РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1995

УДК 519.6 : 616.07

И. И. Кохановский

(Ульяновск)

НОРМАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Проекционная система двумерной вычислительной томографии рассматривается как конечная система линейных равенств в гильбертовом пространстве соболевского типа. Строятся обобщенные сплайны, позволяющие свести задачу восстановления искомой функции к системе линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей.

Рассмотрим проблему восстановления функции $u(x)$, определенной в выпуклой ограниченной области $\Omega \subset R^2$, по заданным значениям ее интегралов

$$R_i[u] \equiv \int_{\Gamma_i} u(x)dx = f_i, \qquad 1 \le i \le n, \tag{1}$$

здесь $\Gamma_i = \{x \in \Omega : x_1\cos\varphi_i + x_2\sin\varphi_i = l_i\}$ — отрезки, пересекающие Ω; $\bar{f} = (f_1, ..., f_n)$ — результаты измерений.

В случае, когда набор данных неполон, применение наиболее эффективных подходов, основанных на обращении интегральных преобразований (Радона и Фурье), затруднено, так как требует предварительного дополнения исходных данных [1]. Использование прямых алгебраических алгоритмов, основанных на сведении проблемы восстановления функции $u(x)$ по системе (1) к алгебраической системе линейных уравнений и применению для ее решения итерационного метода, затрудняется тем, что получаемая система плохо обусловлена.

В случае умеренного числа измерений n для сведения системы (1) к конечномерной можно обойтись без дискретизации квадратур, используя технику обобщенных сплайнов [2—4]. Система линейных равенств (1) недоопределенная. Доопределим исходную проблему, поставив задачу о нормальном решении (1) в подходящем гильбертовом пространстве H, т. е. задачу минимизации функционала

$$J = \|u\|_H^2 \tag{2}$$

при условиях (1). Основное требование на выбор пространства H — интегралы $R_i[u]$ должны быть линейными непрерывными функционалами. Решение этой задачи — обобщенный сплайн Аттьи — Лорана [2]. Такие обобщенные сплайны естественно называть нормальными. Для случая функций одной переменной такие сплайны построены в [3]. Многомерные нормальные сплайны для задачи интерполяции построены в [4].

Выбор в качестве минимизируемого функционала квадрата гильбертовой нормы позволяет значительно упростить как теоретическое рассмотрение проблемы, так и реализацию алгоритма ее решения.

Так, с учетом того, что множество решений (1) линейное и замкнутое, существование и единственность нормального сплайна очевидны.

Будем считать, что функция $u(x)$ определена на всем пространстве R^2 и является элементом обобщенного соболевского пространства

$$H_\alpha^r = \left\{u \in S'(R^2) : (\alpha^2 + |\xi|^2)^{r/2}\hat{u} \in L_2(R^2)\right\}, \qquad \alpha > 0, \ \ r > 1, \tag{3}$$

здесь S' — пространство обобщенных функций медленного роста [5]; $\hat{u}(\xi)$ — фурье-образ функции $u(x)$. Такие пространства для случая $\alpha = 1$ рассматривались, например, в [5]. Очевидно, что пространство H_α^r с произвольным параметром $\alpha > 0$ имеет аналогичные свойства. Необходимость введения такого параметра станет ясна из дальнейшего. Пространство H_α^r гильбертово со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_\alpha = \int_{R^2} (\alpha^2 + |\xi|^2)^r \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi \tag{4}$$

и нормой

$$\|u\|_\alpha = \left(\int_{R^2} (\alpha^2 + |\xi|^2)^r |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Известно [5], что вложение $H_\alpha^r \subset C(R^2)$ при $\alpha = 1$, $r > 1$ обеспечивает непрерывность линейных функционалов $R_i[u]$ в H_1^r. Очевидно, что это выполняется также и для $\forall\alpha > 0$, $r > 1$.

