

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Н. Касперович

(Новосибирск)

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ  
 НЕКОТОРЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СХЕМ

Рассмотрена потенциальная точность достаточно абстрактной измерительной схемы. Полученные оценки иллюстрируются вначале на примере схемы измерения с идеальным квантователем, а затем на примерах практической реализации аналого-цифрового преобразования.

В работе оценивается величина минимальной суммарной дисперсии ошибки измерительных схем с предварительным преобразованием (фильтрацией) сигнала. Первая составляющая этой ошибки обусловлена линейными искажениями сигнала при прохождении измерительной схемы, а вторая — шумами, возникающими внутри измерительной схемы.

В первом разделе статьи схема оптимизируется, во втором — рассматривается абстрактная схема с идеальным квантователем, в третьем — классические варианты аналого-цифрового преобразования (АЦП).

1. Схема измерений. *Минимальная дисперсия ошибки.* На рис. 1 представлена достаточно широко распространенная обобщенная функциональная схема, содержащая измерительный преобразователь и устройство обработки (фильтрации) шумов, возникающих при преобразовании. Здесь  $x(t)$  — измеряемый сигнал;  $x^*(t)$  — выходной сигнал;  $n(t)$  — шум, сопровождающий процесс преобразования;  $W_x(\omega)$  — частотная характеристика измерительного преобразователя (измерительного фильтра);  $W_y(\omega)$  — частотная характеристика фильтра обработки, предназначенного для коррекции частотных искажений, вносимых измерительным фильтром, и подавления шума измерения.

Используя в качестве модели  $x(t)$  и  $n(t)$  действительные стационарные случайные некоррелированные между собой сигналы, можно записать, что суммарная дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Sigma}^2 &= \langle [x(t) - x^*(t)]^2 \rangle = \epsilon_x^2 + \epsilon_n^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |1 - W_x(\omega)W_y(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |W_y(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $S_x(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  — спектральные плотности измеряемого сигнала и шума.

Надлежащим выбором частотной характеристики фильтра  $W_y(\omega)$  при фиксированном фильтре  $W_x$  дисперсия ошибки  $\epsilon^2$  может быть минимизирована. Если частотная характеристика измерительного фильтра  $W_x(\omega) = W_{x1}(\omega) + iW_{x2}(\omega)$ , где  $W_{x1}(\omega)$  и

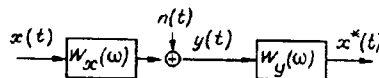


Рис. 1

$W_{x2}(\omega)$  — четные и нечетные действительные функции частоты, то частотная характеристика оптимального фильтра обработки

$$W_y(\omega) = S_x(\omega)W_x^*(\omega) / [S_x(\omega)|W_x(\omega)|^2 + S_n(\omega)], \quad (1.2)$$

где  $W_x^*(\omega) = W_{x1}(\omega) - iW_{x2}(\omega)$  — фильтр с комплексно-сопряженной с измерительным фильтром частотной характеристикой.

Дисперсия ошибки измерения при использовании оптимального фильтра  $W_x(\omega)$ , определяемого соотношением (1.2),

$$\epsilon_{\Sigma}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)S_n(\omega)}{S_x(\omega)|W_x(\omega)|^2 + S_n(\omega)} d\omega. \quad (1.3)$$

Рассмотрим теперь более внимательно соотношение (1.3). Положим, что спектр мощности сигнала сосредоточен в полосе  $|\omega| < \omega_{\max}$ , и попытаемся уменьшить суммарную дисперсию ошибки путем выбора квадрата модуля частотной характеристики фильтра  $W_x(\omega)$ . Из (1.3) следует, что для того, чтобы уменьшить суммарную дисперсию ошибки, нужно неограниченно увеличивать квадрат модуля частотной характеристики измерительного фильтра, тем самым увеличивая отношение сигнал/шум (SNR).

Самым очевидным решением является использование в качестве измерительного фильтра усилителя с как можно большим коэффициентом усиления\*. Одним из наиболее интересных видов такого усилителя является усилитель с частотной характеристикой вида

$$|W_x(\omega)|^2 = 1/\omega^{2r}, \quad (1.4)$$

т. е. идеальный интегратор  $r$ -го порядка.

При этом, если спектральная плотность сигнала и шума постоянна в полосе пропускания  $|\omega| < \omega_{\max}$ , то (см. [1])

$$\epsilon_{\Sigma_r}^2 = \sigma_x^2 \left[ 1 + \frac{1}{2r\mu} \sum_{k=0}^{r-1} \cos \frac{2k+1}{2r} \pi \ln \left( \mu^2 - 2\mu \cos \frac{2k+1}{2r} \pi + 1 \right) - \frac{1}{r\mu} \sum_{k=0}^{r-1} \sin \frac{2k+1}{2r} \pi \operatorname{arctg} \frac{\mu \sin \frac{2k+1}{2r} \pi}{1 - \mu \cos \frac{2k+1}{2r} \pi} \right], \quad (1.5)$$

где  $\mu = \omega_{\max}(S_n/S_x)^{1/2r}$ .

Если величина  $\mu \rightarrow 0$ , то\*\*

$$\epsilon_{\Sigma_r}^2 = \frac{2}{2r+1} \omega_{\max}^{2r+1} S_n. \quad (1.6)$$

Описанный упрощенный подход к анализу ошибок позволяет оценить потенциальную точность многих измерительных схем. Подчеркнем, что из изложенного выше следует, что уменьшение дисперсии ошибки измерения

\* Для обычного идеального квантователя это сводится к уменьшению шага квантования по уровню  $q$ .

\*\* Соотношение (1.6) имеет смысл и при  $r = 0$ .

