№ 1 1995

УДК 519.2 : 681.3

**А. Л. Резник**

*(Новосибирск)*

# О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАЗНОСТИ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК ПРИ СЛУЧАЙНОМ РАЗБИЕНИИ ИНТЕРВАЛА

Описывается набор алгоритмов, ориентированных на аналитическое определение с помощью ЭВМ ряда характеристик, связанных с вероятностно-геометрическими соотношениями между порядковыми статистиками при случайном разбиении интервала. Приводятся результаты проделанных аналитических («ручных» и компьютерных) расчетов в виде конкретных вероятностных формул.

Настоящая работа является продолжением исследований авторов [1—3] по нахождению аналитически замкнутых формул, относящихся к порядковым статистикам, связанным со случайным разбиением интервала. Изучение случайного разбиения интервала представляет значительный интерес в первую очередь благодаря своим многочисленным приложениям (см., например, [4—10]). Задача, о которой пойдет речь в дальнейшем, формулируется следующим образом:

Требуется найти вероятность того, что в вариационном ряду $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots$ $\ldots, X_{(n)}$, построенном по результатам случайного бросания $n$ точек на интервал $[0, L]$, минимальное расстояние между двумя любыми порядковыми статистиками, отличающимися на $k$ номеров, будет превышать $\varepsilon$, т. е. требуется указать вероятность

$$P\left(\min_{\{i/i=1,\ldots,n-k\}}(X_{(k+i)} - X_{(i)}) > \varepsilon\right).$$

В эквивалентной форме эта же задача может быть поставлена так:

Требуется указать вероятность $P_{n,k}(\varepsilon, L)$ того, что при случайном независимом бросании $n$ точек на интервал $(0, L)$ внутри него не окажется ни одного подынтервала $(a, a+\varepsilon)$, $0 < a < L - \varepsilon$, содержащего более $k$ точек.

Повышенный интерес к этой задаче вызывается еще и тем обстоятельством, что к ней сводятся не только многочисленные теоретические, но и целый ряд весьма важных в практическом отношении вероятностных задач. Так, выражением $P_{n,k}(\tau, T)$ описывается также вероятность безотказной работы в течение времени $T$ следующей системы массового обслуживания:

1) система имеет $k$ обслуживающих каналов;

2) система не имеет очереди на обслуживание, т. е. заявка, поступающая в систему в тот момент, когда заняты все $k$ обслуживающих каналов, пропадает (отказ в обслуживании);

3) время обслуживания любой заявки, принятой к обслуживанию, постоянно и равно $\tau$;

4) априорно известно, что за время $T$ в систему должно поступить ровно $n$ заявок, а время поступления каждой из них случайно и имеет равномерное распределение на интервале $(0, T)$;

5) в начальный момент времени все каналы обслуживания свободны.

Кроме того, чисто техническая задача определения координат точечных объектов при щелевом сканировании интервала длиной $L$ (квадрата $L \times L$ в [д]вумерном случае) интегратором, имеющим $k$ пороговых уровней, также [с]водится к нахождению вероятности $P_{n,k}(\varepsilon, L)$, соответствующей безошибоч[н]ому считыванию $n$ случайно брошенных точек апертурой $\varepsilon$ (соответственно [а]пертурой $\varepsilon \times \varepsilon$ в двумерном случае).

Сформулированная задача, несмотря на простоту постановки, является [п]роблемной, а ее решение в замкнутой аналитической форме известно лишь [д]ля простейшего частного случая, когда $k = 1$ [11]:

$$P_{n,1}(\varepsilon, L) = (L - (n-1)\varepsilon)^n / L^n. \tag{1}$$

В работах [1—3] нами было предложено несколько нестандартных подхо[д]ов к отысканию вероятностей $P_{n,k}(\varepsilon, L)$. Нестандартность разработанных ал[г]оритмов заключается в том, что большинство из них удалось эффективно [р]еализовать в виде компьютерных программ и тем самым перенести на ЭВМ [в]сю тяжесть проведения рутинных аналитических выкладок, которые в одном [с]лучае связаны с нахождением многомерных интегралов по сложным областям [в] $n$-мерном пространстве, а в другом — с проведением трудоемкого комбина[т]орного расчета по громоздким рекуррентным соотношениям с несколькими [с]вободными параметрами.

