РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

№ 1 1995

УДК 537.874.4

В. К. Волосюк

(Харьков, Украина)

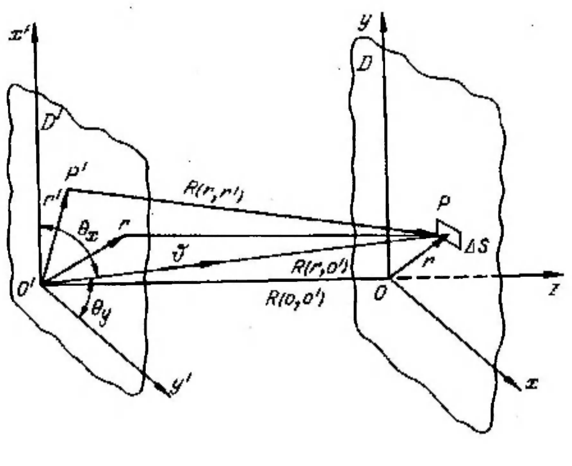
ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОБРАЗОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Предложены и рассмотрены спектральные преобразования широкополосных полей излучения протяженных источников в приближении Фраунгофера и Френеля. Сформулированы и доказаны теоремы о связи корреляционных и спектральных характеристик этих полей. Полученные результаты являются основой для построения когерентных и некогерентных изображений излучающих объектов.

Построение изображений некогерентных источников широкополосного излучения в дистанционной спектрометрии [1, 2], радиоастрономии [3, 6] и других по данным формирования оценок корреляционных функций полей или их комплексных функций взаимной когерентности предполагает выполнение условия квазимонохроматического приближения [3] (условия пространственно-временной узкополосности [5, 6]). При этом формулы, соответствующие теореме Ван Циттерта — Цернике [7], приближенно являются преобразованиями Фурье или Френеля [8]. В противном случае в показателях экспонент в этих формулах невозможно разделить временные и пространственные спектральные переменные.

В данной работе предложены преобразования, связывающие поля и их корреляционные функции с соответствующими спектральными характеристиками источников широкополосного излучения в общем случае, когда указанные выше условия не выполняются. Эти преобразования можно рассматривать как обобщения преобразований Фурье, Френеля и Лапласа на случай спектрального анализа волновых полей (с учетом их запаздывания при распространении).

Необходимые геометрические соотношения в физической задаче, приводящей к этим преобразованиям, представлены на рисунке. Здесь область D — плоская сцена (картинная плоскость), к координатам которой ($r = (x, y) \in$



$\in D$) приведены положения реальных элементов протяженного источника излучения. Также положение этих элементов будем характеризовать направляющими косинусами $\theta = (\theta_x, \theta_y) \in \Theta$. Область D' является областью регистрации излучения. Положение регистрирующих элементов этой области характеризуем координатами $r' = (x', y') \in D'$.

Преобразования $\mathbf{V}_F, \mathbf{V}_F^{-1}, \mathbf{V}_{FL}, \mathbf{V}_{FL}^{-1}$. *Приближение дальней зоны Фраунгофера [7].* В этом приближении линии, соединяющие элемент излучения dS в области D с любыми двумя точками области регистрации D', считаем параллельными. При этом расстояние

$$R(r, r') \approx R(r, 0') + \theta r', \tag{1}$$

$\theta r'$ — скалярное произведение.

Излучательную способность элементов источника излучения характеризуем функцией $A(f, \theta)$ — спектрально-угловой плотностью комплексной амплитуды [5, 6]. Поле, регистрируемое в точке r', является интегральным результатом излучения всех элементов, характеризующихся угловыми координатами $\theta \in \Theta$ [5]:

$$U(t, r') = \operatorname{Re} \int\limits_{\Theta} \int\limits_{0}^{\infty} A(f, \theta) \exp\left\{ j2\pi f \left(t - \frac{\theta r'}{c} \right) \right\} df d\theta. \tag{2}$$

Фазовый множитель $\exp\{-j2\pi f\, [R[0, r(\theta)]/c]\}$, обусловленный соответствующим запаздыванием волн (c — скорость их распространения) и часто являющийся неизвестным, а также якобиан преобразования координат $(1 - \theta_x^2 - \theta_y^2)^{-1/2}$ [6] входят сомножителями в $A(f, \theta)$.

