики $\rho_w(\alpha)$ свидетельствует о том, что α_w принадлежит некоторой окрестности решений (определяемой (8)) нелинейного уравнения

$$\rho_w(\alpha) = m. \tag{9}$$

Поэтому процедуру вычисления α_w можно реализовать в виде итерационного алгоритма решения нелинейного уравнения (9), который завершается, как только найдется значение α_w, удовлетворяющее (8).

Утверждение 2. Статистика $\rho_w(\alpha)$ является монотонно возрастающей функцией от α, и если выполняется условие

$$\tilde{f}^T V_\eta^+ \tilde{f} > \theta_m(1 - q/2), \tag{10}$$

то при любом начальном значении α_0 итерационного алгоритма решения уравнения (9) существует конечное значение α_w. Если условие (10) не выполняется, то $\alpha_w = \infty$ и $\varphi_{\alpha_w} = \bar{0}$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор размерностью M; V_η^+ — псевдообратная матрица для V_η.

Доказательство утверждения приведено в приложении. Заметим, что: а) если матрица V_η не вырождена, то $\tilde{f}^T V_\eta^+ \tilde{f} = \tilde{f}^T V_\eta^{-1} \tilde{f}$; б) частным случаем α_w является корень α^* уравнения (9).

При выполнении условия $m > 30$ (что практически всегда имеет место) квантили $\theta_m(q/2)$, $\theta_m(1 - q/2)$ χ^2_m-распределения аппроксимируются с большой точностью квантилями нормального распределения с математическим ожиданием m и дисперсией $2m$. Это существенно упрощает проверку условия (1). Например, приняв $q = 0{,}1$, получаем следующие соотношения для квантилей:

$$\theta_m(0{,}05) = m - 1{,}64\sqrt{2m}; \qquad \theta_m(0{,}95) = m + 1{,}64\sqrt{2m}.$$

В качестве графической интерпретации утверждения 2 на рис. 1 показан график $\rho_w(\alpha)$ и нанесен интервал $\theta_m(q)$, определяющий интервал значений α_w.

Для решения нелинейного уравнения (9) можно использовать любые известные методы (метод хорд, метод Ньютона и т. д.), в частности быстросходящийся алгоритм ньютоновского типа работы [10]. Так как ищется не точное решение уравнения (9), а значение α_w, удовлетворяющее (8), то даже при использовании «медленных» алгоритмов (метод хорд или метод золотого сечения, не требующие вычисления производных) значения α_w находятся за 3—5 итераций (практически независимо от начального α_0).

Для любого метода решения уравнения (9) необходимо для каждого значения α вычислять $\rho_w(\alpha)$. Для эффективного вычисления $\rho_w(\alpha)$ предлагается следующий подход. Специфическая структура матрицы $E(\alpha)$ (присутствие в ней слагаемых единичной матрицы) обеспечивает выполнение условия теоре-

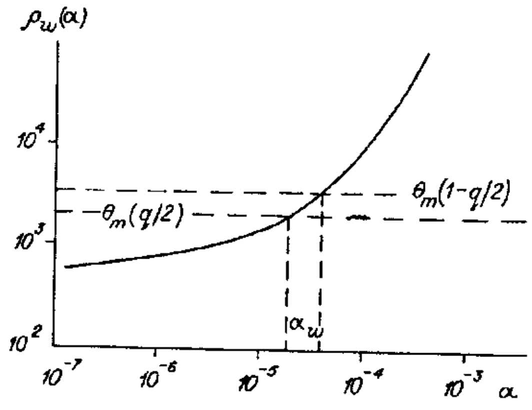

Рис. 1. Зависимость статистики $\rho_w(\alpha)$ от параметра регуляризации α и интервал $[\theta_m(q/2),\ \theta_m(1 - q/2)]$ принятия гипотезы об оптимальности параметра

мы Гревиля [9, с. 69] о псевдообращении произведения матрицы, и имеет место следующее равенство:

$$(V_\eta E^T(\alpha))^+ = (E^T(\alpha))^+ V_\eta^+.$$

Так как при любом $\alpha > 0$ матрица $E(\alpha)$ имеет ранг N, а следовательно, $(E^T(\alpha))^+ = (E^T(\alpha))^{-1}$, то $\rho_w(\alpha)$ можно представить в виде

$$\rho_w(\alpha) = \tilde{f}^T V_\eta^+ e(\alpha).$$

Частные случаи:

