

УДК 535.42 : 534.8

С. Н. Шарангович

(Томск)

**СИЛЬНОЕ АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ
В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ПОЛЕ
С НЕОДНОРОДНЫМ ФАЗОВЫМ ФРОНТОМ
В ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ***

Представлена спектральная модель брэгговской дифракции квазимонохроматических световых пучков на ультразвуковом поле с неоднородным фазовым фронтом в оптически активной среде. Получены аналитические решения векторно-матричных уравнений связанных волн относительно частотно-угловых спектров дифракционного поля. Определены матричные передаточные функции сильного акустооптического взаимодействия. Приведены результаты численных расчетов.

Введение. Исследованию сильного акустооптического взаимодействия (АОВ) световых и акустических волн с неоднородными пространственными распределениями амплитуд в кристаллических средах в последнее время уделяется значительное внимание. Это обусловлено тем, что в практических приложениях АО-методов для управления параметрами светового излучения, обработки изображений и сигналов при создании АО-элементов (дефлекторов, модуляторов, фильтров) и совершенствовании их характеристик требуются адекватные реальным физическим ситуациям математические модели АОВ. Для изотропных и анизотропных негиротропных сред дифракция световых пучков на неоднородных звуковых полях при сильном АОВ исследовалась для случаев фазово-профилированных звуковых полей [1, 4], амплитудно-апподизированных звуковых пучков с колоколообразной [2, 3] и хэмминговой [5, 6] огибающими, а также при одновременно неоднородных амплитудном и фазовом распределениях акустического поля [2, 3, 7]. Для кристаллов, обладающих оптической активностью, теоретические модели дифракции световых пучков на пространственно неоднородных звуковых волнах разработаны только для слабого АОВ [8, 10, 11]. При больших эффективностях дифракции исследования АОВ в гиротропных средах, выполненные в [9, 12—14], ограничены однородной моделью акустического поля и плосковолновым приближением для световых волн [12, 13], а также специальными геометриями взаимодействия, связанными с экстремальными значениями эффективных фотопругих постоянных [9].

В данной работе построена спектральная модель брэгговской дифракции квазимонохроматических световых пучков в гиротропных кубических кристаллах с учетом неоднородности фазового фронта акустического поля. В основу модели положены аналитические решения дифференциальных матричных уравнений связанных волн относительно частотно-угловых спектров световых пучков. Полученные решения и передаточные функции АОВ определяют пространственно-временные и частотно-угловые распределения световых полей и

* Работа выполнена при поддержке гранта № NY4000 Международного научного фонда.

х поляризационных параметров на выходе и в дальней зоне области взаимодействия для произвольных геометрий и эффективностей дифракции.

Уравнения связанных волн. Распространение и взаимодействие квазиомохроматических световых пучков в акустически возмущенном, оптически ктивном, кубическом кристалле будем описывать исходя из уравнений Максвелла и уравнений следующего вида [15]:

$$\text{rotE} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \text{rotH} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \alpha \text{rotE}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \alpha \text{rotH}, \quad (2)$$

де c — скорость света в вакууме; $\hat{\epsilon}$ — тензор относительной диэлектрической проницаемости; α — скалярный параметр оптической активности.

Из (1), (2) следует уравнение для расчета напряженности электрического оля \mathbf{E} при акустооптическом взаимодействии

$$\text{rotrotE} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\hat{\epsilon} \mathbf{E} + 2\alpha \text{rotE}], \quad (3)$$

где $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_0 + \Delta\hat{\epsilon}_\alpha$; $\hat{\epsilon}_0 = n^2 \hat{I}$ — тензор относительной диэлектрической проницаемости невозмущенной среды; n — показатель преломления; \hat{I} — единичный тензор второго ранга; $\Delta\hat{\epsilon}_\alpha$ — возмущение диэлектрической проницаемости, вызванное акустическим полем.

Рассмотрим двумерное брэгговское АОВ в плоскости XZ , геометрия которого представлена на рис. 1. Область АОВ ограничена плоскостями $\Gamma \cdot \mathbf{r} = 0$ и $\Gamma \cdot \mathbf{r} = L$ (Γ — нормаль к плоскости, L — толщина возмущенного слоя), определяющими границы монохроматического, слаборасходящегося звукового пучка $U(\mathbf{r}, t)$ с полем векторов смещения

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [u U_m(\mathbf{r}) \exp[i(\Omega_0 t - \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})] + \text{к.с.}], \quad (4)$$

где u , $U_m(\mathbf{r})$, Ω_0 , $\mathbf{K}_0 = \mathbf{q}\Omega_0/v$ — единичный вектор смещения, распределение комплексной амплитуды в плоскости XZ , частота и волновой вектор; v — скорость; \mathbf{q} — единичный вектор волновой нормали, составляющий в плоскости АОВ вследствие акустической анизотропии угол γ с групповой нормалью \mathbf{q}_g ; $\mathbf{r} = a_x x + a_z z$ — радиус-вектор в системе координат XZ , единичные орты которой a_x , a_z совмещены соответственно с векторами Γ и \mathbf{q}_g .

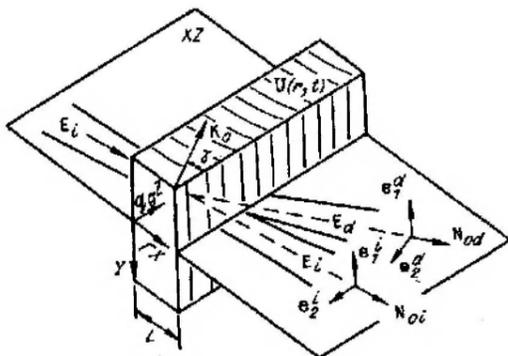


Рис. 1. Пространственная геометрия брэгговского АОВ в оптически активной среде, показывающая ориентацию световых E_i , E_d и акустического U пучков относительно координатной системы XYZ и векторных базисов e_1^k, e_2^k, N_{0k} ($k = i, d$).

Волновой вектор \mathbf{K}_0 и волновые нормали N_{0i}, N_{0d} лежат в плоскости дифракции XZ

Допустим, что в пределах области АОВ распределение $U_m(\mathbf{r})$ остается постоянным по координате z и имеет однородное амплитудное ($|U_m(\mathbf{r})|$) и неоднородное фазовое ($\arg U_m(\mathbf{r})$) распределения по координате x :

$$U_m(\mathbf{r}) = \begin{cases} |U_m(\mathbf{r})| \exp[i \arg U_m(\mathbf{r})] & \text{при } 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases} \quad (5)$$

где $|U_m(\mathbf{r})| = U_0$ — амплитуда. Фазовое распределение $\arg U_m(\mathbf{r}) = \psi(x)$ представим первыми тремя членами разложения в ряд Тейлора:

$$\psi(x) = \psi_0 + \frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2\psi}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2, \quad (6)$$

где первый член $\psi_0 = \psi(x=0)$ характеризует начальную фазу, второй — поворот, а третий — кривизну акустического волнового фронта.