Как и в теории преобразований Фурье, распространим в область отрицательных значений f спектральную плотность $A(f, \theta)(A(-f, \theta) = A^*(f, \theta))$, уменьшив ее по абсолютной величине в 2 раза. Учитывая также, что областью определения этой функции является круг $\theta_x^2 + \theta_y^2 \le 1$, распространим (формально) пределы интегрирования по этим переменным на $\pm\infty$. Тогда поле (вещественное)

$$U(t, r') = 0{,}5 V_F^{-1}[A(f, \theta)] = 0{,}5 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(f, \theta) \times$$
$$\times \exp\left[j2\pi f \left(t - \frac{\theta r'}{c} \right) \right] df d\theta, \qquad d\theta = d\theta_x d\theta_y. \tag{3}$$

Умножая левую и правую части этого соотношения на комплексно-сопряженную функцию $\exp\left[-j2\pi f \left(t - \frac{\theta r'}{c} \right) \right]$, интегрируя по переменным r' и t в бесконечных пределах и учитывая равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ j2\pi \left[(f - f_1) - (f\theta - f_1\theta_1) \frac{r'}{c} \right] \right\} dr' dt = f^{-2} c^2 \delta(f - f_1) \delta(\theta - \theta_1),$$
$$\delta(\theta - \theta_1) = \delta(\theta_x - \theta_{x_1}) \delta(\theta_y - \theta_{y_1}), \qquad dr' = dx' dy', \tag{4}$$

находим обратное преобразование

$$0{,}5 f^{-2} c^2 A(f, \theta) = V_F[U(r', t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(r', t) \times$$
$$\times \exp\left\{ -j2\pi f \left(t - \frac{\theta r'}{c} \right) \right\} dt dr', \qquad dr' = dx' dy'. \tag{5}$$

Заменим в формулах (3), (5) переменную $j2\pi f$ на переменную $p = \alpha + j2\pi f$ (как в интегралах Лапласа). В результате имеем

$$U(t, r') = 0{,}5V_{FL}^{-1}\,[A(p, \theta)] = \frac{0{,}5}{2\pi j}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} A(p, \theta)\exp\left\{p\left(t - \frac{\theta r'}{c}\right)\right\}dp\,d\theta, \tag{6}$$

$$V_{FL}[U(t, r')] = 0{,}5(2\pi j)^2 c^2 p^{-2} A(p, \theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} U(t, r')\exp\left\{-p\left(t - \frac{\theta r'}{c}\right)\right\}dt\,dr'. \tag{7}$$

Как и в одностороннем интеграле Лапласа, нижний предел интегрирования принят равным нулю. Как известно, преобразование Лапласа по пространственным переменным не имеет особых преимуществ по сравнению с преобразованием Фурье (так как является двусторонним). Преобразования V_{FL} и V_{FL}^{-1} представляют интерес и ценность тем, что по переменным t и p обладают преимуществами преобразований Лапласа. Сходимость интегралов по пространственным переменным обеспечивается ограниченными (реальными) размерами областей регистрации и излучения поля.

Рассмотрим комплексный аналитический процесс

$$\mathrm{U}(t, r') = U(t, r') + jU_1(t, r'), \tag{8}$$

где $U_1(t, r')$ по переменной t связан с $U(t, r')$ преобразованиями Гильберта. Процесс $\mathrm{U}(t, r')$ имеет удвоенную по абсолютной величине одностороннюю (равную нулю при $f < 0$) спектральную плотность $A(f, \theta)$ [9].

Легко проверить, что

$$\mathrm{U}(t, r') = V_F^{-1}\,[A(f, \theta)], \qquad c^2 f^{-2} A(f, \theta) = V_F[\mathrm{U}(t, r')]. \tag{9}$$

Для некогерентных источников излучения значения спектральной плотности $A(f, \theta)$ не коррелированы в различных направлениях θ_1, θ_2 и на различных частотах, т. е.

$$\overline{A(f_1, \theta_1)A^*(f_2, \theta_2)} = B(f, \theta)\delta(f_1 - f_2)\delta(\theta_1 - \theta_2), \tag{10}$$

(*) — знак комплексного сопряжения, $B(f, \theta)$ — спектральная плотность потока мощности (спектральная яркость источника, размерность Вт/м^2 × Гц · ср) [5, 6].

Теорема. Корреляционная функция поля

$$R(\tau, \Delta r') = \overline{U(t_1, r_1')U(t_2, r_2')}, \qquad \tau = t_1 - t_2, \;\; \Delta r' = r_1' - r_2' \tag{11}$$

и спектральная плотность $B(f, \theta)$ связаны между собой парой преобразований V_F, V_F^{-1}.