Задача о нормальном решении системы (1) в H_α^r может быть легко решена, если функционалы $R_i[u]$ можно преобразовать к скалярному произведению в соответствии с теоремой Ф. Рисса, т. е. построить такие элементы $h_i \in H_\alpha^r$, что

$$R_i[u] = \langle h_i, u\rangle_\alpha, \qquad \forall u \in H_\alpha^r. \tag{5}$$

Тогда равенства (1) переходят в систему

$$\langle h_i, u\rangle_\alpha = f_i, \qquad 1 \le i \le n \tag{6}$$

и задача минимизации (2) при условиях (6) решается методом Лагранжа. Ее решение имеет вид

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i h_i(x), \tag{7}$$

множители μ_i определяются алгебраической системой

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_j = f_i, \qquad 1 \le i \le n, \tag{8}$$

где

$$a_{ij} = \langle h_i, h_j\rangle_\alpha \tag{9}$$

— коэффициенты симметричной матрицы Грама системы $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Эта матрица положительно определена, если функции $\{h_i\}$ линейно независимы. Покажем, что это имеет место, если среди отрезков $\{\Gamma_i\}$ нет совпадающих. Очевидно, что система функций $\{h_i\}$ линейно независима одновременно с системой функционалов $\{R_i\}$, т. е. равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i[u] = 0 \tag{10}$$

выполняется для произвольной функции $u(x) \in C$ тогда, когда каждый коэффициент α_k нулевой. Выберем пробную функцию $u_k(x) = \rho(x, G_k)$, где $G_k = \bigcup\limits_{i=1, i\neq k}^{n} \Gamma_i$ — множество, состоящее из всех отрезков, кроме Γ_k. Функция $u_k \in C$, $u_k \geq 0$, при этом

$$R_i[u_k] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq k, \\ > 0 & \text{при} \quad i = k \end{cases}$$

и равенство (10) принимает вид

$$\alpha_k R_k[u_k] = 0,$$

откуда $\alpha_k = 0$. В силу произвольности k это означает линейную независимость $\{R_i\}$.

Проблема (5) решается с помощью воспроизводящего ядра (ВЯ) пространства H_α^r [6] — такой комплексной функции $G(\xi, x)$, определенной в $R^2 \times R^2$, что:

1) $G(\xi, x) \in H_\alpha^r$ при любом фиксированном $x \in R^2$,

2) $u(x) = \langle u(\xi), G(\xi, x)\rangle$ для всех $u \in H_\alpha^r$.

Пусть $G(\xi, x)$ — ВЯ пространства H_α^r. Тогда функции h_i могут быть представлены в виде

$$h_i(x) = \int\limits_{\Gamma_i} G(\xi, x) d\xi, \tag{11}$$

а коэффициенты матрицы Грама (9)

$$a_{ij} = \int\limits_{\Gamma_i}\int\limits_{\Gamma_j} G(\xi, x) d\xi dx. \tag{12}$$

Воспроизводящие ядра пространств H_α^r для $\alpha = 1$ построены в [4] в связи с задачами интерполяции. Действуя аналогично, нетрудно получить его и для произвольного $\alpha > 0$. В этом случае ВЯ имеет вид

$$G(\xi, x) = G(\|\xi - x\|) = \frac{2\pi^r \alpha^{2-2/r}}{\Gamma(r)} (\alpha\|\xi - x\|)^{r-1} K_{1-r}(2\pi\alpha\|\xi - x\|), \tag{13}$$

здесь $r > 1$, $\Gamma(r)$ — гамма-функция, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в R^2, а

$$K_\gamma(t) = K_{-\gamma}(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^\gamma \int\limits_0^\infty \xi^{-\gamma-1} \exp\left(-\xi - \frac{t^2}{4\xi}\right) d\xi$$

— ядро Бесселя — Макдональда.

Для пространств H_α^r с полуцелым r ВЯ $G(\xi, x)$ выражается через элементарные функции [4, 7]. Мы ограничимся $r = 3/2$, при этом

$$G(\xi, x) = C_\alpha \exp[-\bar{\alpha}\|\xi - x\|], \qquad \bar{\alpha} = 2\pi\alpha, \tag{14}$$

где C_α — константа, которую в дальнейшем можно принять за 1.