Возмущение диэлектрической проницаемости кристалла $\Delta\hat{\epsilon}_a$ в поле акустического пучка (4) $U(\mathbf{r}, t)$ запишем в линейном приближении:

$$\Delta\hat{\epsilon}_a = \frac{1}{2} [\Delta\hat{\epsilon} U_m(\mathbf{r}) \exp\{i(\Omega_0 t - \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})\} + \text{к.с.}]. \quad (7)$$

Здесь $\Delta\hat{\epsilon}$ — возмущение $\hat{\epsilon}_0$ в поле U единичной амплитуды $U_0 = 1$:

$$\Delta\hat{\epsilon} = n^4 \left[\hat{P}^E + (\hat{r} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \hat{e}) / (\mathbf{q} \cdot \hat{e}^u \cdot \mathbf{q}) \right] : \mathbf{uq}, \quad (8)$$

где \hat{P}^E , \hat{r} , \hat{e} , \hat{e}^u — тензоры упругооптических, электрооптических, пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

В брэгговском режиме АОВ световое поле в области взаимодействия будем искать в виде суммы падающего E_i и дифрагированного E_d пучков. Каждый пучок представим частотно-угловым спектром (ЧУС) и разложим по собственным циркулярно-поляризованным волнам оптически активной среды:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_j^{i,d} \sum_k^{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} e_k^j E_j^k(\mathbf{r}, \mathbf{k}_j^k, \omega_j) \exp[i(\omega_j t - \mathbf{k}_j^k \cdot \mathbf{r})] dk_j^k d\omega_j + \text{к.с.} \right\}, \quad (9)$$

где $E_j^k(\mathbf{r}, \mathbf{k}_j^k, \omega_j)$ — медленноменяющиеся в области АОВ амплитуды плосковолновых компонент ЧУС с волновыми векторами $\mathbf{k}_j^k = N_j k_j n_k$, циркулярными векторами поляризации e_k^j и частотами ω_j ; частоты ω_i и ω_d связаны законом сохранения энергии $\omega_d = \omega_i + \Omega_0$; $k_j = \omega_j/c$; k_j^x — тангенциальная составляющая вектора \mathbf{k}_j^k в плоскости XZ , перпендикулярная волновой нормали N_0 центральной компоненты ЧУС E_j^k .

Волновые векторы \mathbf{k}_j^k и векторы поляризации e_k^j в (9) находятся как решения невозмущенного волнового уравнения

$$\left[\mathbf{k}_j^k \mathbf{k}_j^k - \mathbf{k}_j^k \cdot \mathbf{k}_j^k + n^2 \hat{\Gamma} \frac{\omega_j^2}{c^2} - i2\alpha \frac{\omega_j^2}{c^2} \mathbf{k}_j^{kx} \right] e_j^k = 0 \quad (j = i, d), \quad (10)$$

к которому сводится уравнение (3) при $\Delta\hat{\epsilon} = 0$, где \mathbf{k}_j^{kx} — антисимметричный тензор, дуальный вектору \mathbf{k}_j^k [15]. Для заданного направления волновой нормали N_0 и частоты ω_j решениями (10) являются значения показателей преломления $n_{\pm} = n \pm \gamma_0$, где $\gamma_0 = k_j \alpha$ — параметр гирации, и циркулярные векторы поляризации ($j = i, d$)

$$e_+^j = (e_1^j + ie_2^j)/\sqrt{2}, \quad e_-^j = (e_1^j - ie_2^j)/\sqrt{2}, \quad (11)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\mathbf{e}_\pm^j \cdot \mathbf{e}_\pm^j = 1, \quad \mathbf{e}_\pm^j \cdot \mathbf{e}_\mp^j = 0, \quad [\mathbf{e}_\pm^j \times \mathbf{N}_{0j}] = \pm i\mathbf{e}_\pm^j, \quad [\mathbf{e}_1^j \times \mathbf{e}_2^j] = \mathbf{N}_{0j},$$

где $\mathbf{e}_1^j, \mathbf{e}_2^j$ — единичные, взаимно ортогональные векторы, произвольно ориентированные в плоскостях поляризации $\mathbf{N}_{0j} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ пучков E_j и показанные на рис. 1.

Учитывая, что достаточной для практики точностью взаимодействующие световые пучки E_i и E_d можно считать слабо расходящимися, векторы \mathbf{e}_\pm^j и \mathbf{e}_\mp^j будем считать не зависящими от ориентации \mathbf{N}_j в пределах ЧУС и перпендикулярными нормалью \mathbf{N}_{0j} . В этом случае каждый из взаимодействующих пучков в соответствии с (9), (11) описывается в собственном ортонормированном, циркулярном базисе $(\mathbf{e}_\pm^j, \mathbf{e}_\mp^j, \mathbf{N}_{0j})$ двумя (право и лево) циркулярно поляризованными пучками. Амплитуды этих пучков в общем случае изменяются в области АОВ различным образом, являются связанными и находятся как решения уравнения (3) для возмущенной среды. В результате состояние поляризации пучков E_i и E_d в (9) становится неоднородным при АОВ как в пространстве, так и во времени и трансформируется в области взаимодействия.

Акустически возмущенная часть диэлектрической проницаемости $\Delta\hat{\epsilon}_\alpha$ согласно (7), (8) является анизотропным тензором. Поэтому для упрощения дальнейших вычислений на основе уравнения (3) совместим направления векторов $\mathbf{e}_\pm^j, \mathbf{e}_\mp^j$ в (11) с осями тензора $\Delta\hat{\epsilon}$, спроектированного на плоскости поляризации $\mathbf{N}_{0j} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ пучков E_j , т. е. с направлениями собственных векторов планальных тензоров $\Delta\hat{\epsilon}_j$ [8, 9, 14]:

$$\Delta\hat{\epsilon}_j = (\hat{I} - \mathbf{N}_{0j}\mathbf{N}_{0j})\Delta\hat{\epsilon}(\hat{I} - \mathbf{N}_{0m}\mathbf{N}_{0m})\Delta\hat{\epsilon}(\hat{I} - \mathbf{N}_{0j}\mathbf{N}_{0j}) \quad (j \neq m), \quad (12)$$

где $j, m = i, d$.

Подставляя выражения для взаимодействующих пучков (7), (9) в волновое уравнение (3), учитывая (10), (11) и пренебрегая пространственными производными второго порядка (вследствие использования метода медленноменяющихся амплитуд), а также выполняя фурье-преобразование по пространственной координате z и времени t , получим систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно амплитуд E_j^k плоско-волновых компонент ЧУС $E_j^k(\mathbf{r}, \mathbf{k}_j^k, \omega_j)$:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_i \frac{d}{dx} E_i^+ &= -iU_m^*(x) \{C_n^+ E_d^+ + C_a^+ E_d^- \exp[i\varphi x]\} \exp[i\Delta Kx], \\ \cos\varphi_i \frac{d}{dx} E_i^- &= -iU_m^*(x) \{C_n^- E_d^- + C_a^- E_d^+ \exp[-i\varphi x]\} \exp[i\Delta Kx], \\ \cos\varphi_d \frac{d}{dx} E_d^+ &= -iU_m(x) \{C_n^+ E_i^+ + C_a^+ E_i^- \exp[i\varphi x]\} \exp[-i\Delta Kx], \\ \cos\varphi_d \frac{d}{dx} E_d^- &= -iU_m(x) \{C_n^- E_i^- + C_a^- E_i^+ \exp[-i\varphi x]\} \exp[-i\Delta Kx]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь учтено, что в рассматриваемой геометрии АОВ, показанной на рис. 2, $\text{grad}E_{i,d}^\pm = \Gamma dE_{i,d}^\pm/dx$; $\varphi_i = \gamma - \theta_i$ и $\varphi_d = \gamma + \theta_i$ — углы между волновыми нормальными $\mathbf{N}_{0i}, \mathbf{N}_{0d}$ и вектором Γ ; θ_i — угол падения пучка E_i ; индекс k обозначает комплексно-сопряженные величины. Отметим, что при получении уравнений (13) использовалось следующее приближение. Строго говоря, при дифракции право- и лево-циркулярно поляризованных компонент ЧУС $E_i(\mathbf{k}_i, \omega_i)$, распространяющихся в направлении нормали \mathbf{N}_i , как показано на рис. 3, образуются четыре дифрагированные компоненты ЧУС $E_d(x, \mathbf{k}_d, \omega_d)$ с различающимися направлениями волновых нормалей. В [3] было показано, что угловой сектор $\Delta\theta \approx (2\gamma_0/n)\sin\theta_i$, образованный нормальными \mathbf{N}_{0d} (см. рис. 3), является малой