В сжатом изложении суть алгоритмов такова. Сначала с помощью обычной [н]ормировки интервал $(0, L)$ заменяется интервалом $(0, 1)$. Тем самым пара[м]етр $L$ из последующего рассмотрения исключается. Далее вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ (т. е. вероятность $P_{n,k}(\varepsilon, 1)$, $0 < \varepsilon \leq 1$ в предыдущих обозначениях) [п]редставляется в виде

$$P_{n,k}(\varepsilon) = n! \int \ldots \int_{D(n,k,\varepsilon)} dx_1 \ldots dx_n, \tag{2}$$

где область интегрирования $D(n, k, \varepsilon) \subset R^n$ описывается системой линейных неравенств:

$$\begin{gathered} 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < 1, \\ x_{k+1} - x_1 > \varepsilon, \\ x_{k+2} - x_2 > \varepsilon, \\ \vdots \\ x_n - x_{n-k} > \varepsilon. \end{gathered} \tag{3}$$

Содержательно интегрирование (2) по области (3) означает следующее: [в]нутри $n$-мерного куба $K_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, 0 < x_i < 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$ [и]щется объем многогранника $S_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_{k+i} - x_i > \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n-k\}$; отношение объема многогранника $S_n$ к объему единичного [к]уба $K_n$ как раз и есть мера, соответствующая искомой вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$.

В дальнейшем интеграл (2) записывается в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} P_{n,k}(\varepsilon) = n! \int \ldots \int 1[x_1] 1[x_2] \ldots 1[x_n - x_{n-1}] 1[1 - x_n] 1[x_{k+1} - x_1 - \varepsilon] \times \\ \times 1[x_{k+2} - x_2 - \varepsilon] \ldots 1[x_n - x_{n-k} - \varepsilon] dx_1 \ldots dx_n, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$1[z] = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ 1 & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

Затем полученный $n$-кратный интеграл (4) с помощью последовательного применения соотношения

$$\left(\prod_{j=1}^{l} 1[x_r - \alpha_j]\right)\left(\prod_{i=1}^{m} 1[\beta_i - x_r]\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} 1[x_r - \alpha_j]1[\beta_i - x_r] \times$$
$$\times \left\{1[\beta_i - \alpha_j]\left(\prod_{\substack{q=1\\q\neq j}}^{l} 1[\alpha_j - \alpha_q]\right)\left(\prod_{\substack{s=1\\s\neq i}}^{m} 1[\beta_s - \beta_i]\right)\right\} \tag{5}$$

(см. [1]) сводится к набору повторных интегралов с уже расставленными пределами интегрирования. Таким образом, изложенный алгоритм дает возможность конструктивного расчета формул $P_{n,k}(\varepsilon)$, что и решает задачу вычисления вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$ для конкретных значений $n$ и $k$.

Анализируя (2) и (4), нетрудно убедиться, что искомые вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$ описываются кусочно-полиномиальными выражениями от $\varepsilon$ степени $n$. Основная сложность расчетов по указанной методике заключается в том, что при $n > 4$ проведение всех необходимых выкладок, относящихся к расстановке пределов интегрирования и непосредственному вычислению повторных интегралов, становится практически нереальным, если вычисления вести вручную. Поэтому нами был составлен специальный пакет программ для проведения всех аналитических выкладок на ЭВМ. С их помощью были рассчитаны формулы $P_{n,k}(\varepsilon)$, $k < n$ для $n = 3, \ldots, 8$ (см. таблицу). К сожалению, факториальный рост сложности вычислительного алгоритма не позволил продвинуться в расчетах формул $P_{n,k}(\varepsilon)$ на глубину $n > 8$.

Далее в хронологическом порядке нами была предпринята попытка программной «реконструкции» формул $P_{n,k}(\varepsilon)$ по следующему алгоритму:

Поскольку $P_{n,k}(\varepsilon)$ представляет собой полином (или несколько «сшитых» полиномов) степени $n$, то для восстановления его коэффициентов достаточно знать значение полинома и всех его производных в одной из точек, например в нуле. Будем искать коэффициенты полинома $P_{n,k}(\varepsilon)$ на участке изменения $\varepsilon$, включающем точку $\varepsilon = 0$. Для нахождения производных любого порядка

$$\frac{d}{d\varepsilon^m} P_{n,k}(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

нами использовалось интегральное представление вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$ в форме соотношения (2), а также два простых тождества:

$$\frac{d}{dz} 1[z] = \delta(z), \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) f(z) dz = f(0). \tag{7}$$

Здесь $\delta(z)$ — обычная дельта-функция. Подробно программная реализация этого алгоритма изложена в [2]. С его помощью удалось резко сократить занимаемый программами объем памяти и существенно увеличить их быстродействие. Достигнуто это было в первую очередь за счет того, что многократно повторяемые операции дифференцирования (6) и интегрирования (7) в данном случае сводились к простым подстановкам. Однако тем не менее продвинуться в вычислении вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$ далее $n = 8$ не удалось.

