РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1995

УДК 517.58

В. Г. Тихобаев

(Новосибирск)

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА КРАТНОГО АРГУМЕНТА

Приводятся различные формы записи соотношений между функциями гиперболического тангенса или котангенса и такими же функциями кратного аргумента. Результаты работы используются при вычислении параметров цепных схем.

Гиперболические функции комплексного аргумента широко используются при описании процессов в электрических цепях с распределенными параметрами и цепных схемах, служащих моделями обмоток электрических машин и трансформаторов. Один из важнейших вопросов, влияющих на точность получаемых решений, заключается в определении параметров эквивалентной схемы замещения цепи. Предлагаемый в [1] метод экспериментального определения первичных и вторичных параметров цепных схем нельзя считать универсальным, так как применение его оговаривается рядом условий, накладываемых как на исходные данные, так и на результаты расчета. Для установления однозначной зависимости между параметрами всей схемы и какой-либо части ее необходимы формулы, выражающие функции $\mathrm{th}nz$ и $\mathrm{cth}nz$ при больших кратностях n через $\mathrm{th}z$ и $\mathrm{cth}z$, отсутствующие в общедоступной справочной литературе. Цель данной работы состоит в получении таких выражений в форме, удобной для решения практических задач. Используя известную формулу гиперболического котангенса суммы двух переменных [2]

$$\mathrm{cth}(x + y) = \frac{\mathrm{cth}x \cdot \mathrm{cth}y + 1}{\mathrm{cth}y + \mathrm{cth}x}, \tag{1}$$

нетрудно найти аналитическое выражение этой функции для аргумента любой кратности:

$$\mathrm{cth}2z = \frac{\mathrm{cth}^2 z + 1}{2\mathrm{cth}z}; \qquad \mathrm{cth}3z = \frac{\mathrm{cth}^3 z + 3\mathrm{cth}z}{3\mathrm{cth}^2 z + 1} \quad \text{и т. д.}$$

Анализ структуры получаемых выражений показывает, что все они имеют вид неправильной дроби, представляющей собой отношение нечетной $F1(z)$ и четной $F2(z)$ частей полинома:

$$(\mathrm{cth}z + 1)^n = \mathrm{cth}^n z + a_{n-1}\mathrm{cth}^{n-1} z + \ldots + a_1\mathrm{cth}z + a_0 = F1(z) + F2(z),$$

$$\mathrm{cth}nz = \frac{\mathrm{cth}^n z + a_{n-2}\mathrm{cth}^{n-2} z + \ldots}{a_{n-1}\mathrm{cth}^{n-1} z + a_{n-3}\mathrm{cth}^{n-3} z + \ldots} = \frac{F1(z)}{F2(z)}, \tag{2}$$

где n — кратность аргумента; a_{n-1}, a_{n-2}, ... — биномиальные коэффициенты полинома. Выражение (2) можно разложить в цепную дробь

$$\mathrm{cth}\,nz = b_1\mathrm{cth}z + \cfrac{1}{b_2\mathrm{cth}z + \cfrac{1}{b_3\mathrm{cth}z + \ldots + \cfrac{1}{b_n\mathrm{cth}z}}}, \tag{3}$$

коэффициенты b_k которой вычисляются по формуле

$$b_1 = \frac{1}{n}, \tag{4}$$

$$b_k = (2k-1)n^{(-1)^k}\prod_{i=1}^{k-1}(n^2 - i^2)^{(-1)^{k+i}},$$

например:

$$\mathrm{cth}2z = \frac{1}{2}\mathrm{cth}z + \frac{1}{2\mathrm{cth}z}, \qquad \mathrm{cth}3z = \frac{1}{3}\mathrm{cth}z + \cfrac{1}{\frac{9}{8}\mathrm{cth}z + \cfrac{1}{\frac{8}{3}\mathrm{cth}z}}.$$

Аналогичные соотношения можно записать и для гиперболического тангенса кратного аргумента. Основываясь на формуле [2]

$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}x + \mathrm{th}y}{1 + \mathrm{th}x \cdot \mathrm{th}y}, \tag{5}$$

получим

$$\mathrm{th}2z = \frac{2\mathrm{th}z}{\mathrm{th}^2z + 1}, \qquad \mathrm{th}3z = \frac{\mathrm{th}^3z + 3\mathrm{th}z}{3\mathrm{th}^2z + 1}.$$