Представление функционалов (11) определяется, кроме ВЯ, также областями интегрирования в (1) — отрезками Γ_i. Рассмотрим эту проблему для области реконструкции Ω — единичного круга и параллельной схемы сканирования. Интегралы в (11) не имеют элементарного представления даже в этом простейшем случае. Их достаточно хорошее приближение получается при малых α с заменой ВЯ (14) квадратичной тейлоровской аппроксимацией $\bar{G}(\xi, x)$:

$$\overline{G}(\|\xi - x\|) = 1 - \overline{\alpha}\|\xi - x\| + \frac{(\overline{\alpha}\|\xi - x\|)^2}{2},$$
$$|G(\|\xi - x\|) - \overline{G}(\|\xi - x\|)| \le \frac{(\overline{\alpha}\|\xi - x\|)^3}{6}. \tag{15}$$

Перейдем для удобства к полярным координатам. Тогда

$$\overline{h}_i(r, \theta) = \int_{\Gamma_i} \overline{G} ds,$$

$$\overline{h}_i(r, \theta) = \left[s - \frac{\overline{\alpha}}{2}\left(s(s^2 + c_i^2)^{1/2} + c_i^2 \ln|s + (s^2 + c_i^2)^{1/2}|\right) + \right. \tag{16}$$
$$\left. + \frac{\overline{\alpha}^2}{2} s\left(\frac{s^2}{3} + c_i^2\right)\right]_{s = b_i}^{s = a_i},$$

где

$$c_i = l_i - r\cos(\varphi_i - \theta), \qquad a_i = -(1 - l_i^2)^{1/2} + r\sin(\varphi_i - \theta),$$
$$b_i = (1 - l_i^2)^{1/2} + r\sin(\varphi_i - \theta), \qquad l_i \ne 0,$$

l_i, φ_i — параметры сегмента Γ_i, причем можно показать, что

$$|h_i(r, \theta) - \overline{h}_i(r, \theta)| \le \frac{8}{3}\overline{\alpha}^3(1 - l_i^2)^{1/2}. \tag{17}$$

Далее получаем

$$\overline{a}_{ij} = \int_{\Gamma_i} \overline{h}_j ds,$$
$$|a_{ij} - \overline{a}_{ij}| \le \frac{16}{3}\overline{\alpha}^3((1 - l_i^2)(1 - l_j^2))^{1/2}. \tag{18}$$

Выражение для элементов $\overline{a}_{ij}$ здесь не приводится из-за его громоздкости.

Таким образом, для построения приближенного нормального сплайна

$$\overline{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}_i \overline{h}_i(x) \tag{19}$$

нужно найти множители $\overline{\mu}_i$, решив систему

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\overline{\mu}_j = f_i, \qquad 1 \le i \le n, \tag{20}$$

симметричная матрица $\overline{A} = \{\overline{a}_{ij}\}$ которой при малых α плохо обусловлена. Эффективным методом решения таких систем является спектральное (в общем случае сингулярное) разложение матрицы системы, позволяющее выявить ее эффективный ранг, т. е. наименьший ранг матриц, эквивалентных по точности заданной матрице, и построить устойчивое приближенное псевдорешение.

Пусть $\overline{A} = V\Lambda V^T$ — спектральное разложение матрицы $\overline{A}$, где V — ортогональная $n \times n$-матрица, а Λ — диагональная матрица, элементы $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots$ $\ldots \ge \lambda_n$ которой — собственные числа матрицы $\overline{A}$. Если Θ — оценка уровня возмущений собственных чисел $\overline{A}$, то устойчивым приближенным псевдорешением системы (20) будет нормальное псевдорешение системы $\overline{A}_r\mu = f$ с матрицей $\overline{A}_r = V\Lambda_r V^T$ ранга r, где $\Lambda_r = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0\}$, а номер r, определяющий эффективный ранг, выбирается из условия $\lambda_{r-1} \geq \Theta > \lambda_r$. В качестве Θ можно взять норму матрицы поэлементных погрешностей матрицы $\overline{A}$.