Поэтому для частного случая $k = 2$ нами был реализован другой план нахождения формул $P_{n,k}(\varepsilon)$, а именно: вместо формул $P_{n,2}(\varepsilon)$ чисто комбинаторными методами для конкретных значений $n$ рассчитывался их дискретный аналог, а потом предельным переходом получались формулы $P_{n,2}(\varepsilon)$ для непрерывного аргумента $\varepsilon$.

**Кусочно-полиномиальные выражения, описывающие вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$ на разных участках (диапазонах) изменения $\varepsilon$**

| $n$ | $k$ | Диапазон изменения $\varepsilon$ | $P_{n,k}(\varepsilon)$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | (0, 1) | $1 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ |
| 4 | 2 | (0, 1/2) | $1 - 12\varepsilon^2 + 24\varepsilon^3 - 14\varepsilon^4$ |
| | | (1/2, 1) | $2 - 8\varepsilon + 12\varepsilon^2 - 8\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4$ |
| | 3 | (0, 1) | $1 - 4\varepsilon^3 + 3\varepsilon^4$ |
| 5 | 2 | (0, 1/2) | $1 - 30\varepsilon^2 + 100\varepsilon^3 - 120\varepsilon^4 + 48\varepsilon^5$ |
| | 3 | (0, 1/2) | $1 - 20\varepsilon^3 + 40\varepsilon^4 - 22\varepsilon^5$ |
| | | (1/2, 1) | $10\varepsilon - 40\varepsilon^2 + 60\varepsilon^3 - 40\varepsilon^4 + 10\varepsilon^5$ |
| | 4 | (0, 1) | $1 - 5\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5$ |
| 6 | 2 | (0, 1/3) | $1 - 60\varepsilon^2 + 280\varepsilon^3 - 420\varepsilon^4 + 12\varepsilon^5 + 320\varepsilon^6$ |
| | | (1/3, 1/2) | $5 - 60\varepsilon + 300\varepsilon^2 - 800\varepsilon^3 + 1200\varepsilon^4 - 960\varepsilon^5 + 320\varepsilon^6$ |
| | 3 | (0, 1/2) | $1 - 60\varepsilon^3 + 195\varepsilon^4 - 222\varepsilon^5 + 85\varepsilon^6$ |
| | | (1/2, 1) | $5 - 30\varepsilon + 75\varepsilon^2 - 100\varepsilon^3 + 75\varepsilon^4 - 30\varepsilon^5 + 5\varepsilon^6$ |
| | 4 | (0, 1/2) | $1 - 30\varepsilon^4 + 60\varepsilon^5 - 32\varepsilon^6$ |
| | | (1/2, 1) | $2 - 12\varepsilon + 60\varepsilon^2 - 160\varepsilon^3 + 210\varepsilon^4 - 132\varepsilon^5 + 32\varepsilon^6$ |
| | 5 | (0, 1) | $1 - 6\varepsilon^5 + 5\varepsilon^6$ |
| 7 | 2 | (0, 1/4) | $1 - 105\varepsilon^2 + 630\varepsilon^3 - 910\varepsilon^4 - 260\varepsilon^5 + 9583\varepsilon^6 - 8446\varepsilon^7$ |
| | | (1/4, 1/3) | $28\varepsilon - 441\varepsilon^2 + 2870\varepsilon^3 - 9870\varepsilon^4 + 18900\varepsilon^5 - 19089\varepsilon^6 + 7938\varepsilon^7$ |
| | 3 | (0, 1/2) | $1 - 140\varepsilon^3 + 630\varepsilon^4 - 1092\varepsilon^5 + 840\varepsilon^6 - 240\varepsilon^7$ |
| | 4 | (0, 1/2) | $1 - 105\varepsilon^4 + 336\varepsilon^5 - 371\varepsilon^6 + 138\varepsilon^7$ |