а) если матрица V_η не вырождена, то

$$\rho_w(\alpha) = \tilde{f}^T V_\eta^{-1} e(\alpha);$$

б) для некоррелированного шума, т. е. $V_\eta = \mathrm{diag}\{\sigma_1^2, ..., \sigma_N^2\}$, имеет место выражение

$$\rho_w(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} e_i(\alpha)\tilde{f}_i / \sigma_i^2.$$

Если алгоритм решения уравнения (9) использует производную $\rho_w'(\alpha) = \partial\rho_w(\alpha)/\partial\alpha$, то для ее вычисления предлагается соотношение

$$\rho_w'(\alpha) = \tilde{f}^T V_\eta^+ e'(\alpha),$$

где $e'(\alpha) = -K\varphi_\alpha'$, а вектор φ_α' является решением системы уравнений $(K^T W_f K + \alpha W_\varphi)\varphi_\alpha' = -W_\varphi \varphi_\alpha$.

Таким образом, для вычисления $\rho_w(\alpha)$ (и $\rho_w'(\alpha)$) при заданном значении параметра α необходимо построить регуляризованное решение φ_α и вычислить вектор невязки $e(\alpha)$ (или $e'(\alpha)$). Если ядро интегрального уравнения (1) разностное (случай инвариантной системы), то удается построить очень эффективный алгоритм нахождения α_w, вычисляющий $\rho_w(\alpha)$, $\rho_w'(\alpha)$ через коэффициенты дискретного преобразования Фурье правой части и ядра уравнения без нахождения регуляризованного решения φ_α. Для одномерного интегрального уравнения подобный алгоритм вычисления параметра регуляризации приведен в [4, с. 176, 177].

Очевидно, что алгоритм выбора α должен гарантировать сходимость регуляризованного решения φ_α к точному при стремлении уровня шума правой части к нулю. Удовлетворяет ли этому требованию предлагаемый алгоритм выбора α? Для ответа на этот вопрос первоначально необходимо определить понятие точного решения для некорректно поставленных задач.

В случае переопределенной или недоопределенной, а также вырожденной системы (3) в качестве такого решения принимается псевдорешение $\bar{\varphi}^+$ [4, 7] — вектор, доставляющий минимум нормы $\|\varphi\|_{W_\varphi} = (\varphi, W_\varphi \varphi)^{1/2}$ среди всех векторов, минимизирующих функционал невязки

$$F[\varphi, f] = \|f - K\varphi\|^2_{W_f}$$

при точной правой части. Другими словами, это означает, что из всех решений метода наименьших квадратов берется вектор с наименьшим значением $\|\varphi\|_{W_\varphi}$. Заметим, что для любого f вектор $\bar{\varphi}^+$ существует, и если нуль-пространства матриц W_φ, W_f имеют пустое пересечение, то элемент $\bar{\varphi}^+$ единствен. Вектор $\bar{\varphi}^+$ совпадает с вектором точного решения системы $\bar{\varphi}$ (обращающим (3) в тождество), если ранг матрицы K равен M или оператор K обратим, т. е. $\bar{\varphi} = K^{-1}\bar{f}$.

Утверждение 3. При стремлении дисперсий шума правой части к нулю регуляризованное решение φ_α, построенное при $\alpha = \alpha_w$, сходится к псевдорешению $\overline{\varphi}^+$, при этом для достаточно малых дисперсий среднеквадратическая ошибка $\Delta^2(\alpha_w) = M[\|\overline{\varphi}^+ - \varphi_\alpha\|^2]$ имеет порядок σ^2.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Результаты вычислительного эксперимента. Величина α_w, определяемая на основе проверки статистической гипотезы (7), является случайной (как и любая другая оценка, полученная методами статистического оценивания). Поэтому представляет интерес определить степень отклонения значений α_w от $\alpha_{\text{опт}}$. Достаточно полную информацию об этом дает плотность распределения случайной величины α_w и ее числовые характеристики. Для их нахождения был проведен следующий вычислительный эксперимент.