Стандартные схемы (например, [8]) спектрального разложения, основанные на факторизации матрицы системы, требуют большого объема вычислений. Автором совместно с В. К. Горбуновым предложено использовать для решения плохообусловленных алгебраических систем модификацию метода сопряженных направлений, позволяющую эффективно выполнять спектральный анализ матрицы системы [10]. При этом в случае, когда матрица системы имеет малый эффективный ранг (характерный для систем (20)), итеративный процесс вырождается и требуемый объем вычислений может быть относительно невелик.

Улучшение качества решения может быть достигнуто при использовании дополнительной априорной информации о восстанавливаемой функции, например об ее неотрицательности. В этом случае следует решить задачу с добавлением условия $u(x) \geq 0$. Такая задача может быть решена (в рамках предлагаемой схемы и без существенного увеличения вычислительных затрат) методом последовательных проекций получаемых приближений на множество неотрицательных функций.

Для численного опробования алгоритма использовалась модельная функция из [9]:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{m} c_i \exp(-a_i^2 x^2 - (y - y^0)^2 b_i^2). \qquad (21)$$

Интегралы (1) этой функции вычисляются аналитически. В вычисленные значения проекций вводился гауссов шум. Решался пример для функции (21) с параметрами:

$$m = 3, \quad c_1 = 5, \quad c_2 = 10, \quad c_3 = 2{,}5, \quad a_1 = 9{,}5, \quad a_2 = 4{,}5, \quad a_3 = 9{,}5,$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 4{,}5, \quad y_1^0 = -0{,}5, \quad y_2^0 = 0, \quad y_3^0 = 0{,}5.$$

Точность реконструкции определялась следующей мерой уклонения восстановленной функции $u_c(x, y)$ от точной $u(x, y)$:

$$\Delta = \left(\sum_{ij} (u_c(x_i, y_j) - u(x_i, y_j))^2 \Big/ \sum_{ij} u^2(x_i, y_j) \right)^{1/2},$$

здесь (x_i, y_j) — узлы прямоугольной сетки размером 40×40. В таблице приведены значения Δ в зависимости от дисперсии шума σ^2. Использовалась параллельная схема сканирования. NS показывает результаты восстановления описанным алгоритмом для 10 направлений с 20 отсчетами в каждом (с общим числом измерений 200). NSP содержит результаты, полученные при использовании дополнительной априорной информации о неотрицательности искомой функции. В этом случае было сделано две итерации метода последовательного проектирования, в результате уровень артефактов снизился и значительно повысилась устойчивость по отношению к шуму. RICSS2 содержит результаты, приведенные в [9]. В этом случае применялся алгоритм RICSS2, основанный на использовании регуляризированного варианта аналитического обращения преобразования Радона для исходных данных, полученных по 12 направлениям с 101 отсчетом на каждом направлении.

σ^2/Δ	NS	NSP	RICSS2
0	0,072	0,055	0,04
0,05	0,118	0,066	0,07
0,10	0,204	0,089	0,10

Параметр α во всех случаях выбирался равным 0,0001, что обеспечивало погрешность аппроксимации трансцендентных интегралов порядка 0,01 %. Время решения задач было меньше четырех минут при использовании персонального компьютера IBM PC 386/387.

В заключение автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук В. К. Горбунову за советы и замечания, высказанные при подготовке данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
2. Лоран Ж.-П. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
3. Горбунов В. К. Метод нормальной сплайн-коллокации // ЖВМ и МФ. 1989. 29, № 2.
4. Имамов А., Джурабаев М. Сплайны в пространствах С. Л. Соболева. Деп. в УзНИИНТИ 24.07.89, № 880.
5. Лионс Ж.-Л., Маджинес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. Т. 1.
6. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. 68. P. 337.
7. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
8. Уилкинсон Д., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976.
9. Мельникова Т. С., Пикалов В. В. Исследование параметров электрической дуги с помощью плазменного томографа. Новосибирск, 1983. (Препр. /СО АН СССР, ИТ; 99-83).
10. Горбунов В. К., Кохановский И. И. Итеративная регуляризация на основе сингулярного анализа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и кибернетика. 1995. № 1.

Поступила в редакцию 13 октября 1994 г.