| | | (1/2, 1) | $-7 + 84\varepsilon - 357\varepsilon^2 + 770\varepsilon^3 - 945\varepsilon^4 + 672\varepsilon^5 - 259\varepsilon^6 + 42\varepsilon^7$ |
| | 5 | (0, 1/2) | $1 - 42\varepsilon^5 + 84\varepsilon^6 - 44\varepsilon^7$ |
| | | (1/2, 1) | $14\varepsilon - 84\varepsilon^2 + 280\varepsilon^3 - 560\varepsilon^4 + 630\varepsilon^5 - 364\varepsilon^6 + 84\varepsilon^7$ |
| | 6 | (0, 1) | $1 - 7\varepsilon^6 + 6\varepsilon^7$ |
| 8 | 2 | (0, 1/4) | $1 - 168\varepsilon^2 + 1232\varepsilon^3 - 1260\varepsilon^4 - 18480\varepsilon^5 +$ <br> $+ 85064\varepsilon^6 - 146640\varepsilon^7 + 91854\varepsilon^8$ |
| | | (1/4, 1/3) | $14 - 336\varepsilon + 3528\varepsilon^2 - 21168\varepsilon^3 + 79380\varepsilon^4 -$ <br> $- 190512\varepsilon^5 + 285768\varepsilon^6 - 244944\varepsilon^7 + 91854\varepsilon^8$ |
| | 3 | (0, 1/3) | $1 - 280\varepsilon^3 + 1610\varepsilon^4 - 3752\varepsilon^5 + 4900\varepsilon^6 - 4952\varepsilon^7 + 3311\varepsilon^8$ |
| | | (1/3, 1/2) | $-14 + 280\varepsilon - 2212\varepsilon^2 + 9296\varepsilon^3 - 22960\varepsilon^4 +$ <br> $+ 34048\varepsilon^5 - 29120\varepsilon^6 + 12544\varepsilon^7 - 1792\varepsilon^8$ |
| | 4 | (0, 1/2) | $1 - 280\varepsilon^4 + 1232\varepsilon^5 - 2072\varepsilon^6 + 1552\varepsilon^7 - 434\varepsilon^8$ |
| | | (1/2, 1) | $14 - 112\varepsilon + 392\varepsilon^2 - 784\varepsilon^3 + 980\varepsilon^4 - 784\varepsilon^5 + 392\varepsilon^6 - 112\varepsilon^7 + 14\varepsilon^8$ |
| | 5 | (0, 1/2) | $1 - 168\varepsilon^5 + 532\varepsilon^6 - 576\varepsilon^7 + 210\varepsilon^8$ |
| | | (1/2, 1) | $14 - 168\varepsilon + 924\varepsilon^2 - 2800\varepsilon^3 + 5040\varepsilon^4 - 5544\varepsilon^5 +$ <br> $+ 3668\varepsilon^6 - 1344\varepsilon^7 + 210\varepsilon^8$ |
| | 6 | (0, 1/2) | $1 - 56\varepsilon^6 + 112\varepsilon^7 - 58\varepsilon^8$ |
| | | (1/2, 1) | $2 - 16\varepsilon + 112\varepsilon^2 - 448\varepsilon^3 + 1120\varepsilon^4 - 1792\varepsilon^5 + 1736\varepsilon^6 - 912\varepsilon^7 + 198\varepsilon^8$ |
| | 7 | (0, 1) | $1 - 8\varepsilon^7 + 7\varepsilon^8$ |

При этом использовалась следующая модель. Интервал $(0, L)$ разбивался на $r$ равных дискретов. Случайное бросание $n$ точек на интервал $(0, L)$ интерпретировалось как случайное бросание $n$ неразличимых шаров по $r$ ящикам. Аналогом подынтервала длиной $\varepsilon$ служила совокупность $l$ смежных дискретов. Если ни в одном из таких $l$-подынтервалов, содержащихся внутри исходного как предел отношения

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ (l/r) \to \varepsilon}} \frac{Q(r, n, l)}{Q(r, n)} \quad \text{при фиксированном } n,$$