В качестве точного решения было принято гладкое изображение, моделирующее распределение температуры физического объекта (на сетке 45×45). Это изображение «измерялось» стационарной оптической системой, функция рассеяния точки которой соизмерима с «тонкими деталями» изображения. Практический ранг сформированной системы (3) (количество сингулярных чисел $\lambda_j \geq 10^{-5}$) был равен 553. Значения элементов точной правой части f искажались добавлением i-й реализации $\eta^{(i)}$ случайного вектора шума с относительным уровнем $\approx 5\ \%$. По полученной таким образом i-й реализации $\tilde{f}^{(i)}$ правой части вычислялись параметр регуляризации $\alpha_w^{(i)}$, регуляризованное решение $\varphi_\alpha^{(i)}$ и выборочное значение среднеквадратической ошибки

$$\Delta^2(\alpha_w^{(i)}) = \sum_{j=1}^{M} (\varphi(j) - \varphi_{\alpha_w}^{(i)}(j))^2. \tag{11}$$

Затем по выборке объемом $N_{\text{выб}} = 30$ реализаций были найдены:

$$\overline{\Delta}^2(\alpha_w) = \frac{1}{N_{\text{выб}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{выб}}} \Delta^2(\alpha_w^{(i)}); \qquad \overline{\alpha}_w = \frac{1}{N_{\text{выб}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{выб}}} \alpha_w^{(i)}. \tag{12}$$

Кроме того, были вычислены частоты

$$p_j = n_j / N_{\text{выб}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 10,$$

где n_j — количество значений $\alpha_w^{(i)}$, попавших в интервал $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, где $\alpha_j = \min\alpha_w^{(i)} + (\max\alpha_w^{(i)} - \min\alpha_w^{(i)})(j-1)/10$.

На рис. 2, *а* приведена зависимость $\Delta^2(\alpha)$ (построенная по формулам (11), (12) для значений α, меняющихся по геометрической прогрессии), а на рис. 2, *b* нанесены частоты p_j. Видно, что все значения $\alpha_w^{(i)}$ находятся в области минимума функционала. Это подтверждают и числовые характеристики:

$$\alpha_{\text{опт}} = 3 \cdot 10^{-5};$$

$$\overline{\alpha}_w = 4{,}2 \cdot 10^{-5};$$

$$\overline{\Delta}^2(\alpha_w)/\Delta(\alpha_{\text{опт}}) = 1{,}052.$$

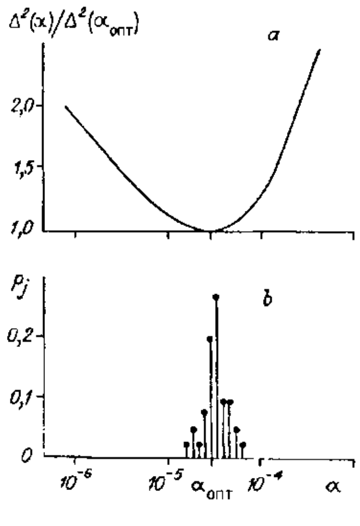

Рис. 2. Результаты вычислительного эксперимента:
а — зависимость отношения $\Delta^2(\alpha)/\Delta^2(\alpha_{\text{опт}})$ от параметра регуляризации α; *b* — относительные частоты p_j случайной величины α_w

Анализ результатов этого и других экспериментов, проведенных с изображениями различной гладкости, показал, что предложенный метод выбора параметра регуляризации позволяет достаточно точно оценить оптимальное значение параметра. Метод легко реализуется программно и требует тот же объем априорной информации о шуме правой части, что и принцип невязки.

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, предложенный метод оценивания оптимального параметра применим для регуляризующих алгоритмов, в которых параметрами являются другие величины, например, размерность подпространства, в базисе которого строится регуляризованное решение; число итераций в итерационных регуляризующих алгоритмах и т. д. Во-вторых, построенный алгоритм можно использовать для оценивания оптимального значения параметра сглаживания в линейных алгоритмах фильтрации шумов, получаемых при $K = I$ (единичный оператор).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Для любого α $M[\rho_w(\alpha)] = \mathrm{Sp}[W^+(\alpha)V_\varepsilon(\alpha)]$. Однако если α удовлетворяет (6), то $M[\rho_w(\alpha)] = \mathrm{Sp}[W^+(\alpha)W(\alpha)] = m$. Для доказательства свойства «б» рассмотрим случайный вектор z размерностью N_z, который имеет нормальное распределение и матрицу вторых моментов $V_z = M[zz^T]$ ранга m. Покажем, что форма $z^TV_z^+z$ есть сумма квадратов m независимых нормально распределенных величин с единичными вторыми моментами.

