РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1995

УДК 621.3

А. Е. Эпов

(Новосибирск)

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СГЛАЖИВАЮЩИХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Подробно проанализированы импульсные, амплитудо- и фазочастотные характеристики фильтров, построенных с использованием простого рекурсивного соотношения $Y(i) = \gamma X(i) + (1 - \gamma)Y(i - 1)$, и показаны пути повышения их эффективности при низкочастотной и высокочастотной фильтрации дискретных сигналов. Получены аналитические выражения для импульсных, амплитудо- и фазочастотных характеристик таких фильтров.

Введение. Рекурсивная фильтрация сигналов имеет важное преимущество перед нерекурсивной — независимость вычислительных затрат от эффективной апертуры фильтра в каузальном направлении. Особое значение приобретает рекурсивная фильтрация для обработки изображений в режиме реального времени, когда необходимо обрабатывать миллионы пикселов в секунду. В [1] сделана попытка описания приемлемых для обработки изображений на нижнем уровне простых рекурсивных алгоритмов сглаживания и дифференцирования сигналов. В нашей статье близкий результат получен с иных, на наш взгляд, более прозрачных позиций и показаны пути расширения возможностей использования этих алгоритмов.

Сглаживающие рекурсивные фильтры во временной и частотной областях. Рассмотрим простейшее одномерное рекурсивное соотношение, являющееся сглаживающим оператором (фильтром) первого порядка:

$$Y(i) = \gamma X(i) + (1 - \gamma)Y(i - 1), \tag{1}$$

где $X(i)$ и $Y(i)$ — входные и выходные данные; γ — коэффициент, определяющий импульсную и частотную характеристики фильтра, причем $0 < \gamma < 1$. Отметим, что это же соотношение в принципе лежит в основе рассмотренных в [1] алгоритмов.

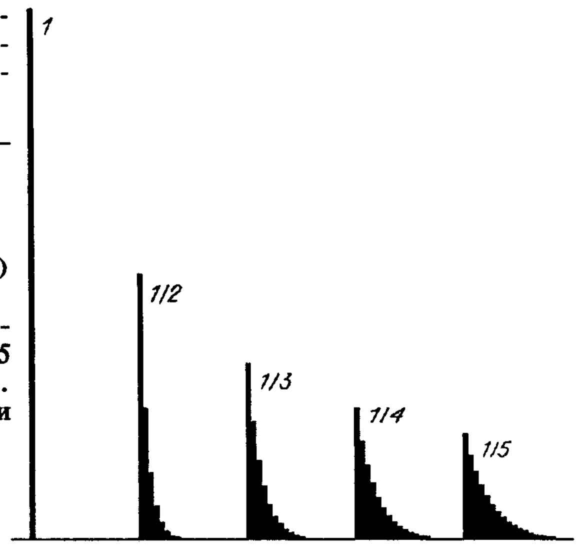
Импульсная характеристика дискретной системы определяется как ее отклик на импульс единичной длительности и амплитуды (импульс «1» на рис. 1), описывается выражением

$$S(n) = \gamma(1 - \gamma)^n, \tag{2}$$

где $n = 0, 1, 2, ..., +\infty$ — номер выходного отсчета системы, и приведена на рис. 1 для различных значений γ (характеристики «1/2»—«1/5» пронормированы на амплитуду единичного импульса «1»). Соответствующие амплитудочастотные (АЧХ) и фазочастотные характеристики фильтра (1) приведены на рис. 2, *a*, *b* и определяются выражениями, которые получаются с помощью фурье-преобразования соотношения (1) или бесконечной свертки выражения (2) с соответствующими фазовыми множителями:

$$\widetilde{H}(f) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + (1 - \gamma)^2 - 2(1 - \gamma)\cos(2\pi f)}}, \tag{3}$$

Рис. 1. Импульс единичной длительности и амплитуды (1); импульсные характеристики одностороннего сглаживающего рекурсивного фильтра с коэффициентом γ, равным: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5



$$\tilde{\varphi}(f) = -\text{arctg}\,\frac{(1-\gamma)\sin(2\pi f)}{1-(1-\gamma)\cos(2\pi f)}, \quad (4)$$

где нормированная частота f изменяется в пределах от 0 до 0,5 ($f = 0{,}5$ — частота Найквиста).