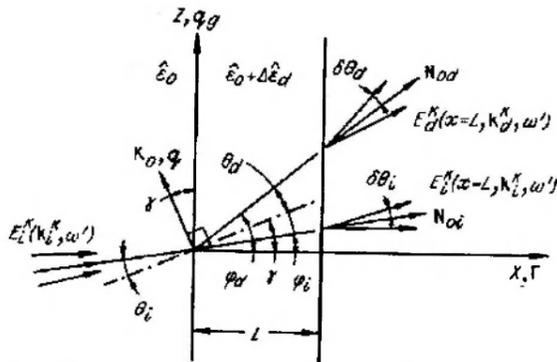


Рис. 2. Направления распространения акустического пучка U и плосковолновых компонент ЧУС взаимодействующих световых пучков E_i, E_d в плоскости дифракции XZ и соответствующие им углы

величиной $\Delta\theta \approx 10^{-4}\theta_i$. В результате волновые нормали этих волн можно считать совпадающими с нормалью N_d , направление которой показано штриховой линией на рис. 3 и связано с N_i .

Параметры C_n^{\pm} и C_a^{\pm} в (13) являются коэффициентами АО-связи, соответственно характеризующими нормальный и аномальный дифракционные процессы, и имеют следующий вид в используемых поляризационных базисах, построенных на собственных векторах тензоров $\Delta\hat{\epsilon}_j$ (12):

$$C_n^{\pm} = \frac{k_0}{8} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(n \pm 2\gamma_0)}, \quad C_a^{\pm} = \frac{k_0}{8} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(n \pm 2\gamma_0)}, \quad (14)$$

где коэффициенты λ_1 и λ_2 выражаются через собственные числа тензоров $\Delta\hat{\epsilon}_j$ [8, 9]:

$$\lambda_1 = (e_1^{i,d} \cdot \Delta\hat{\epsilon}_{i,d} \cdot e_1^{i,d})^{0.5}, \quad \lambda_2 = (e_2^{i,d} \cdot \Delta\hat{\epsilon}_{i,d} \cdot e_2^{i,d})^{0.5}. \quad (15)$$

Данный метод определения коэффициентов АО-связи может служить основой для отыскания оптимальных геометрий АОВ в гиротропных кубических кристаллах с точки зрения достижения максимальной дифракционной эффективности нормальных или аномальных дифракционных процессов [9].

Параметр ρ в (13) является фазовой расстройкой АОВ, обусловленной циркулярным двупреломлением, а ΔK — фазовой расстройкой, вызванной отклонением угла падения θ_i от угла Брэгга $\theta_B = \lambda_0 f_0 / 2nv$ и частоты ультразвука f от f_0 и зависящей от углов $\delta\theta_j = \hat{k}_j / \hat{k}_0 n$ и частот $\omega' = \omega_j - \omega_0$, которые

характеризуют направление и частоту плосковолновых компонент взаимодействующих ЧУС $E_j^k(r, k_j^k, \omega_j)$. При этом связь углов $\delta\theta_i, \delta\theta_d$ данных компонент с $\omega', \delta f$ и соответствующие им величины

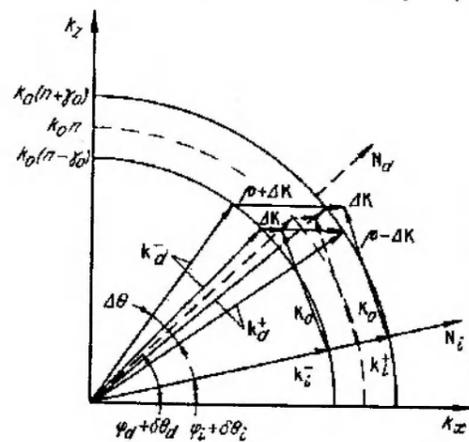


Рис. 3. Векторные диаграммы нормальных и аномальных дифракционных процессов в оптически активной среде при акустооптическом взаимодействии циркулярно поляризованных плосковолновых компонент ЧУС падающего пучка E_i , распространяющихся в одном направлении, заданном нормалью N_i

фазовых расстройек ΔK и ρ даются формулами

$$\begin{aligned} \delta\theta_d &= A\omega' + B\delta\theta_i + E\delta f; & \Delta K &= C\omega' + D\delta\theta_i + F\delta f + \Delta K_0; \\ \rho &= \rho_0 + G\omega', \end{aligned} \quad (16)$$

или

$$\begin{aligned} \delta\theta_i &= \frac{1}{B}\delta\theta_d - \frac{A}{B}\omega' - \frac{E}{B}\delta f; \\ \Delta K &= \left(C - \frac{AD}{B}\right)\omega' + \frac{D}{B}\delta\theta_d + \left(F - \frac{ED}{B}\right)\delta f + \Delta K_0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta K_0 = D(\theta_i - \theta_B)$; $\rho_0 = 2\gamma_0 k_0 \cos\gamma \cos\theta_B$; A, B, C, D, E, F, G — коэффици-

$$C = \frac{-2\sin^2\theta_B}{\cos(\gamma + \theta_B)}(n + \omega_0\xi), \quad D = \frac{-\sin 2\theta_B}{\cos(\gamma + \theta_B)} \frac{n\omega_0}{c}, \quad (18)$$

$$E = \frac{\lambda_0 \cos\gamma}{n \cos(\gamma + \theta_B)}, \quad F = \frac{2\gamma \sin\theta_B}{v \cos(\gamma + \theta_B)}, \quad G = 2\cos\gamma \cos\theta_B (\gamma_0 + \omega_0\xi)/c,$$

где $\omega_0 = \omega_0$; $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega_0/c$; коэффициенты $\xi = dn/d\omega$, $\zeta = d\gamma_0/d\omega$, характеризующие дисперсию показателя преломления и оптической активности, а также значения n и γ_0 берутся при частоте ω_0 .

Граничные условия для решения уравнений (13) задаются на входной границе области АОВ $x = 0$ и при однородном состоянии поляризации по ЧУС $E_i^{\pm}(x = 0, \mathbf{k}_i^{\pm}, \omega')$ падающего светового поля $E_i(\mathbf{r}, t)$ имеют вид

$$E_i^{\pm}(x = 0, \mathbf{k}_i^{\pm}, \omega') = E^{\pm}(\mathbf{k}_i^{\pm}, \omega'), \quad E_d(x = 0, \mathbf{k}_d^{\pm}, \omega') = 0, \quad (19)$$

где $E^{\pm}(\mathbf{k}_i^{\pm}, \omega') = E_i(\mathbf{k}_i^{\pm}, \omega')(1 \pm p)\exp[\mp i\kappa]/\sqrt{2}$; $E_i(\mathbf{k}_i^{\pm}, \omega')$, κ, p — ЧУС, начальные значения азимута и эллиптичности падающего светового пучка E_i на входной границе области АОВ.

Аналитические решения. Для нахождения общего решения системы (13) введем двухкомпонентные векторные функции A_i и A_d , компоненты которых связаны с амплитудами плосковолновых составляющих E_i^{\pm} и E_d^{\pm} ЧУС пучков E_i, E_d :

$$A_i = \begin{vmatrix} A_i^- \\ A_i^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_i^- \exp[+i(\rho - \Delta K)x/2] \\ E_i^+ \exp[-i(\rho + \Delta K)x/2] \end{vmatrix} \left[\frac{\cos\varphi_i}{\cos\varphi_d} \right]^{0.5}, \quad (20)$$

$$A_d = \begin{vmatrix} A_d^- \\ A_d^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_d^- \exp[+i(\rho + \Delta K)x/2] \\ E_d^+ \exp[-i(\rho - \Delta K)x/2] \end{vmatrix}, \quad (21)$$

и воспользуемся векторно-матричными методами [16].