Доказательство. Подставив в (11) соотношение (3) и приняв во внимание равенство (10), получим

$$R(\tau, \Delta r') = 0{,}25V_F^{-1}\,[B(f, \theta)] = $$
$$= 0{,}25\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(f, \theta)\exp\left\{j2\pi f\left(\tau - \frac{\theta\Delta r'}{c}\right)\right\}df\,d\theta. \tag{12}$$

Здесь $B(f, \theta)$ является вещественной четной функцией f. Умножая левую и правую части равенства (12) на сопряженную функцию

$\exp\left\{-j2\pi f\left(t-\frac{\theta\Delta r'}{c}\right)\right\}$, интегрируя в бесконечных пределах по переменным τ и $\Delta r'$, а также принимая во внимание выражение (4), получим

$$0{,}25c^2f^{-2}B(f,\theta) = V_F[R(\tau,\Delta r')]. \tag{13}$$

Теорема. Комплексная функция взаимной когерентности (взаимная корреляционная функция комплексно-сопряженных аналитических процессов $\mathrm{U}(t,r')$)

$$\Gamma(\tau,\Delta r') = \overline{\mathrm{U}(t_1,r_1')\mathrm{U}^*(t_2,r_2')} \tag{14}$$

и односторонняя спектральная плотность $B(f,\theta)$ (равная нулю при $f<0$) свя-

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей. Первое из равенств (15) проверяется подстановкой первого равенства (9) в (14) с учетом (10), второе — применением к первому равенству (15) преобразования V_F с учетом (4).

Преобразования $V_{\Phi 1}$, $V_{\Phi 2}$, $V_{\Phi L}$, $V_{\Phi 1}^{-1}$, $V_{\Phi 2}^{-1}$, $V_{\Phi L}^{-1}$. *Ближняя зона (приближение Френеля [7]).* В этом приближении расстояние

$$R(r,r') = \sqrt{R_0^2+|r-r'|^2} \approx R_0+\frac{|r-r'|^2}{2R_0},$$

$$R_0 = R(0,0'), \qquad |r-r'|^2 = (x-x')^2+(y-y')^2.$$

Излучательную способность элемента dS характеризуем спектральной плотностью комплексной амплитуды $A(f,r)$. Поле, регистрируемое в точке r' с учетом запаздывания и затухания $\sim R_0^{-1}$, является интегральным результатом излучения всех элементов, приведенных к плоской сцене:

$$U(t,r') = \mathrm{Re}R_0^{-1}\int_D\int_0^\infty A(f,r)\exp\left\{j2\pi f\left(t-\frac{R_0}{c}-\frac{|r-r'|^2}{2cR_0}\right)\right\}dfdr, \qquad dr = dxdy.$$

Распространим, как и в преобразованиях Фурье, спектральную плотность $A(f,r)$ в область отрицательных значений f, уменьшив ее в 2 раза. Учитывая также, что $A(f,r)$ равна нулю вне границ источника излучения, распространим пределы интегрирования по переменным $r=(x,y)$ на $\pm\infty$. Тогда вещественное поле

$$U(t,r') = 0{,}5R_0^{-1}V_{\Phi 1}^{-1}[A(f,r)] = 0{,}5R_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(f,r)\times$$

$$\times\exp\left\{j2\pi f\left(t-\frac{R_0}{c}-\frac{|r-r'|^2}{2cR_0}\right)\right\}dfdr. \tag{16}$$

Умножая правую и левую части этого выражения на сопряженную функцию $\exp\left[-j2\pi f\left(t-\frac{R_0}{c}-\frac{|r-r'|^2}{2cR_0}\right)\right]$, интегрируя по переменным t и $r'=(x',y')$ в бесконечных пределах и учитывая равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{j2\pi\left[(f-f_1)t - \frac{R_0}{c}(f-f_1) + \frac{1}{2cR_0}\left(f|r-r'|^2 - f_1|r_1-r'|^2\right)\right]\right\} dtdr' =$$

$$= \frac{R_0^2c^2}{f^2}\delta(f-f_1)\delta(r-r_1), \qquad \delta(r-r_1) = \delta(x-x_1)\delta(y-y_1), \tag{17}$$

получим преобразование

$$V_{\Phi 1}[U(t, r')] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(t, r')\exp\left\{-j2\pi f\left(t - \frac{R_0}{c} - \frac{|r-r'|^2}{2cR_0}\right)\right\} dtdr' =$$

$$= 0{,}5R_0c^2f^{-2}A(f, r). \tag{18}$$

Преобразования $V_{\Phi L}$ и $V_{\Phi L}^{-1}$ получим, заменив в выражениях (18), (16) переменную $j2\pi f$ на $\alpha + j2\pi f$:

$$U(t, r') = \frac{0{,}5}{2\pi j} R_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} A(p, r) \times$$

$$\times \exp\left\{p\left(t - \frac{R_0}{c} - \frac{|r-r'|^2}{2cR_0}\right)\right\} dpdr = 0{,}5R_0^{-1}V_{\Phi L}^{-1}[A(p, r)], \tag{19}$$

$$0{,}5(2\pi j)^2R_0c^2p^{-2}A(p, r) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(t, r') \times$$

$$\times \exp\left\{-p\left(t - \frac{R_0}{c} - \frac{|r-r'|^2}{2cR_0}\right)\right\} dtdr' = V_{\Phi L}[U(t, r')]. \tag{20}$$

Эти преобразования по переменной t обладают преимуществами преобразований Лапласа. Сходимость интегралов по пространственным координатам обеспечивается ограниченными размерами областей D и D', вне которых функции $A(p, r)$ и $U(t, r')$ можно считать равными нулю.

