РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1995

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 631.291.27

В. М. Ефимов, А. Н. Колесников

(Новосибирск)

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ПЕРВУЮ КОНЕЧНУЮ РАЗНОСТЬ ЦИФРОВЫХ МАССИВОВ ДАННЫХ

Массив данных образуется из квантованных по уровню значений сигнала в узлах равномерной пространственной решетки. Для сжатия информации используется кодирование первой конечной разности квантованных по уровню значений сигнала по одной из пространственных осей. Получены значения шага квантования по уровню и шага дискретизации по пространству, минимизирующие удельную энтропию массива при фиксированной точности воспроизведения исходного сигнала (сигнал — стационарное случайное изотропное гауссово поле).

1. В [1, 2] рассмотрена оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель нулевого порядка с фиксированной апертурой. Найдены значения шага квантования по уровню q и шага дискретизации по пространству Δ, минимизирующие число отсчетов на выходе предсказателя при фиксированной точности воспроизведения сигнала на его выходе. Ниже рассматривается задача, итогом решения которой является минимизация удельной энтропии массива данных, образованного из значений сигнала $f(k_1\Delta, ..., k_m\Delta)$ в узлах равномерной пространственной решетки. Для сжатия информации используется кодирование первой конечной разности отсчетов сигнала по одной из пространственных осей. Ищутся значения шага квантования по уровню q и шага дискретизации по пространству Δ, минимизирующие удельную энтропию массива при фиксированной точности воспроизведения исходного сигнала (сигнал — стационарное случайное изотропное гауссово поле):

$$\min_{\Delta, q} H(\Delta, q)/\Delta^m + \mu\varepsilon^2(\Delta, q), \tag{1}$$

где m — размерность пространства.

В (1) энтропия $H(\Delta, q) = -\sum_k p_k(\Delta, q)\log_2 p_k(\Delta, q)$, а вероятность $p_k(\Delta, q)$ определяется соотношением [3]:

$$p(\Delta, q) = (1/q)\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\lambda(\eta)(q - |\eta - kq|)1[q - |\eta - kq|], \tag{2}$$

где функция $1[z]$ равна единице при $z \geq 0$ и нулю при $z < 0$.

Для гауссова сигнала плотность вероятности приращения значений сигнала на шаге решетки вдоль одной из выбранных осей

$$\lambda(\eta) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_\eta)\exp[-\eta^2/2\sigma_\eta^2],$$

где $\sigma_\eta^2 = 2\sigma_f^2(1 - \rho_f(\Delta))$.

Если ввести параметр $\nu^2 = 2\sigma_f^2(1 - \rho_f(\Delta))/q^2$, то, выполняя интегрирование в (2), получим

$$p_k(\nu) = [\Phi((k+1)/\nu) - \Phi((k-1)/\nu)] +$$
$$+ k[\Phi((k-1)/\nu) - 2\Phi(k/\nu) + \Phi((k+1)/\nu)] +$$
$$+ (\nu/\sqrt{2\pi})[\exp(-(k-1)^2/2\nu^2) - 2\exp(-k^2/2\nu^2) + \exp(-(k+1)^2/2\nu^2)]. \quad (3)$$

Средний квадрат ошибки воспроизведения исходного сигнала по данным массива

$$\varepsilon^2(\Delta, q) = (1/\Delta^m)\int_{-0,5\Delta}^{0,5\Delta}\!\!\ldots\!\int \prod_{k=1}^{m} dx_k \langle (f(x_1, \ldots, x_m) - f_q^*(x_1, \ldots, x_m))^2\rangle. \quad (4)$$

В (4) интерполяционная формула

$$f_q^*(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k_1 \ldots k_m} f_q(x_1, \ldots, x_m) w(x_1 - k_1\Delta, \ldots, x_m - k_m\Delta). \quad (5)$$

Рассмотрим изотропный марковский гауссов сигнал. При достаточно высокой точности воспроизведения $\sigma_\eta^2 \cong 2\sigma_f^2\alpha_1\Delta$ взаимная корреляционная функция ошибки квантования ξ и сигнала f близка к нулю.