Подставляя (20), (21) в (13), приходим к двум связанным векторно-матричным уравнениям:

$$\frac{dA_i(x)}{dx} = U^*(x)\hat{C}A_d(x) + \hat{P}_iA_i(x), \quad (22)$$

$$\frac{dA_d(x)}{dx} = U(x)\hat{C}A_i(x) + \hat{P}_dA_d(x).$$

Здесь введены матрицы \hat{C} , \hat{P}_i , \hat{P}_d (индекс \wedge обозначает матрицы):

$$\hat{C} = \frac{-iU_0}{(\cos\varphi_d \cos\varphi_i)^{0.5}} \begin{pmatrix} C_n^- & C_a^- \\ C_n^+ & C_a^+ \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_i = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} \Delta K - \rho & 0 \\ 0 & \Delta K + \rho \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_d = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Delta K + \rho & 0 \\ 0 & \Delta K - \rho \end{pmatrix} \quad (23)$$

— и использовано обозначение

$$U(x) = \exp[i(\psi_0 + \psi'x + 0,5\psi''x^2)], \quad (24)$$

где $\psi' = \frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=0}$, $\psi'' = \frac{d^2\psi}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

Система (22) может быть сведена к одному матричному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 A_d}{dx^2} + \left[\frac{-d \ln U}{dx} + \hat{M} \right] \frac{d A_d}{dx} + \left[\frac{d \ln U}{dx} \hat{P}_d + \hat{N} \right] A_d = 0, \quad (25)$$

где

$$\hat{N} = -\hat{C}\hat{C} + \hat{C}\hat{P}_i\hat{C}^{-1}\hat{P}_d, \quad \hat{M} = -\hat{C}\hat{P}_i\hat{C}^{-1} - \hat{P}_d. \quad (26)$$

Граничные условия для (25) следуют из (19), (21) и (22):

$$A_d(x=0) = 0, \quad \frac{d A_d}{dx} \Big|_{x=0} = \exp[i\psi_0] \left[\frac{\cos\varphi_i}{\cos\varphi_d} \right]^{0.5} \hat{C} E(k_i, \omega'), \quad (27)$$

где $E(k_i, \omega') = [E^-(k_i^-, \omega'), E^+(k_i^+, \omega')]^T$; T — транспонирование.

Введением обозначений

$$\hat{D} = (\hat{c}^2 - \hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{a}^2\hat{d})/\hat{a}^3, \quad \hat{B} = (\hat{a}\hat{b} - 2\hat{c})/\hat{a}^2,$$

$$\hat{a} = -i\psi'', \quad \hat{b} = -i\psi' + \hat{M}, \quad \hat{c} = i\psi''\hat{P}_d, \quad \hat{d} = i\psi'\hat{P}_d + \hat{N}, \quad (28)$$

и заменой переменных

$$A_d(x) = \exp\left[-x \frac{\hat{c}}{\hat{a}}\right] \Phi(y), \quad y = -a \frac{1}{2} (x + \hat{B})^2$$

уравнение (25) приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению [17]. Поэтому общее решение уравнения (25) представляется в виде

$$A_d = \exp\left[-\frac{\hat{c}}{\hat{a}} x\right] \left\{ \Phi\left(\frac{\hat{D}}{2}, \frac{1}{2}; -(x + \hat{B})^2 \frac{\hat{a}}{2}\right) C_1 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{-(\hat{a}/2)} (x + \hat{B}) \Phi\left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -(x + \hat{B})^2 \frac{\hat{a}}{2}\right) C_2 \right\}. \quad (29)$$

Здесь $C_1(k_d, \omega')$, $C_2(k_d, \omega')$ — вектор-функции, не зависящие от x и определяемые из граничных условий (27); вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\hat{D}, m; \hat{Z})$, рассматриваемая как функция от двух матриц, определяется рядом [17]

$$\Phi(\hat{D}, m; \hat{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{D})_n}{n!(m)_n} (\hat{Z})^n, \quad (30)$$

где $(\hat{D})_0 = 1$, $(\hat{D})_n = \hat{D}(\hat{D} + 1) \dots (\hat{D} + n - 1)$.

Общее решение системы (22) относительно функции A_i находится в результате подстановки (29) во второе уравнение (22):

$$A_i = U^{-1} \hat{C}^{-1} \exp \left[-x \frac{\hat{c}}{a} \right] \left\{ -a(x + \hat{B}) \hat{D} \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + 1, \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) C_1 + \right. \\ \left. + \sqrt{-(a/2)} \left[\Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - a(x + \hat{B})^2 \left(\frac{\hat{D} + 1}{3} \right) \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) \right] C_2 \right\}. \quad (31)$$

Аналитические решения (29), (31) с учетом (20), (21), (9) полностью определяют распределения векторных амплитуд по ЧУС и состояние поляризации световых пучков E_i, E_d на выходной границе, а также в ближней и дальней зонах области АОВ при произвольных эффективностях, геометриях дифракции с учетом фазовых расстройек, обусловленных гиротропией кристалла, и одновременного протекания связанных между собой двух нормальных и двух аномальных дифракционных процессов.

Передаточные функции. Общие решения (29), (31) позволяют определить частотно-угловые передаточные функции АОВ в оптически активных кристаллах, которые используются в практических расчетах акустооптических систем. Найдем передаточные функции, характеризующие преобразование ЧУС $E(k, \omega')$ падающего светового пучка в соответствующие величины прошедшего E_i и дифрагированного E_d пучков. Для этого представим векторные амплитуды спектральных компонент ЧУС в следующем виде:

$$E_i(x = L, k, \omega') = \hat{H}_i(x = L, k, \omega') E(k, \omega'), \quad (32)$$

$$E_d(x = L, k_d, \omega') = \hat{H}_d(x = L, k_d, \omega') E(k_i, \omega'), \quad (33)$$

где $\hat{H}_j(x = L, k_j, \omega')$ ($j = i, d$) являются матричными передаточными функциями акустически возмущенного слоя оптически активного кристалла толщиной L , а направления векторов k_d и k_i в (33) связаны условием (17).

Отметим, что передаточные функции $\hat{H}_j(x, k_j, \omega')$ являются матричными функциями и позволяют описать преобразование поляризационных параметров пучков E_j при АОВ. Для этого определим поляризационные передаточные функции $\Xi_j(x, k_j, \omega')$, выраженные через матричные элементы H_{km}^j ($k, m = 1, 2$) передаточных функций \hat{H}_j [7]:

$$\Xi_j(x, k_j, \omega') = (H_{22}^j \Xi_0 + H_{21}^j) / (H_{12}^j \Xi_0 + H_{11}^j) \quad (j = i, d), \quad (34)$$

где $\Xi_j = E_j^+ / E_j^-$ и $\Xi_0 = E^+ / E^-$ — отношения комплексных амплитуд циркулярных составляющих векторных ЧУС $E_j(x, k_j, \omega')$ и $E(k, \omega')$, которые, как известно [15], полностью определяют состояние поляризации (эллиптичность $p_j = (|\Xi_j| - 1) / (|\Xi_j| + 1)$ и угол поворота κ_j эллипса поляризации относительно вектора e_1^j : $\kappa_j = -0,5 \arg(\Xi_j)$).