где $Q(r, n, l)$ — рекуррентно вычисляемое выражение для числа «удачных» бросаний; $Q(r, n) = \binom{n + r - 1}{r - 1}$ — общее число [12] возможных исходов опыта (здесь и в дальнейшем $\binom{M}{m}$ означает число сочетаний из $M$ по $m$ : $\binom{M}{m} = C_M^m = M!/(m!\,(M - m)!)$). Алгоритм комбинаторного расчета на ЭВМ вероятностей $P_{n,2}(\varepsilon)$ подробно описан в [3]. На этом пути удалось значительно продвинуться в расчете формул $P_{n,2}(\varepsilon)$ до $n = 12$ включительно, а это, в свою очередь, позволило усмотреть общую закономерность и высказать гипотезу, заключающуюся в том, что для четных $n$ на участке $1/(n/2) < \varepsilon < 1/((n/2) - 1)$ справедлива формула

$$P_{n,k}(\varepsilon) = (2/n)\binom{n}{(n/2) - 1}(1 - ((n/2) - 1)\varepsilon)^n, \tag{8}$$

подтверждающаяся всеми проведенными расчетами. Дальнейшие вычисления формул $P_{n,k}(\varepsilon)$ для $n > 12$ ограничивались быстродействием ЭВМ.

Недавно нами разработан новый алгоритм вычисления вероятностей $P_{n,k}(\varepsilon)$, заключающийся в том, что прямым интегрированием сразу в общем аналитическом виде последовательно отыскиваются выражения для вероятностей $P_{n,n-1}(\varepsilon)$, $P_{n,n-2}(\varepsilon)$, $P_{n,n-3}(\varepsilon)$ и т. д. Продемонстрируем схему расчета сначала на самом простом примере нахождения вероятности $P_{n,n-1}(\varepsilon)$:

$$P_{n,n-1}(\varepsilon) = n!\int \ldots \int_{D_{n,n-1}(\varepsilon)} dx_1 \ldots dx_n, \tag{9}$$

где область $D_{n,n-1}(\varepsilon)$ включает в свой состав те и только те точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, для которых справедлива следующая система линейных неравенств:

$$\begin{gathered} 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < 1, \\ x_n - x_1 > \varepsilon. \end{gathered} \tag{10}$$

Вычисляя пределы интегрирования в соответствии с правилом (5), вместо (9) получаем

$$P_{n,n-1}(\varepsilon) = n!\int_{\varepsilon}^{1} dx_n \int_{0}^{x_n-\varepsilon} dx_1 \left[\int_{x_1}^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_{x_1}^{x_4} dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_2\right]. \tag{11}$$

Проводя интегрирование сначала в квадратных скобках (последовательно о переменным $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$), а затем по переменным $x_1$ и $x_n$, окончательно олучим

$$P_{n,n-1}(\varepsilon) = n\,!\int\limits_{\varepsilon}^{1} dx_n \int\limits_{0}^{x_n-\varepsilon} \frac{(x_n - x_1)^{n-2}}{(n-2)\,!}\,dx_1 = n\,!\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(-\frac{\varepsilon^{n-1}}{(n-1)\,!} + \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)\,!}\right)dx_n =$$

$$= n\,!\left(-\frac{\varepsilon^{n-1}(1-\varepsilon)}{(n-1)\,!} + \left(\frac{1}{n\,!} - \frac{\varepsilon^n}{n\,!}\right)\right) = 1 - \varepsilon^n - n\varepsilon^{n-1}(1-\varepsilon). \tag{12}$$

Расчет формул для вероятности

$$P_{n,n-2}(\varepsilon) = n\,!\int\limits_{D_{n,n-2}(\varepsilon)}\!\!\ldots\int dx_1 \ldots dx_n \tag{13}$$

более сложен. В этом случае вероятность $P_{n,n-2}(\varepsilon)$ уже не удается свести к одному повторному интегралу вида (11), а можно представить лишь в виде уммы таких интегралов.

После проведения необходимых преобразований (из-за большой громоздкости мы опускаем все промежуточные выкладки) получаем

$$P_{n,n-2}(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - 2\binom{n}{2}\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)^2 - 2\varepsilon^n & \text{при } 0 \le \varepsilon \le 1/2; \\ \left\{1 - 2\varepsilon^n + (2\varepsilon - 1)^n\right\} - 2\binom{n}{2}(1-\varepsilon)^2\varepsilon^{n-2} & \text{при } 1/2 \le \varepsilon \le 1. \end{cases} \tag{14}$$