Из (3) и (4) можно найти минимум на АЧХ фильтра (1)

$$H_{\min} = \frac{\gamma}{2-\gamma} \quad \text{при } f = 0{,}5$$

и максимальный поворот фазы

$$\varphi_{\max} = -\arcsin(1-\gamma) \quad \text{при } 2\pi f = \arccos(1-\gamma).$$

Импульсные характеристики при повторной фильтрации представлены на рис. 3.

Повторная фильтрация в одном направлении может быть описана следующим выражением:

$$S_m(n) = \gamma^m \frac{(1-\gamma)^n}{(m-1)!} \prod_{j=1}^{m-1} (n+j), \quad (5)$$

где m — количество повторных фильтраций.

АЧХ этих каскадных фильтров является просто соответствующей степенью выражения (3), а фазовая характеристика описывается произведением (4) на m.

Вообще говоря, одна повторная фильтрация менее эффективна в смысле подавления средних частот и размера поворота фазы, чем одинарная фильтрация с меньшим относительно повторной значением γ. На рис. 4 приведены амплитудо- и фазочастотные характеристики одинарного ($\gamma_1 = 0{,}2$) и каскадного ($m = 4$) фильтров, причем коэффициент γ_4 каскадного фильтра выбирался из условия равенства минимумов на АЧХ фильтров:

$$\left(\frac{\gamma_4}{2-\gamma_4}\right)^4 = \frac{\gamma_1}{2-\gamma_1}$$

(в данном случае $\gamma_4 = 0{,}73$). Поэтому на практике, видимо, лучше стремиться к использованию одинарных фильтров.

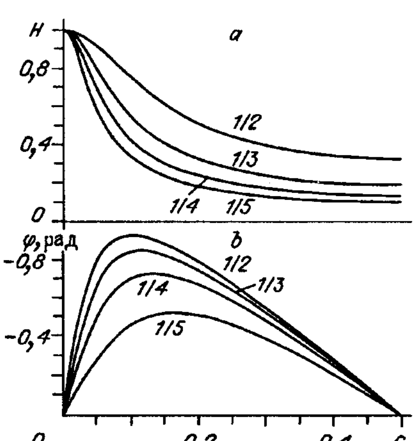


Рис. 2. Амплитудочастотная (*а*) и фазочастотная (*б*) характеристики одностороннего сглаживающего рекурсивного фильтра (1) при коэффициенте γ, равном: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5

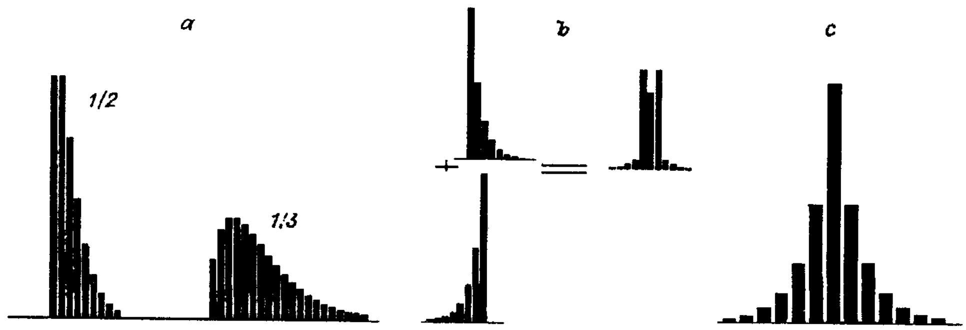


Рис. 3. Импульсные характеристики: *a* — одностороннего сглаживающего фильтра при повторной фильтрации (тип $[(+n)^2]$) при γ, равном 1/2 и 1/3; *b* — двустороннего сглаживающего фильтра типа $[(+n)+(k-n)], \gamma = 1/2, k = -2$; *c* — $[(+n) \times (-n)], \gamma = 1/2$

Симметризация соотношения (1) за счет двусторонней фильтрации может быть выполнена двумя путями: 1) фильтрацией исходного изображения в обратном (антикаузальном) направлении ($n < 0$) и сложением с результатом фильтрации в прямом направлении (обозначим такую операцию как $[(+n) + (-n)]$, при этом берется, естественно, полусумма) или 2) повторной фильтрацией в обратном направлении (обозначим как $[(+n) \times (-n)]$, в такой нотации повторная фильтрация в одном направлении обозначается как $[(+n)^m]$).