Кроме того, передаточные функции $\hat{H}_j(x, k_j, \omega')$ определяют соответствующие матричные импульсные характеристики АОВ $\hat{h}_j(x, z, t)$, которые находятся в результате двумерного фурье-преобразования

$$\hat{h}_j(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_j(x, k_j, \omega') \exp [i(\omega_0 + \omega') - (k_j \cdot q_g)z] dk_j d\omega' \quad (35)$$

и используются для описания амплитудных и поляризационных распределений световых пучков $E_i(r, t), E_d(r, t)$ в пространственно-временной области.

Таким образом, использование формализма матричных передаточных функций $\hat{H}_j(x, k_j, \omega')$ позволяет полностью описать преобразование частотно-угловых, пространственно-временных и поляризационных распределений взаимодействующих световых пучков при АУВ в оптически активных кристаллах. В рассматриваемом случае функции $\hat{H}_j(x, k_j, \omega')$ находятся из общих решений (29), (31), граничных условий (27) и соотношений (20), (21), (23), (26), (28). В результате передаточная функция для дифрагированного светового пучка E_d принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_d(x, k_d, \omega') = & \hat{A}_d \exp[i\psi_0] \left[\frac{\cos\varphi_i}{\cos\varphi_d} \right]^{0.5} \left[(x + \hat{B}) \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) - \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) \Phi_1^{-1} \hat{B} \Phi_2 \right] \times \\ & \times \left[\Phi_1 \left\{ \Phi_2 - a \hat{B}^2 \left(\frac{\hat{D}+1}{3} \right) \Phi_4 \right\} + a \Phi_1 \hat{B} \hat{D} \Phi_3 \Phi_1^{-1} \hat{B} \Phi_2 \right]^{-1} \Phi_1 \hat{C}. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогично находится передаточная функция для прошедшего светового пучка E_i :

$$\begin{aligned} \hat{H}_i(x, k_i, \omega') = & \hat{A}_i U^{-1} \hat{C}^{-1} \exp[i\psi_0 + i\Delta K x] \times \\ & \times \left[a(x + \hat{B}) \hat{D} \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + 1, \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) \Phi_1^{-1} \hat{B} \Phi_2 + \right. \\ & \left. + \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) - a(x + \hat{B})^2 \left(\frac{\hat{D}+1}{3} \right) \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; -\frac{a}{2} (x + \hat{B})^2 \right) \right] \times \\ & \times \left[\Phi_1 \left\{ \Phi_3 - a \hat{B}^2 \left(\frac{\hat{D}+1}{3} \right) \Phi_4 \right\} + a \Phi_1 \hat{B} \hat{D} \Phi_3 \Phi_1^{-1} \hat{B} \Phi_2 \right]^{-1} \Phi_1 \hat{C}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь \hat{A}_i, \hat{A}_d — круговые матрицы, описывающие вращение плоскости поляризации световых волн в невозмущенной, оптически активной среде толщиной x :

$$\hat{A}_j = \begin{pmatrix} \exp[ik_0 \gamma_0 x / \cos\varphi_j] & 0 \\ 0 & \exp[-ik_0 \gamma_0 x / \cos\varphi_j] \end{pmatrix} \exp[-ik_0 n x / \cos\varphi_j] \quad (j = i, d),$$

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — матричные функции, определенные соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{a}{2} \hat{B}^2 \right), \quad \Phi_2 = \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} \hat{B}^2 \right), \\ \Phi_3 = \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + 1, \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} \hat{B}^2 \right), \quad \Phi_4 = \Phi \left(\frac{\hat{D}}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; -\frac{a}{2} \hat{B}^2 \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где матрицы $\hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ в общем случае даются формулами (23), (26), (28). С достаточной для практики точностью можно считать $n \gg \gamma_0$. Тогда матрицы $\hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ с учетом (14) запишутся как

$$\begin{aligned} \hat{B} = \frac{\psi'}{\psi''} - \frac{\Delta K}{\psi''} + \frac{\rho C_a}{\psi''(C_n^2 - C_a^2)} \begin{pmatrix} C_a - C_n \\ C_n - C_a \end{pmatrix}, \\ \hat{D} = \frac{iU_0^2}{\psi' \cos\varphi_d \cos\varphi_i} \begin{pmatrix} C_n^2 + C_a^2 & 2C_n C_a \\ 2C_n C_a & C_n^2 + C_a^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \frac{-iU_0}{(\cos\varphi_d \cos\varphi_i)^{0.5}} \begin{pmatrix} C_n & C_a \\ C_a & C_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $C_n = \frac{L_0 L_1 + 1}{2\pi}$, $C_a = \frac{L_0 L_1 - 1}{2\pi}$. Вырожденные гипергеометрические функции Φ от двух матричных параметров \hat{B} и \hat{D} , входящие в выражения (36)–(38), вычислены в приложении А. В приложении Б дано представление параметров в (36)–(38), (А3)–(А5) через параметры, обычно используемые в практических расчетах АО-устройств, и введены нормализованные параметры, необходимые для последующего анализа.

Анализ и численное моделирование. Зависимость передаточных функций (36), (37) от геометрии АОВ, параметров взаимодействующих пучков имеет довольно сложный функциональный вид. Рассмотрим некоторые частные, но практически интересные случаи АОВ в ультразвуковом поле U с искривленным волновым фронтом, описываемым произвольной кривой второго порядка. В параксиальном приближении распределение $U_m(x)$ в этом случае может быть представлено [1, 4] как

$$U_m(x) = U_0 \exp \left[i \frac{K_0 L^2}{2R \cos \gamma} \left(\bar{x} - \frac{1}{2} \right)^2 \right], \quad (40)$$

где $\bar{x} = x/L$; R — радиус кривизны волнового фронта. Сравнение (40) с (6), (24) дает значения параметров, используемых в (36), (37):

$$\psi_0 = \frac{K_0 L^2}{8R \cos \gamma}, \quad \psi' = \frac{-K_0 L}{2R \cos \gamma}, \quad \psi'' = \frac{K_0}{R \cos \gamma}. \quad (41)$$

Тогда для геометрий АОВ, характеризуемых значениями $C_a = 0$ и $C_n \neq 0$ (режим нормального АОВ), передаточная функция \hat{H}_d (36) преобразуется к виду, записанному в нормализованных параметрах (Б5):

$$\hat{H}_d(\bar{x}, \Delta \bar{K}, \bar{b}, \bar{R}, \bar{\rho}) = \hat{A}_d \exp [i \psi_0] \left[\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_d} \right]^{0.5} \begin{pmatrix} R_-^n & 0 \\ 0 & R_+^n \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\pm}^n = & -i \bar{b} \left[(\bar{x} + B_{\pm}) \Phi \left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}; i \bar{R}^2 B_{\pm}^2 \right) \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; i \bar{R}^2 (\bar{x} + B_{\pm})^2 \right) - \right. \\ & \left. - B_{\pm} \Phi \left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}; i \bar{R}^2 (\bar{x} + B_{\pm})^2 \right) \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; i \bar{R}^2 \bar{b}_{\pm}^2 \right) \right] \times \\ & \times \left[\Phi \left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}; i \bar{R}^2 B_{\pm}^2 \right) \left\{ \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; i \bar{R}^2 B_{\pm}^2 \right) + i 2 \bar{R}^2 B_{\pm}^2 \left(\frac{D+1}{3} \right) \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; i \bar{R}^2 B_{\pm}^2 \right) \right\} + \right. \\ & \left. + \bar{b}_{\pm}^2 B_{\pm}^2 \Phi \left(\frac{D}{2} + 1, \frac{3}{2}; i \bar{R}^2 B_{\pm}^2 \right) \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; i \bar{R}^2 B_{\pm}^2 \right) \right]^{-1}, \quad (43) \end{aligned}$$