Расчет вероятности $P_{n,n-3}(\varepsilon)$ становится еще более сложным, поэтому риводим лишь полученный нами финальный результат:

$$\begin{array}{l} P_{n,n-3}(\varepsilon) \\ (n > 6) \end{array} = \begin{cases} 1 - 2\varepsilon^n + \binom{n}{1}\left\{6\varepsilon^n - 4\varepsilon^{n-1}\right\} + \binom{n}{2}\left\{-3\varepsilon^n + \varepsilon^{n-2}\right\} + \\ + \binom{n}{3}\left\{9\varepsilon^n - 18\varepsilon^{n-1} + 12\varepsilon^{n-2} - 3\varepsilon^{n-3}\right\} \quad \text{при } 0 < \varepsilon < 1/2; \\ \\ \left\{1 - 2\varepsilon^n + (2\varepsilon - 1)^n\right\} + \binom{n}{1}(1-\varepsilon)\left\{-2\varepsilon^{n-1} + 2(2\varepsilon - 1)^{n-1}\right\} + \\ + \binom{n}{2}(1-\varepsilon)^2\left\{\varepsilon^{n-2} + (2\varepsilon - 1)^{n-2}\right\} + \\ + \binom{n}{3}(1-\varepsilon)^3\left\{-3\varepsilon^{n-3}\right\} \quad \text{при } 1/2 < \varepsilon \le 1. \end{cases} \tag{15}$$

Нам представляется, что из-за большого объема рутинных вычислений, ребующихся как при расстановке пределов интегрирования, так и непосредственно при интегрировании, дальнейший расчет по последнему методу (т. е. расчет формул для вероятностей $P_{n,n-4}(\varepsilon)$, $P_{n,n-5}(\varepsilon)$ и т. д.) вряд ли осуществим вручную. Выходом из этой ситуации опять, по-видимому, могла бы служить программная реализация приведенного алгоритма. В наши ближайшие планы акая перспектива заложена, так как, несмотря на всю сложность программной реализации (необходимо формализовать и запрограммировать все налитические выкладки сразу при двух свободных параметрах — $n$ и $\varepsilon$), этот алгоритм выгодно отличается от всех предыдущих тем, что на выходе получаются аналитические формулы в замкнутом относительно $n$ виде. Наличие же остаточно большого количества рассчитанных таким образом формул (напомним, что сейчас «вручную» вычислены лишь формулы $P_{n,n-1}$, $P_{n,n-2}$ и $P_{n,n-3}$) сделало бы весьма вероятным установление общей закономерности бразования формул $P_{n,k}(\varepsilon)$ при произвольных $n$ и $k$, что полностью решило бы данную проблему. Следует также отметить, что многие программы машинной аналитики либо их модификации, первоначально предназначавшиеся для решения обсуждаемой задачи, в дальнейшем находят применение в других областях математики и информатики, порой весьма далеких от описанных в этой работе (см., например, [13, 14]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в $n$-мерном пространстве // Автометрия. 1976. № 1.
2. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое определение с помощью ЭВМ статистических характеристик процесса щелевого сканирования потока Бернулли // Автометрия. 1977. № 4.
3. **Резник А. Л.** Моделирование на ЭВМ непрерывного считывания изображений дискретной структуры // Автометрия. 1981. № 6.
4. **Fisher R. A.** Tests of significance in harmonic analysis // Proc. Roy. Soc. A. 1929. 125. P. 54.
5. **Wilks S. S.** Order statistics // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. N 5. P. 6.
6. **Darling D. A.** On a class of problems related to the random division of an interval // Ann. Math. Stat. 1953. 24. P. 239.
7. **Barton D. E., David F. N.** Combinatorial extreme value distributions // Mathematika. 1959. N 6. P. 63.
8. **Pyke R.** Spasings // J. Rev. Stat. Soc. 1965. B27. P. 395.
9. **Naus J. I.** Some probabilities, expectations and variances for the size of largest clusters and smallest intervals // J. Amer. Stat. Ass. 1966. 61. P. 1191.
10. **Дэйвид Г.** Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.
11. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Мир, 1966.
12. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1966.
13. **Резник А. Л.** Программы для аналитических вычислений в задачах локализации точечных объектов // Автометрия. 1991. № 6.
14. **Ефимов В. М., Золотухин Ю. Н., Резник А. Л.** Асимптотически оптимальная декорреляция стационарной последовательности равноотстоящих отсчетов сигнала // Автометрия. 1991. № 5.



*Поступила в редакцию 26 мая 1994 г.*