Первый способ позволяет смещать импульсные характеристики друг относительно друга на любое целое число отсчетов k (тип $[(+n) + (k-n)]$), что приводит к качественно различным частотным характеристикам:

$$H(f) = \widetilde{H}^2(f)\{\cos(\pi k f) - (1-\gamma)\cos[\pi(k-2)f]\}/\gamma \tag{6}$$

или, что то же самое,

$$H(f) = \widetilde{H}(f)\cos[\pi k f + \widetilde{\varphi}(f)],$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — раздвижка импульсных характеристик, а $\widetilde{H}(f)$ и $\widetilde{\varphi}(f)$ определены в (2) и (3). На рис. 3, *b* приведен пример эффективной импульсной характеристики, полученной при $k = -2$ и $\gamma = 0{,}5$, а на рис. 5 показаны АЧХ, полученные при $k = 0, \pm 1, \pm 2$ и $\gamma = 0{,}5$.

Из соотношения (6) следует, что при нечетных k будет наблюдаться полное подавление сигнала на частоте $f = 0{,}5$. С другой стороны, при $|k| \geq 2$ описываемые фильтры являются режекторными на частоты, определяемые соотношением

$$\pi k f + \widetilde{\varphi}(f) = \pi/2$$

или в развернутом виде

$$\mathrm{tg}(\pi k f) = \frac{\mathrm{cosec}(2\pi f)}{1-\gamma} - \mathrm{ctg}(2\pi f).$$

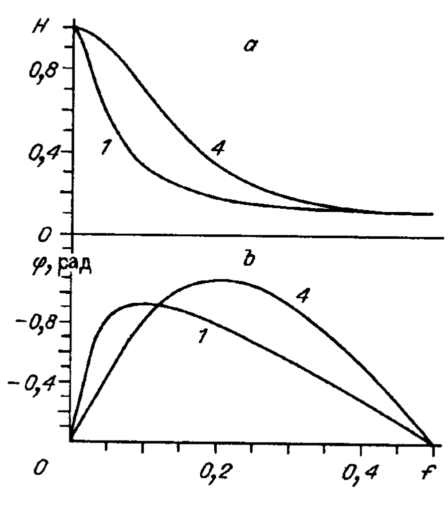
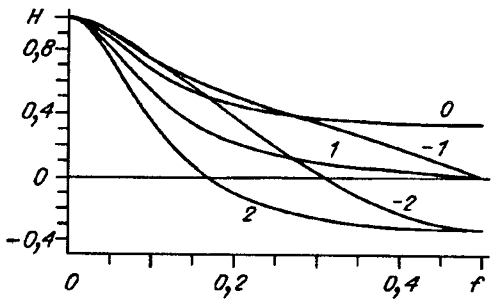


Рис. 4. Амплитудочастотные (*a*) и фазочастотные (*b*) характеристики однокаскадного (кривые *1*, $\gamma_1 = 0{,}2$) и четырехкаскадного (кривые *4*, $\gamma_4 = 0{,}73$) односторонних рекурсивных фильтров

Рис. 5. АЧХ двустороннего сглаживающего рекурсивного фильтра типа $[(+n) + (k-n)]$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2$ и $\gamma = 1/2$



В зависимости от значения коэффициента k частотная характеристика (6) может иметь разное число нулей.