и $D = i \bar{b}^2 / 2 \bar{R}^2$; $B_{\pm} = -\Delta \bar{K} / 2 \bar{R}^2$; $\bar{b} = b_n$. Анализ (42), (43) показывает, что компоненты R_-^n и R_+^n одинаковы и центрированы относительно $\Delta \bar{K} = 0$. Поэтому при любых эффективностях дифракции поляризационная структура ифрагированного пучка E_d является постоянной и отличается от поляризации пучка E_s только поворотом эллипса поляризации на угол $\kappa_d = \kappa + \bar{\rho}$. В условиях, когда $\bar{R} < 1,5$, влияние кривизны акустического волнового фронта незначительно и (42) описывает АОВ в поле однородного пучка U [9]. При $\bar{R} > 1,5$ изменение модуля передаточной функции, характеризующей дифракционную эффективность компонент ЧУС пучка E_d и введенной как $\mathcal{H}_d = \bar{E}^+ \hat{H}_d \hat{H}_d^+ \bar{E}$, где $\bar{E} = [e_d^-, e_d^+]^T / 2$, «+» — эрмитово-сопряженные величины, представлено на рис. 4 зависимостями $H_d(\bar{b}, \bar{R})$ при $\Delta \bar{K} = 0$ и $H_d(\Delta \bar{K}, \bar{b})$ при

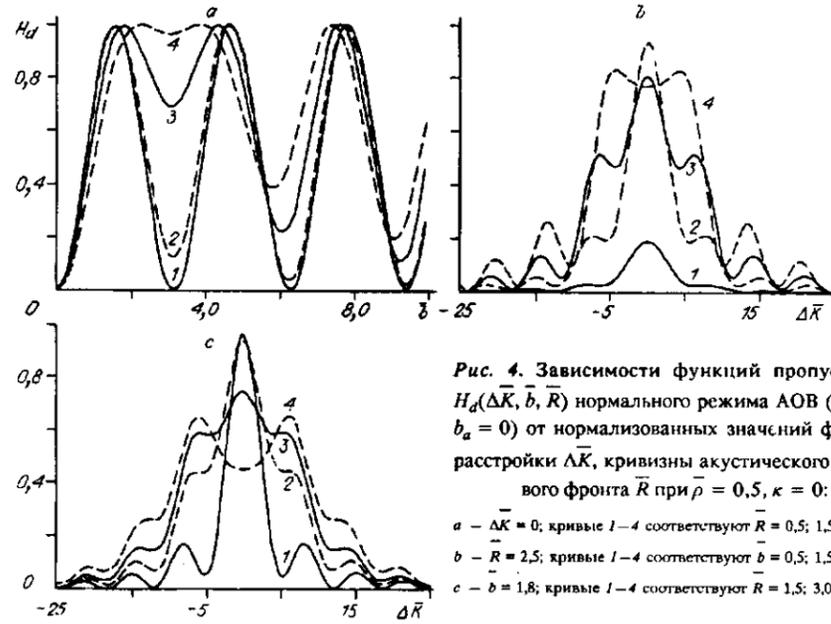


Рис. 4. Зависимости функций пропускания $H_d(\Delta\bar{K}, \bar{b}, \bar{R})$ нормального режима АОВ ($\bar{b} = \bar{b}_n$, $b_a = 0$) от нормализованных значений фазовой расстройки $\Delta\bar{K}$, кривизны акустического волнового фронта \bar{R} при $\bar{\rho} = 0,5$, $\kappa = 0$:
 а — $\Delta\bar{K} = 0$; кривые 1–4 соответствуют $\bar{R} = 0,5; 1,5; 2,5; 3,0$;
 б — $\bar{R} = 2,5$; кривые 1–4 соответствуют $\bar{b} = 0,5; 1,5; 2,5; 3,5$;
 в — $\bar{b} = 1,8$; кривые 1–4 соответствуют $\bar{R} = 1,5; 3,0; 3,5; 4,5$

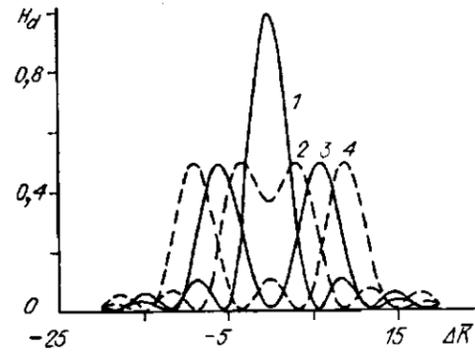
$\bar{R} = 3$. Из рис. 4, а видно, что влияние фазовой неоднородности на дифракционную эффективность особенно сильно проявляется в области сильной АО-связи ($\bar{b} \approx 1,5 + 6$) и заключается в значительном возрастании эффективности и образовании участка зависимости $H_d(\bar{b}) \approx 1$ со слабой чувствительностью к изменению АО-связи [2, 7]. Характерно, что в этом случае наблюдается существенное расширение полосы пропускания $2\Delta\bar{K}_{0,5}$ функции $H_d(\Delta\bar{K})$ (рис. 4, б) при сохранении высокой дифракционной эффективности. При этом произведение $2\Delta\bar{K}_{0,5}H_{d\max}$, на практике используемое для оптимизации параметров АОВ, в пределах изменения $1,4 < \bar{b} < 4$, $2 < \bar{R} < 3,5$ может превышать в 3–10 раз соответствующее значение, рассчитанное для $\bar{R} < 1,5$.

В режиме аномального АОВ, когда $C_n = 0$, $C_a \neq 0$ [8], из (36) следует:

$$\hat{H}_d(\bar{x}, \Delta\bar{K}, \bar{b}, \bar{R}, \bar{\rho}) = \hat{A}_d \exp[i\psi_0] \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_d \end{bmatrix}^{0,5} \begin{pmatrix} 0 & R_-^a \\ R_+^a & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где R_+^a, R_-^a определяются формулой (43) при $B_z = -(\Delta\bar{K} \mp 2\bar{\rho})/2\bar{R}^2$ и $\bar{b} = \bar{b}_a$. Видно, что компоненты передаточной функции, описываемые членами R_-^a и R_+^a , смещены относительно друг друга на величину $\Delta\bar{K} = 4\bar{\rho}$. Вследствие этого, как показано на рис. 5 для $\bar{R} < 1,5$, результирующая характеристика $H_d(\Delta\bar{K})$ при $\bar{\rho} > \Delta\bar{K}_{0,5}$ описывается двухполосной функцией. Если $\bar{R} > 1,5$, то с учетом кривизны акустического волнового фронта необходимым условием ее возникновения является $\bar{\rho} > \pi/2$ и $\bar{R} < [2\bar{\rho}]^{0,5}$. При $\bar{R} > [2\bar{\rho}]^{0,5}$ происходит перекрытие функций $R_-^a(\Delta\bar{K})$ и $R_+^a(\Delta\bar{K})$, которое может быть вызвано как уширением углового спектра акустического пучка U , так и расширением функций R_-^a, R_+^a при больших значениях параметра АО-связи \bar{b} , как показано на рис. 6, а. Именно в этом случае наблюдаются наиболее сильные изменения в поляризационной передаточной функции $\Xi_d(\Delta\bar{K}) = H_{21}(\Delta\bar{K})/H_{12}(\Delta\bar{K})\Xi_0$, что приводит к сильной неоднородности поляризации по ЧУС пучка E_d . На рис. 6, б, в

Рис. 5. Зависимости функции пропускания $H_d(\Delta\bar{K})$ аномального режима АОВ ($\bar{b} = b_a$, $b_n = 0$) от нормализованного параметра оптической активности $\bar{\rho}$ при $\bar{b} = 1,5$ и $\bar{R} = 0,5$ для линейно-поляризованного падающего пучка $E_i(x=0)$ с азимутом $\kappa = 0$ (кривые 1—4 соответствуют $\bar{\rho} = 0,1; 1,5; 3,0; 4,5$)



показано изменение распределений азимута $\kappa_d(\Delta\bar{K})$ и эллиптичности $p_d(\Delta\bar{K})$ в условиях сильной АО-связи, иллюстрирующее данный режим.