В общем виде (2) $\mathrm{th}nz$ записывается как отношение нечетной части $F1(z)$ полинома $(\mathrm{th}z + 1)^n$ к его четной части $F2(z)$; соответственно для четных значений кратности аргумента n получим правильную дробь, а для нечетных — неправильную. При разложении $\mathrm{th}nz$ в цепную дробь при нечетном n получаемое выражение будет совпадать по форме с (3) после замены в нем $\mathrm{cth}z$ на $\mathrm{th}z$. Для четных n выражение (3) заносится в знаменатель цепной дроби, например:

$$\mathrm{th}2z = \frac{2\mathrm{th}z}{\mathrm{th}^2z + 1} = \cfrac{1}{\frac{1}{2}\mathrm{th}z + \cfrac{1}{2\mathrm{th}z}}.$$

Решение обратной задачи — вычисление значения функции $\mathrm{th}z$ или $\mathrm{cth}z$ по известному значению функции кратного аргумента $\mathrm{th}nz$ или $\mathrm{cth}nz$ — можно выполнить путем итерации [3]. Функция $\mathrm{th}nz$ при четном n может быть представлена в виде суммы дробно-линейных функций

$$\mathrm{th}nz = \frac{F1(z)}{F2(z)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\mathrm{th}z - p_i}, \tag{6}$$

где p_i — корни уравнения $F2(z) = 0$.

Все они мнимые попарно сопряженные величины, а поэтому $\mathrm{th}nz$ — аналитическая функция, не имеющая особенностей в точке $\mathrm{th}nz = 0$. Искомое решение $\mathrm{th}z$ заключено в области аргумента между двумя ближайшими к нулю полюсами функции (6). В этой области первая производная $\mathrm{th}nz$ — положительная величина, а вторая производная положительна при положительных значениях мнимой составляющей $\mathrm{th}nz$ и отрицательна при отрицательных.

Вследствие этого процесс итерации по методу Ньютона сходится на 2-м или 3-м шаге, если в качестве первого приближения значения th$z$ принять величину $\frac{\text{th}nz}{n}$.

Вычисление th$z$ на очередном $k + 1$-м шаге итерации производится по формуле

$$\text{th}z_{k+1} = \text{th}z_k - \frac{(\text{th}nzF2(z_k) - F1(z_k))F2(z_k)}{F2'(z_k)F1(z_k) - F1'(z_k)F2(z_k)}, \tag{7}$$

где $F1(z_k)$, $F2(z_k)$, $F1'(z_k)$ и $F2'(z_k)$ — значения полиномов $F1(z)$ и $F2(z)$, а также их производных: $F1'(z) = \frac{dF1(z)}{d\text{th}z}$ и $F2'(z) = \frac{dF2(z)}{d\text{th}z}$ при очередном значении аргумента thz_k. При нечетном n структура формулы (6), записанной и для thnz, и для cthnz, идентична и отличается от приведенной наличием в правой части равенства еще одного слагаемого вида $\frac{\text{th}z}{n}$ или $\frac{\text{cth}z}{n}$ соответственно. Это не изменяет характера функциональной зависимости thnz и cthnz от th$z$ и cth$z$, а поэтому вычисление значений последних может быть проведено по формуле (7).

При четном n функция cthnz записывается в виде

$$\text{cth}nz = \frac{F1(z)}{F2(z)} = \frac{\text{cth}z}{n} + \frac{1}{n\text{cth}z} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{A_i}{\text{cth}z - p_i}, \tag{8}$$

где p_i — корни уравнения $F2(z) = 0$, исключая нулевой корень.

Для этого случая вычисление значения cth$z$ на $k + 1$-м шаге итерации производится по формуле

$$\text{cth}z_{k+1} = \text{cth}z_k - \frac{\left(\left(\text{cth}nz - \frac{1}{n\text{cth}z_k}\right)F2(z_k) - F1(z_k)\right)F2(z_k)}{\frac{1}{n\text{cth}^2 z_k}F2^2(z_k) - F1'(z_k)F2(z_k) + F2'(z_k)F1(z_k)}, \tag{9}$$

где $F1(z_k)$, $F2(z_k)$, $F1'(z_k)$, $F2'(z_k)$ — значения полиномов $F1(z)$ и $F2(z)$, а также их производных по cth$z$ при значениях аргумента cthz_k. Итерационный процесс сходится на 2-м или 3-м шаге итерации, если в качестве первого приближения принять cth$z$ = $n$cthnz.

Никаких ограничений на значения функций, вычисляемых по формулам (2), (3), (7) и (9), не накладывается, а поэтому данные соотношения могут быть использованы для определения параметров цепных схем по результатам измерения их входных сопротивлений в широком диапазоне частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Каганов З. Г.** Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы. М.: Энергоатомиздат, 1990.
2. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции (формулы, графики, таблицы). М.: Физматгиз, 1964.
3. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1967. Т. 1.

Поступило в редакцию 6 февраля 1995 г.