2. Если весовая функция фильтра

$$w(x_1 - k_1\Delta, \ldots, x_m - k_m\Delta) = 1\left[\prod_{i=1}^{m}(0,5\Delta - |x_i - k_i\Delta|)\right], \quad (6)$$

то средний квадрат ошибки воспроизведения

$$\varepsilon^2(\Delta, q) = 2\sigma_f^2\alpha_1\Delta\left[(1/2)\int_0^1\!\!\ldots\!\int \prod_{k=1}^{m} dx_k \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{1/2} + 1/12\nu^2\right] = 2\sigma_f^2\alpha_1\Delta\chi_m,$$

а искомая удельная энтропия

$$H(\nu)/\Delta^m = (2\alpha_1/\varepsilon_0^2)^m \chi_m^m H(\nu), \quad (7)$$

где $\varepsilon_0^2 = \varepsilon^2(\Delta, q)/\sigma_f^2$, зависит от одного параметра ν.

В табл. 1 приведены расчетные значения представляющих интерес величин, соответствующих минимуму удельной энтропии массива. Из данных таблицы видно, что величина $H(\nu_{0m})$ довольно слабо зависит от размерности пространства.

Таблица 1

m	1	2	3
ν_{0m}	1,075	1,40	1,625
χ_{0m}	0,322	0,425	0,512
$H(\nu_{0m})$	1,389	1,551	1,642
$\chi_{0m}^m H(\nu_{0m})$	0,447	0,280	0,220
$\sigma_\xi^2/\varepsilon_э^2$	0,288	0,111	0,066

Таблица 2

m	$\chi_m = \varepsilon^2(\Delta, q)/2\sigma_f^2\,\alpha_1\Delta$
1	$\beta_1 + (1 - (1 - \rho_\xi(\nu))/3)/12\nu^2$
2	$(4\beta_2 - 2/9 - \sqrt{2}/18) + [1 - 4(1 - \rho_\xi(\nu))/9 - (1 - \rho_\xi(\sqrt{2}\nu))/9]/12\nu^2$
3	$(8\beta_3 - 2/9 - \sqrt{2}/9 - \sqrt{3}/54) + [1 - 4(1 - \rho_\xi(\nu))/9 - 2(1 - \rho_\xi(\sqrt{2}\nu))/9 - (1 - \rho_\xi(\sqrt{3}\nu))/27]/12\nu^2$

3. Для весовой функции

$$w(x_1 - k_1\Delta, \ldots, x_m - k_m\Delta) = 1\left[\prod_{i=1}^{m}(\Delta - |x_i - k_i\Delta|)\right]\prod_{i=1}^{m}(1 - |x_i/\Delta - k_i|). \tag{8}$$

В табл. 2 приведены соотношения для коэффициента χ_m:

$$\beta_m = \int_0^1\!\!\ldots\!\int \prod_{k=1}^{m} dx_k \prod_{k=1}^{m}(1 - x_k)\left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{1/2}.$$

В табл. 3 функция $\rho_\xi(\nu)$ — нормированная корреляционная функция ошибки квантования [4]. Для гауссова сигнала

$$\rho_\xi(\nu) = 2\Phi(1/\nu)(1 + 6\nu^2) - 6(2/\pi)^{1/2}\nu. \tag{9}$$

Анализ показывает, что в точке оптимума ν_0 в соответствии с (9) функция $\rho_\xi(0) \cong 0$.

Табл. 3 содержит представляющие интерес величины в точках оптимума.

При отсутствии шума (ошибки квантования ξ) фильтр (8) марковского сигнала близок к асимптотически оптимальному [5]. Если при построении фильтра учесть статистику ошибки квантования, то, например, для размерности пространства $m = 1$ (одномерный случай)

$$w(x) = (1 - |x|/\Delta + (1 - \rho_\xi(\nu))/12\nu^2)/(1 + 2(1 - \rho_\xi(\nu))/12\nu^2),$$

а средний квадрат ошибки воспроизведения

$$\varepsilon^2(\Delta, q)/2\sigma_f^2\alpha_1\Delta = (1/6 + 1/12\nu^2 + (1 - \rho_\xi^2(\nu))/12\nu^2)/(1 + 2(1 - \rho_\xi(\nu))/12\nu^2).$$

В точке оптимума определяемая соотношением (9) функция $\rho_\xi(\nu) \cong 0$, и величина χ_1 в формуле для удельной энтропии

$$\chi_1 = (1/6 + 1/6\nu^2)/(1 + 1/6\nu^2).$$

При этом оптимальное значение параметра ν_{01} оказывается равным 1,88 и отличие в удельной энтропии составляет 0,353 − 0,298 = 0,055.