Введем представление $z = V_z^{1/2}y$, где y — нормально распределенный вектор размерностью N_z с единичной матрицей вторых моментов, т. е. $M[yy^T] = \dot{I}$. Тогда

$$z^TV_z^+ z = y^TV_z^{1/2}V_z^+ V_z^{1/2} y. \qquad (\Pi 1)$$

Если v_i, $i = 1, ..., m$, — ортонормированный собственный вектор, соответствующий ненулевому собственному числу матрицы V_z, то

$$V_zV_z^+ = \sum_{i=1}^{m} v_iv_i^T.$$

Учитывая (П1), имеем

$$z^TV_z^+ z = \sum_{i=1}^{m} (v_iy)^2. \qquad (\Pi 2)$$

Определим матрицу Q размером $m \times N$, i-й строкой которой является вектор v_i. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} (v_iy)^2 = \|Qy\|^2 .$$

Однако вектор Qy имеет m-мерное нормальное распределение с единичной матрицей вторых моментов ($M[Qyy^TQ^T] = QQ^T= \dot{I}$). Учитывая (П2) и изменяя обозначения, получаем свойство «б» утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. Проведем его при следующем предположении, выполняемом на практике: W_f, W_φ — симметричные матрицы, допускающие представление:

$$W_f = W_f^{1/2}W_f^{1/2}; \quad W_f^{-1}= W_f^{-1/2}W_f^{-1/2}; \quad W_\varphi = W_\varphi^{1/2}W_\varphi^{1/2}; \quad W_\varphi^{-1}= W_\varphi^{-1/2}W_\varphi^{-1/2}.$$

Введем матрицу $W_f^{1/2}KW_\varphi^{-1/2}$ размером $N \times M$, для которой имеет место следующее сингулярное разложение [11]:

$$W_f^{1/2}KW_\varphi^{-1/2} = U\Lambda V^T, \tag{П3}$$

где U, V — ортогональные матрицы размером $N \times N$, $M \times M$ соответственно, а матрица Λ размером $N \times M$ имеет вид

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \cdot & 0 \\ 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_M \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где λ_j — сингулярные числа: $\lambda_j > 0, j = 1, ..., p; \lambda_j = 0, j = p + 1, ..., M; p$ — ранг матрицы K. Определим N-мерный вектор

$$\tilde{y} = U^T W_f^{1/2} \tilde{f}, \tag{П4}$$

используя который вектор невязки $e(\alpha)$ можно представить в виде

$$e(\alpha) = W_f^{-1/2} U D(\alpha) \tilde{y}, \tag{П5}$$

где

$$D(\alpha) = \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha}{\lambda_1^2 + \alpha}, \ldots, \frac{\alpha}{\lambda_p^2 + \alpha}; 1, 1, ..., 1\right\} \tag{П6}$$

— диагональная матрица размером $N \times N$. Тогда статистику $\rho_w(\alpha)$ можно записать как

$$\rho_w(\alpha) = y^T U^T W_f^{-1/2} V_\eta^+ W_f^{-1/2} U D(\alpha) y \tag{П7}$$

или

$$\rho_w(\alpha) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha}{\lambda_j^2 + \alpha} \tilde{z}_j^2 + \sum_{j=p+1}^{N} \tilde{z}_j^2, \tag{П8}$$

где z_j — проекции N-мерного вектора $\tilde{z} = V_\eta^{-1/2} W_f^{-1/2} U\tilde{y}$.