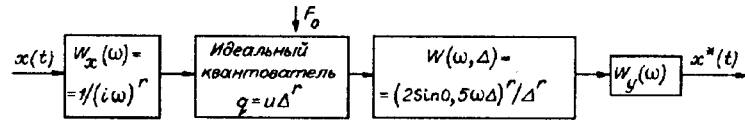


Рис. 2

происходит вследствие применения предварительного усиления сигнала в полосе его существования\*.

2. Измерительная схема с идеальным квантователем. Рассмотрим цифровой вариант (рис. 2) исследуемой оптимальной (в смысле минимума среднего квадрата ошибки) измерительной структуры с селективным усилением. Здесь сигнал с выхода «усилителя-интегратора»  $W_x(\omega)$  подается на вход идеального квантователя с шагом квантования

$$q = u\Delta^r, \quad (2.1)$$

где  $2u$  — диапазон входного сигнала прибора;  $\Delta$  — шаг дискретизации по времени.

Выход квантователя, состоящий из аддитивной смеси входного сигнала и шума квантования, поступает на фильтр с частотной характеристикой

$$W(\omega, \Delta) = (2\sin 0,5\omega\Delta)^r / \Delta^r, \quad (2.2)$$

а затем на выходной фильтр  $W_y(\omega)$ .

Введение фильтра  $W(\omega, \Delta)$  изменяет структуру восстанавливающего фильтра  $W_y(\omega)$  (см. (1.2)):

$$W_y(\omega) = S_x(\omega)W_x^*(\omega) / W(\omega, \Delta)(S_x(\omega) |W_x(\omega)|^2 + S_n(\omega)), \quad (2.3)$$

но суммарная дисперсия ошибки при этом по-прежнему определяется соотношением (1.3).

В рассматриваемом случае спектр мощности шума  $S_n(\omega)$  совпадает со спектром шума квантования, прошедшим дискретизацию по времени с шагом  $\Delta$ , и на основании [2]

$$S_\xi(\omega, \Delta) = \frac{q^3}{4\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_m f_{x_r} [(\omega - 2\pi m/\Delta)q/2\pi k], \quad (2.4)$$

где  $f_{x_r}(\dot{x}_r)$  — плотность вероятности производной сигнала на входе квантователя.

При высокой передискретизации ( $\Delta \rightarrow 0$ )

$$S_n(\omega, \Delta) = S_\xi(0, \Delta) |[\pi/\Delta - |\omega|] \Delta/2\pi, \quad (2.5)$$

$$S_\xi(0, \Delta) = \frac{q^3}{4\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_m f_{x_r}(mq/k\Delta). \quad (2.6)$$

Эта величина должна подставляться в формулу (1.6) в качестве  $S_n$ .

3. Примеры практических устройств. Изложенный выше общий подход позволяет рассмотреть с единой точки зрения ряд устройств.

\* Эта полоса может находиться в любом месте на оси частот. В этом случае фильтр  $W_x(\omega)$  должен быть выбран соответствующим образом или применено гетеродинирование сигнала.

*Идеальное аналого-цифровое преобразование.* Частотная характеристика  $W_x(\omega) = K$ ,  $W(\omega, \Delta) = 1$ , а дисперсия ошибки определяется соотношением (1.6) при  $r = 0$ :

$$\varepsilon_{\Sigma}^2(\Delta) = \frac{\omega_{\max} q^3}{\zeta(3)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_m f_x(mu/k)$$

где  $\zeta(3) \approx 1,2$  — дзета-функция Римана.

Дальнейшее уменьшение этой величины может быть достигнуто только увеличением коэффициента усиления  $K$  или уменьшением шага квантования по уровню  $q$ .

Использование предварительного усиления для расширения динамического диапазона АЦП рассмотрено, например, в [3].

*Аналого-цифровое преобразование на основе дельта-модуляции.* Этот прибор слабо отличается от идеального квантователя с шагом квантования  $q$  (присутствует запаздывание отсчета на один такт  $\Delta$ ). При увеличении тактовой частоты  $F_0 = 1/\Delta$  дельта-модулятор приближается к идеальному квантователю и его потенциальные возможности могут быть оценены соотношением (3.1).

Средний квадрат шума квантования в дельта-модуляторе

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{q} \int_0^q \left[ \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (q - x)^2 \right] dx = q^2/3. \quad (3.3)$$

Если использовать скользящее усреднение двух смежных отсчетов, то дисперсия шума квантования АЦП с дельта-модулятором совпадает с дисперсией шума идеального квантователя.

*Аналого-цифровое преобразование на основе дельта-сигма-модуляции с однократным интегрированием.* При  $r = 1$  соотношение (1.5) принимает вид

$$\varepsilon_{\Sigma_0}^2(\Delta) = \sigma_x^2 \left[ 1 - \frac{1}{\mu} \operatorname{arctg} \mu \right]. \quad (3.4)$$

Если  $\mu \rightarrow 0$  (высокая передискретизация), то в соответствии с (1.6) выполняется закон «трех вторых» (см. [4]):

$$\varepsilon_{\Sigma_0}^2(\Delta) = \frac{1}{6\pi^3} (\omega_{\max} \Delta)^3 u^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_m f_x(mu/k). \quad (3.5)$$

При увеличении частоты дискретизации ( $\Delta \rightarrow 0$ ) дисперсия погрешности стремится к нулю.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962.
2. Ефимов В. М. Оценка для спектральной плотности шума квантования по уровню // Автоматика. 1970. № 1.
3. Применение цифровой обработки сигналов /Под ред. Э. Опенгейма. М.: Мир, 1980.
4. Candy J. C., Benjamin O. I. The structure of quantisation noise from sigma—delta modulation // IEEE Trans. Commun. 1981. COM29, N 9.

Поступила в редакцию 3 марта 1995 г.