В общем случае, когда используется геометрия дифракции с $C_a \neq 0$ и $C_n \neq 0$, качественный анализ передаточной функции \hat{H}_d может быть проведен в условиях сильной гиротропии, когда $\bar{\rho} \gg 1$. Данный режим реализуется при больших значениях параметра гирации γ_0 или длины взаимодействия L . В этом случае передаточная функция \hat{H}_d приближенно описывается выражением

$$\hat{H}_d(\bar{x}, \Delta\bar{K}, \bar{b}, \bar{R}, \bar{\rho}) = \hat{A}_d \exp[i\psi_0] \left[\frac{\cos\varphi_i}{\cos\varphi_d} \right]^{0,5} \begin{pmatrix} R_+^n & R_-^n \\ R_+^a & R_-^a \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где R_+^n и R_-^n — соответствующие компоненты в матрицах (42) и (44). В данном приближении функции $R_+^n(\Delta\bar{K})$, $R_-^n(\Delta\bar{K})$ и $R_-^a(\Delta\bar{K})$ не перекрываются и результирующая передаточная функция H_d представляется трехполосной функцией пропускания, максимумы которой находятся при $\Delta\bar{K} = 0$ и $\Delta\bar{K} = \pm 2\bar{\rho}$. Динамика изменения каждой из них с ростом АО-связи \bar{b} , параметра кривизны акустического волнового фронта \bar{R} аналогична представленной на рис. 4. Следует заметить, что отличительной особенностью функции H_d в гиротропной среде является возможность поляризационного управления ее формой и положением. Например, трехполосная функция пропускания

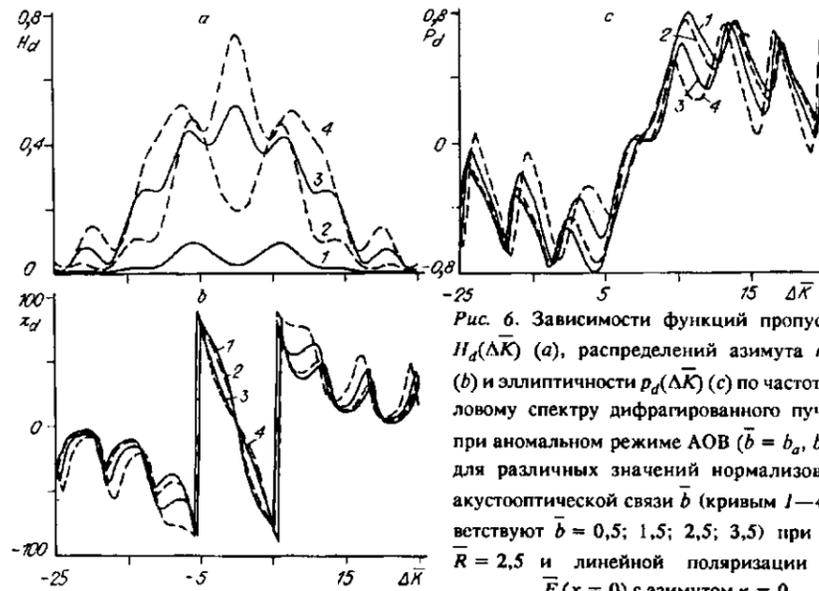


Рис. 6. Зависимости функций пропускания $H_d(\Delta\bar{K})$ (а), распределений азимута $\kappa_d(\Delta\bar{K})$ (б) и эллиптичности $p_d(\Delta\bar{K})$ (с) по частотно-угловому спектру дифрагированного пучка E_d при аномальном режиме АОВ ($\bar{b} = b_a$, $b_n = 0$) для различных значений нормализованной акустооптической связи \bar{b} (кривым 1—4 соответствуют $\bar{b} = 0,5; 1,5; 2,5; 3,5$) при $\bar{\rho} = 3$, $\bar{R} = 2,5$ и линейной поляризации пучка $E_i(x=0)$ с азимутом $\kappa = 0$

реализуется при линейной поляризации падающего пучка E_i . При круговой поляризации пучка E_i реализуется двухполосная функция пропускания H_d с максимумами в $\Delta\bar{K} = 0$, $\Delta\bar{K} = 2\bar{\rho}$, если используется право-циркулярно поляризованная волна, и в $\Delta\bar{K} = 0$, $\Delta\bar{K} = -2\bar{\rho}$ для лево-циркулярно поляризованной волны. Причем в первом случае поляризация центрального максимума в ЧУС пучка E_d близка к линейной, а в боковых — к круговой. Во втором и третьем случаях поляризация центрального максимума совпадает с поляризацией падающего пучка, а в боковых является ортогональной.

Заключение. Представленная в данной работе спектральная модель акустооптического взаимодействия позволяет определить распределения амплитуд и поляризационных параметров по частотно-угловым спектрам дифракционного поля в условиях произвольной эффективности дифракции с учетом неоднородности акустического фазового фронта. Полученные передаточные функции АОВ совместно с результатами [18] позволяют также описать преобразование корреляционных и поляризационных параметров частично поляризованных световых пучков в условиях сильного АОВ и могут быть использованы при расчетах АО-устройств, в состав которых входят АО-элементы на основе оптически активных кристаллов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Функции от матриц. В этом приложении определяются аналитические выражения для вырожденной гипергеометрической функции Φ от двух матриц, которая используется в выражениях (36), (37) для передаточных функций \hat{H}_i , \hat{H}_d .

Рассмотрим $\Phi\left(\frac{\hat{D}}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{a}{2}(x + \hat{B})^2\right)$. Матрицы \hat{D} и \hat{B} приведены в (39). Используя представление Φ в виде ряда (30), выделим отдельно в каждом члене ряда функции от матриц \hat{B} и \hat{D} :

$$\Phi\left(\frac{\hat{D}}{2}, m; -\frac{a}{2}(x + \hat{B})^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{1n}(\hat{D})F_{2n}(\hat{B}), \quad (A1)$$

где $F_{10}(\hat{D}) = 1$; $F_{1n}(\hat{D}) = (\hat{D}/2)_n / (m)_n$; $F_{2n}(\hat{B}) = [-a(x + \hat{B})^2/2]^n / n!$, $m = 1/2$. Считая, что функции от матриц $F_{1n}(\hat{D})$ и $F_{2n}(\hat{B})$ определены на спектрах входящих в них матриц, и вычисляя интерполяционные многочлены матриц \hat{D} , \hat{B} стандартным методом [16], можно записать

$$F_{1n}(\hat{D}) = \frac{\mu_2 F_{1n}(\mu_1) - \mu_1 F_{1n}(\mu_2)}{\mu_2 - \mu_1} \hat{I} + \frac{F_{1n}(\mu_2) - F_{1n}(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} \hat{D}, \quad (A2)$$

где μ_1 , μ_2 — собственные значения матрицы \hat{D} , которые находятся из уравнения $|\hat{D} - \mu\hat{I}| = 0$. Аналогично определяется функция $F_{2n}(\hat{B})$.