Второй способ симметризации импульсной характеристики приводит просто к квадрату частотной и импульсной характеристикам (см. рис. 3, *с*):

$$S(n) = \frac{\gamma}{2-\gamma}(1-\gamma)^{|n|}, \qquad -\infty < n < +\infty. \tag{7}$$

Это соотношение соответствует выражению (18) в [1] с точностью до замены γ на $(1 - e^{-\alpha})$.

Очевидно, что после симметризации фазовый сдвиг в обоих случаях равен нулю.

Степень подавления (уменьшения дисперсии или мощности) белого шума после фильтрации определяется выражением

$$R = \sum S^2(n)$$

и для описанных фильтров

$$R = \frac{\gamma}{2-\gamma} \quad \text{для (2)},$$

$$R = \frac{\gamma}{(2-\gamma)^3}(2 - 2\gamma + \gamma^2) \quad \text{для (7) и (5)},$$

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\gamma}{2(2-\gamma)}, && k > 0 \\ R &= \frac{\gamma}{2(2-\gamma)}(1 + 2\gamma - \gamma^2), && k = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{для (6)}.$$

Таким образом, повторное применение основного рекурсивного соотношения (1) позволяет получить довольно развитые средства для низкочастотной фильтрации сигналов. При соответствующем выборе коэффициентов γ, k и m можно эффективно проводить согласованную фильтрацию.

Дифференциальные рекурсивные фильтры во временной и частотной областях. *Аналог первой производной*, как известно, должен иметь, с одной стороны, антисимметричную импульсную характеристику, а с другой — $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n) = 0$. Используя результаты односторонней рекурсив-

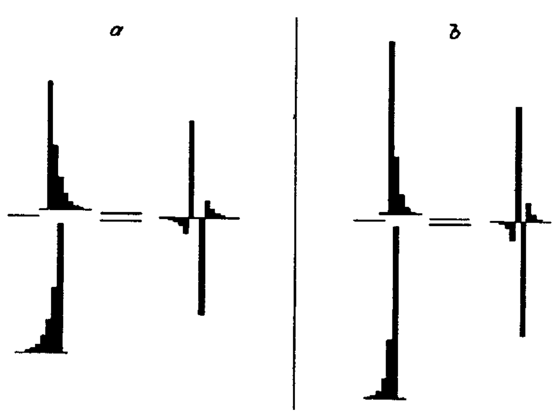


Рис. 6. Импульсные характеристики дифференциального рекурсивного фильтра $[(+n) - (k-n)]$ при: *а* — $\gamma = 1/2$, $k = -2$; *b* — $\gamma = 2/3$, $k = -1$

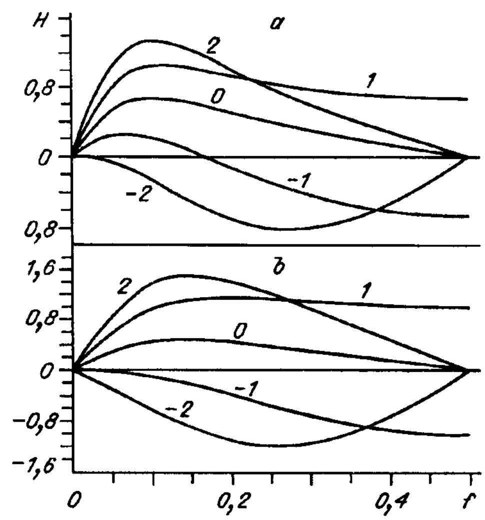


Рис. 7. АЧХ дифференциальных фильтров при $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$ и γ, равном: 1/2 (*a*), 2/3 (*b*)

ной фильтрации, можно составить первую производную по следующему правилу: $[(+n) - (-n)]$, причем, как и в случае со сглаживающими фильтрами, импульсные характеристики могут быть раздвинуты друг относительно друга ($[(+n) - (k - n)]$, см. рис. 6). Аналогично первая производная может быть аппроксимирована и выражениями типа (5). Частотные характеристики таких фильтров определяются следующими выражениями:

$$H(f) = 2\widetilde{H}^2(f)\left\{\sin(\pi k f) - (1 - \gamma)\sin[\pi(k - 2)f]\right\}/\gamma \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$H(f) = 2\widetilde{H}(f)\sin[\pi k f - \widetilde{\varphi}(f)]$$

при использовании сглаживающих односторонних фильтров 1-го порядка и

$$H(f) = 4\widetilde{H}^2(f)\sin(\pi k f - 2\widetilde{\varphi})$$

для фильтров 2-го порядка.