Если матрица V_η не вырождена и $W_f = V_\eta^{-1}$ (это и бывает на практике), то из (П7) следует соотношение

$$\rho_w(\alpha) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha}{\lambda_j^2 + \alpha} \tilde{y}_j^2 + \sum_{j=p+1}^{N} \tilde{y}_j^2. \tag{П9}$$

Из выражений (П8), (П9) видно, что $\rho_w(\alpha) > 0$ при любом $\alpha \geq 0$ и

$$\frac{\partial \rho_w(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j + \alpha)^2} \tilde{z}_j^2 > 0.$$

Кроме того, справедливы предельные соотношения

$$\rho_w(0) = \sum_{j=p+1}^{N} \tilde{z}_j^2 \quad \text{и} \quad \rho_w(\infty) = \tilde{f}^T V_\eta^+ \tilde{f}^T.$$

Следовательно, если $\tilde{f}^T V_\eta^+ \tilde{f}^T > \theta_m(1 - q/2)$, то обязательно найдется конечное значение α_w, удовлетворяющее условию (8). Невыполнение этого условия позволяет принять гипотезу о том, что правая часть $\tilde{f}$ обусловлена только шумом измерения и поэтому $\bar{\varphi} = \bar{0}$, а следовательно, $\varphi_\alpha = \bar{0}$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор.

Доказательство утверждения 3. Представим матрицу V_η в виде $V_\eta = \sigma^2 C_\eta$, где σ^2 — максимальное значение дисперсии шума, C_η — матрица с элементами V_{ij}/σ^2, не зависящими от уровня шума (в случае равноточных измерений это коэффициенты корреляции). Тогда, введя вектор $\tilde{\omega} = \frac{1}{\sigma}(C_\eta^+)^{1/2} W_f^{-1/2} U\tilde{y}$, статистику $\rho_w(\alpha)$ можно представить в виде (аналогичном (П8))

$$\rho_w(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{p} \frac{\tilde{\omega}_j^2}{\lambda_j^2 + \alpha} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=p+1}^{N} \tilde{\omega}_j^2. \qquad (\text{П}10)$$

Второе слагаемое этой квадратичной формы полностью обусловлено шумом η и является случайной величиной, математическое ожидание которой не зависит (в силу проведенной нормировки) от дисперсии σ^2. Так, для невырожденной матрицы V_η и $W_f = V_\eta^{-1}$ это математическое ожидание равно $N - p$. Рассмотрим поведение первого слагаемого выражения (П10) при $\sigma^2 \to 0$. При малых значениях дисперсии проекции $\tilde{\omega}_j^2$, $1 \le j \le p$, определяются в основном проекциями точной правой части, и поэтому можно считать, что

$$\sum_{j=1}^{p} \tilde{\omega}_j^2/(\lambda_j^2 + \alpha)$$

практически не зависит от дисперсии. Так как гипотеза (7) принимается при попадании $\rho_w(\alpha)$ в интервал (8), границы которого не зависят от уровня шума, то из вида первого слагаемого (П10) следует, что параметр α_w (при котором происходит принятие гипотезы (7)) должен изменяться с такой же скоростью, что и σ^2, т. е. $\alpha_w = 0(\sigma^2)$.

Таким образом, предлагаемый алгоритм выбора вычисляет значение α_w, стремящееся к нулю, как σ^2 при стремлении уровня шума к нулю. Можно показать, что такую же скорость изменения имеет и точный оптимальный параметр регуляризации $\alpha_{\text{опт}}$.

Введя вектор $x = V\bar{\varphi}^+$ и используя сингулярное разложение (П3), представим среднеквадратическую ошибку в виде

$$\Delta^2(\alpha) = M[\|\bar{\varphi}^+ - \varphi_\alpha\|^2] = \alpha^2 \sum_{j=1}^{p} \frac{x_j^2}{(\lambda_j^2 + \alpha)^2} + \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_j^2 + \alpha)^2}.$$

Видно, что если имеет место $\alpha_w = 0(\sigma^2)$, то $\Delta^2(\alpha_w) \to 0$ при $\sigma^2 \to 0$. При этом величина систематической ошибки (первое слагаемое) имеет порядок σ^4, а случайной — σ^2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971.
2. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
5. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Кн. 1. М.: Мир, 1982.
6. Karayiannis N. B., Venetsanopoulos A. N. Regularization theory in image restoration — the stabilizing functional approach // IEEE Trans. on Acoust. Speech and Sign. Proces. 1990. 38, N 7. P. 1155.
7. Морозов В. А., Гребенников А. И. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
8. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. М.: Мир, 1978.
9. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
10. Гордонова В. И., Морозова В. А. Численные алгоритмы выбора параметра регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. № 3.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 11 ноября 1994 г.