Перемножая матрицы F_{1n} и F_{2n} и подставляя результат в (A1), применим операцию суммирования к каждому элементу результирующей матрицы. Полученные ряды в матричных элементах дают по определению (30) вырожденные гипергеометрические функции вида $\Phi\left(\frac{D_i}{2}, m; -\frac{a}{2}(x + B_j)^2\right)$, где D_i , B_j — собственные значения матриц \hat{D} , \hat{B} . Окончательный результат вычислений может быть представлен в виде

$$\Phi\left(\frac{\hat{D}}{2}, m; -\frac{a}{2}(x + \hat{B})^2\right) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}, \quad (A3)$$

где

$$\Phi_{11} = t_1\Phi^{11} + t_2\Phi^{12} + t_3\Phi^{21} + t_4\Phi^{22}, \quad \Phi_{12} = t_2\Phi^{11} + t_1\Phi^{12} - t_4\Phi^{21} - t_3\Phi^{22},$$

$$\Phi_{21} = t_1\Phi^{11} + t_2\Phi^{12} - t_3\Phi^{21} - t_4\Phi^{22}, \quad \Phi_{22} = t_2\Phi^{11} + t_1\Phi^{12} + t_4\Phi^{21} + t_3\Phi^{22}.$$

Здесь введены обозначения параметров

$$t_1 = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{C_a + C_n}{|C_a - C_n|} \right)^{0.5} \right], \quad t_2 = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{C_a + C_n}{|C_a - C_n|} \right)^{0.5} \right], \quad (A4)$$

$$t_3 = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{|C_a - C_n|}{C_a + C_n} \right)^{0.5} \right], \quad t_4 = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{|C_a - C_n|}{C_a + C_n} \right)^{0.5} \right]$$

и функций

$$\Phi^j = \Phi \left(\frac{D_i}{2}, m; -\frac{a}{2} (x + B_j)^2 \right) \quad (i, j = 1, 2),$$

где

$$D_i = \frac{iU_0^2 \mu_i}{\psi'' \cos \varphi_a \cos \varphi_i}, \quad \mu_i = \begin{cases} (C_n + C_a)^2 & \text{при } i = 1, \\ (C_n - C_a)^2 & \text{при } i = 2, \end{cases} \quad (A5)$$

$$B_j = \frac{\psi'}{\psi''} - \frac{\Delta K}{\psi''} + \frac{\rho C_a \mu_j}{\psi'' (C_n^2 - C_a^2)}, \quad \mu_j = \begin{cases} |C_a^2 - C_n^2|^{0.5} & \text{при } j = 1, \\ -|C_a^2 - C_n^2|^{0.5} & \text{при } j = 2. \end{cases}$$

Аналогично можно представить все функции Φ от матриц в (36)–(38).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Физические и нормализованные параметры. В этом приложении приведены соотношения для практического расчета формальных параметров, входящих в (36), (37) и (A3), через физические — акустическую мощность P_a и коэффициенты акустооптического качества оптически активного кристалла [8]. Также введены нормализованные параметры, через которые можно выразить все величины в (36), (37). Расчет с данными параметрами позволяет получить наиболее общие результаты о поведении передаточных функций, не привлекая данных о физических свойствах среды АОВ.

Используем известное соотношение между акустической мощностью P_a и амплитудой деформаций U_0 :

$$U_0 = [2P_a / \rho_m v^3 H L']^{0.5}, \quad (B1)$$

где ρ_m — плотность кристалла; H — высота акустического пучка; $L' = L / \cos \gamma$, а также выражения для коэффициентов акустооптического качества M_2 , введенные в [8]:

$$M_2^{a, n} = \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right]^2 \frac{\cos \gamma}{n^2 \rho_m v^3 (\cos^2 \theta_B - \sin^2 \gamma)}, \quad (B2)$$

где знак « \leftrightarrow » соответствует коэффициенту M_2^a для аномального АОВ, а знак « \rightarrow » — коэффициенту M_2^n для нормального АОВ. Тогда матрицы \hat{C} , \hat{D} в (39) и параметр D_i в (A5) приводятся к виду

$$\hat{C} = -\frac{i}{L} \begin{pmatrix} b_n & b_a \\ b_a & b_n \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \frac{i}{\psi'' L^2} \begin{pmatrix} b_n^2 + b_a^2 & 2b_n b_a \\ 2b_n b_a & b_n^2 + b_a^2 \end{pmatrix}, \quad (B3)$$

$$D_i = \frac{\mu_i}{\psi'' L^2}, \quad \mu_i = \begin{cases} (b_n + b_a)^2 & \text{при } i = 1, \\ (b_n - b_a)^2 & \text{при } i = 2. \end{cases} \quad (\text{Б4})$$

В выражениях (А4), (А5) и (39) для параметров B_j , $t_1 \div t_4$ и матрицы \hat{B} величины C_n , C_a следует заменить соответственно на b_n , b_a , где $b_{n,a} = [M_2^{a,n} P_a L / 2H]^{0.5} \pi / \lambda_0$.

В качестве нормализованных параметров используются следующие: $\bar{b} = \max\{|b_n|; |b_a|\}$ — нормализованный параметр акустооптической связи; $\Delta\bar{K} = [\Delta K - \psi'] L$ — нормализованный уровень фазовой расстройки; $\bar{\rho} = k_0 \gamma_0 L$ — нормализованный параметр оптической активности; $\bar{R} = [\psi''/2]^{0.5} L$ — нормализованный параметр кривизны акустического волнового фронта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задорин А. С., Шарангович С. Н. Сильное акустооптическое взаимодействие в поле фокусированной звуковой волны // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. 29, № 7.
2. Шарангович С. Н. Дифракция света на ультразвуковом поле с неоднородным амплитудно-фазовым распределением в анизотропной среде // ЖТФ. 1991. 61, № 1.
3. Кушнарев И. Н., Шарангович С. Н. Сильное акустооптическое взаимодействие в поле ультразвукового импульса с неоднородной амплитудной и квазилинейной частотной модуляцией // Радиотехника и электроника. 1992. 37, № 7.
4. Pieper R., Korpel A. Eikonal theory acousto-optic interaction with curved wave front of sound // JOSA A. 1985. 2. P. 1435.
5. Pieper R., Korpel A., Hereman W. Extension of the acousto-optic Bragg regime through the Hamming apodization of the sound field // JOSA A. 1986. 3, N 10. P. 1608.
6. Pieper R., Poon T. C. System characterization of apodized acousto-optic Bragg cells // JOSA A. 1990. 7, N 9. P. 1751.
7. Задорин А. С., Шарангович С. Н. Акустооптическое взаимодействие в поле затухающего ультразвукового пучка с искривленным волновым фронтом в анизотропной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. 33, № 2.
8. Задорин А. С., Шарангович С. Н. Акустооптическое взаимодействие волновых пучков в кристаллах с циркулярным дупреломлением // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. 29, № 10.
9. Задорин А. С., Шарангович С. Н. Дифракция света на звуковом пучке в кристаллах с циркулярным дупреломлением при экстремальной акустооптической связи // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. 31, № 2.
10. Fachss F., Hesselink L. Holographic beam coupling in anisotropic photorefractive media // JOSA A. 1987. 4, N 2. P. 325.
11. Задорин А. С., Шарангович С. Н. Особенности модуляции света звуком в оптически активной среде // Автометрия. 1989. № 5.
12. Seymour R. S. Acousto-optic Bragg diffraction in anisotropic optically active media // Appl. Opt. 1990. 29, N 6. P. 822.
13. Белый В. Н., Кулак Г. В. Дифракция света на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах в режиме Брэгга // Журн. прикл. спектр. 1991. 54, № 5.
14. Шарангович С. Н. Дифракция световых пучков на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах // Автометрия. 1994. № 1.
15. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1976.
16. Гантмахер Ф. А. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973.
18. Задорин А. С., Шарангович С. Н. Преобразование корреляционных и поляризационных параметров световых пучков при акустооптическом взаимодействии в гиротропной среде // Оптика и спектроскопия. 1991. 70, № 1.

Поступила в редакцию 9 декабря 1993 г.