Таблица 3

m	1	2	3
ν_{0m}	1,075	1,179	1,102
χ_{0m}	0,215	0,247	0,270
$H(\nu_{0m})$	1,389	1,446	1,404
$\chi_{0m}^m H(\nu_{0m})$	0,298	0,088	0,028
$\sigma_\xi^2/\varepsilon_э^2$	0,287	0,120	0,080

В рассмотренных выше примерах оптимальное значение энтропии $H(\nu_{0m})$ меняется слабо. Поэтому в качестве характеристики сжатия, связанной с размерностью пространства, можно рассматривать множитель при энтропии $H(\nu_{0m})$. Для марковского сигнала этот множитель равен $(2\alpha_1/\varepsilon_0^2)^m\chi_{0m}^m$.

4. Для гладкого сигнала зависимость удельной энтропии от относительного

среднего квадрата ошибки воспроизведения иная.

Например, для однократно дифференцируемого сигнала (при использовании (6))

$$\sigma_\eta^2 \cong \sigma_f^2 |\rho_f''(0)| \Delta^2$$

и

$$\varepsilon^2(\Delta, q) = \sigma_f^2 |\rho_f''(0)| \Delta^2 (m/12 + 1/12\nu^2).$$

Таблица 4

m	1	2	3
ν_{0m}	1,15	1,44	1,5
χ_{0m}	0,154	0,207	0,287
$H(\nu_{0m})$	1,412	1,568	1,594
$\chi_{0m}^m H(\nu_{0m})$	0,547	0,324	0,245
$\sigma_\xi^2/\varepsilon_э^2$	0,756	0,242	0,148

Удельная энтропия

$$H(\nu)/\Delta^m = (|\rho_f''(0)|/\varepsilon_0^2)^{m/2} \chi_m^{m/2} H(\nu), \qquad (10)$$

где $\chi_m = (m/12 + 1/12\nu^2)$.

В этом случае удельная энтропия для пространства различной размерности обратно пропорциональна соответствующей степени от корня квадратного из относительного среднего квадрата ошибки воспроизведения. Табл. 4 содержит параметры соотношения (10), соответствующие точке его оптимума.

5. Отметим, что для большинства тестовых изображений соотношения между параметрами дискретизации по пространству и квантования по уровню не выполняются. При этом если за критерий качества изображения принять средний квадрат ошибки воспроизведения (с учетом динамической ошибки), то удельную энтропию для этих изображений можно уменьшить примерно вдвое при сохранении точности воспроизведения. Отметим также, что учет динамической ошибки позволяет оценивать такие операции, как субдискретизация. Например, субдискретизация с параметром 2 по каждой из осей пространства ведет к потере точности, не превышающей для марковского сигнала 3 дБ, так как примерно вдвое увеличивает дисперсию приращения.

Предлагаемая схема оптимизации системы сжатия следующая: по требуемой величине относительного среднего квадрата ошибки воспроизведения ε^2/σ_f^2 и параметру α_1 находится шаг дискретизации Δ. Шаг квантования по уровню q задается соотношением

$$q = [2\sigma_f^2 \alpha_1 \Delta / \nu_{0m}^2]^{1/2},$$

где параметр ν_{0m} определяется соответствующей строкой соответствующей таблицы статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов В. М., Лившиц З. А. Оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой // Автометрия. 1972. № 4.
2. Ефимов В. М., Лившиц З. А. Некоторые методы повышения эффективности цифровых систем сжатия данных // Автометрия. 1973. № 2.
3. Ефимов В. М. Асимптотические распределения конечных разностей квантованного по уровню стационарного случайного сигнала // Автометрия. 1993. № 5.
4. Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле. М.: Энергия, 1969.
5. Ефимов В. М. Асимптотически оптимальные интерполяционные соотношения // Автометрия. 1992. № 4.

Поступила в редакцию 19 декабря 1994 г.