На рис. 7 продемонстрировано большое разнообразие возможностей рекурсивной высокочастотной фильтрации.

Интересным свойством выражения (8) является возможность получения кубической передаточной характеристики в области низких частот при выполнении соотношения

$$\gamma = \frac{2}{2 - k} \quad (0 < \gamma < 1 \Rightarrow k < 0) \tag{9}$$

(кривая «*–2*» на рис. 7, *a* и кривая «*–1*» на рис. 7, *b*). Аналогичный результат можно получить и для фильтров более высоких порядков. При нечетных значениях коэффициента k фильтр будет высокочастотным, а при четных — полосовым. При γ и k, не связанных соотношением (9), но отрицательных k, можно также получить комбинацию высокочастотного и режекторного фильтров на частоты, связанные соотношением

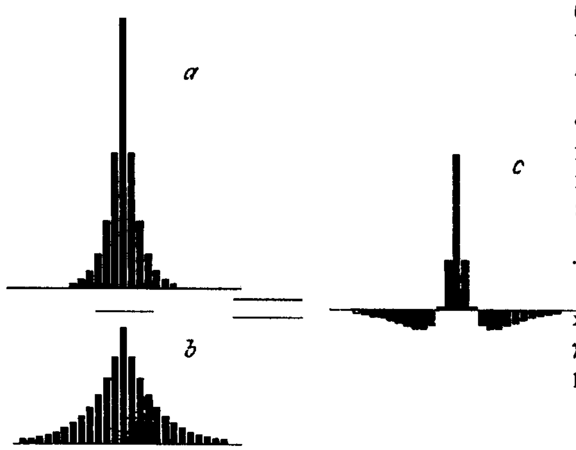


Рис. 8. Пример получения импульсной характеристики лапласиана (*c*) при $\gamma_1 = 1/2$ и $\gamma_2 = 1/4$ из импульсных характеристик двусторонних сглаживающих фильтров (*a*, *b*) типа $[(+n) \times \times (-n)]$

$$\pi kf = \tilde{\varphi}(f) + \pi l,$$

где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Аналог второй производной (лапласиан), имеющей так же, как и в случае первой производной, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n) = 0$, но при этом симметричную импульсную характеристику, можно получить, используя результаты двусторонней рекурсивной фильтрации (сглаживание либо $[(+n) + (-n)]$, либо $[(+n) \times (-n)]$), по следующему правилу: изображение, сглаженное с одним коэффициентом γ, вычитается из изображения, сглаженного с другим коэффициентом γ. Один из коэффициентов γ может просто равняться 1, тогда получение аналога 2-й производной сводится к вычитанию сглаженного изображения из исходного. На рис. 8, *c* приведена импульсная характеристика лапласиана с коэффициентами $\gamma_1 = 0{,}5$ и $\gamma_2 = 0{,}25$, полученная из импульсных характеристик сглаживающих фильтров типа $[(+n) \times (-n)]$. АЧХ таких фильтров представляет собой разность амплитудочастотных характеристик соответствующих двусторонних сглаживающих фильтров.

Заключение. Приведены импульсные, амплитудо- и фазочастотные характеристики сглаживающих и дифференцирующих фильтров, основанных на использовании простого рекурсивного соотношения (1). Показано, что двусторонняя рекурсивная фильтрация дает новые богатые возможности выбора амплитудочастотной характеристики фильтров в целях проведения согласованной фильтрации дискретных сигналов. Приведены аналитические выражения, описывающие импульсные и частотные характеристики рассмотренных рекурсивных фильтров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deriche R. Fast algorithms for low-level vision // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intel. 1990. 12, N 1. P. 78.

Поступила в редакцию 24 апреля 1994 г.