Нетрудно проверить, что комплексный аналитический процесс

$$\mathrm{U}(t, r') = U(t, r') + jU_1(t, r') \tag{21}$$

и односторонняя (равная нулю при $f < 0$) удвоенная по абсолютной величине спектральная плотность комплексной амплитуды $A(f, r)$ связаны между собой парой преобразований $V_{\Phi 1}$, $V_{\Phi 1}^{-1}$, т. е.

$$\begin{gathered} \mathrm{U}(t, r') = R_0^{-1}V_{\Phi 1}^{-1}\,[A(r, f)], \\ R_0c^2f^{-2}A(r, f) = V_{\Phi 1}[\mathrm{U}(t, r')]. \end{gathered} \tag{22}$$

Для некогерентных источников излучения справедливо равенство, аналогичное (10):

$$\overline{A(r_1, f_1)A^*(r_2, f_2)} = B(r, f)\delta(f_1 - f_2)\delta(r_1 - r_2). \tag{23}$$

Теорема. Корреляционная функция

$$R(\tau, r_1', r_2') = \overline{U(t_1, r_1')U(t_2, r_2')} \tag{24}$$

и спектральная яркость $B(f, r)$ связаны между собой парой преобразований $V_{Ф2}$, $V_{Ф2}^{-1}$:

$$R(\tau,\ r_1',\ r_2') = 0{,}25R_0^{-2}V_{Ф2}^{-1}\ [B(f, r)] = 0{,}25R_0^{-2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(f, r)\exp\left\{j2\pi f\left[\tau - \frac{1}{2cR_0}(|r - r_1'|^2 - |r - r_2'|^2)\right]\right\}dfdr, \qquad (25)$$

$$V_{Ф2}[R(\tau,\ r_1',\ r_2')] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau,\ r_1',\ r_2')\times$$

$$\times\exp\left\{-j2\pi f\left[\tau - \frac{1}{2cR_0}(|r - r_1'|^2 - |r - r_2'|^2)\right]\right\}dr_1' = 0{,}25c^2f^{-2}B(f, r). \qquad (26)$$

Для доказательства теоремы подставим в левую часть (24) соотношение (16). Принимая во внимание равенство (23), получим преобразование (25). Соотношение (26) получаем, применяя к (25) преобразование $V_{Ф2}$ и учитывая равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j2\pi\left[(f - f_1)\tau - \frac{f}{cR_0}(|r - r_1'|^2 - |r - r_2'|^2) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{f_1}{2cR_0}(|r_1 - r_1'|^2 - |r_1 - r_2'|^2)\right]\right\}d\tau dr_1' = c^2R_0^2f^{-2}\delta(f - f_1)\delta(r - r_1). \qquad (27)$$

Заметим, что при выполнении преобразования (26) интегрирование ведется по одной из переменных (любой): $r_1' = (x_1',\ y_1')$ или $r_2' = (x_2',\ y_2')$. Спектральная плотность $B(f, r)$ в этих выражениях является двусторонней четной функцией f.

Теорема. Комплексная функция взаимной когерентности

$$\Gamma(\tau,\ r_1',\ r_2') = \overline{\mathrm{U}(t_1, r_1')\mathrm{U}^*(t_2, r_2')} \qquad (28)$$

(взаимная корреляционная функция комплексно-сопряженных аналитических процессов $\mathrm{U}(t, r)$) и односторонняя спектральная яркость $B(f, r)$ связаны между собой парой преобразований $V_{Ф2}$, $V_{Ф2}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(\tau,\ r_1',\ r_2') &= R_0^{-2}V_{Ф2}^{-1}\ [B(r, f)],\\ c^2f^{-2}B(r, f) &= V_{Ф2}[\Gamma(\tau,\ r_1',\ r_2')].\end{aligned} \qquad (29)$$

Доказательство этой теоремы также аналогично доказательству предыдущей.

Для получения первого равенства (29) необходимо в (28) подставить первое из равенств (22) и учесть (23), для доказательства второго равенства (29) необходимо к первому применить преобразование $V_{Ф2}$ и учесть соотношение (27).

Таким образом, в данной работе предложены преобразования, позволяющие строить изображения источников излучения в виде действительной и мнимой частей спектральных плотностей комплексных амплитуд $A(\cdot)$, а также в виде спектральных яркостей $B(\cdot)$ не только как функций пространственных координат, но и как функций временных частот. Первые формулы в соотношениях (15) и (29) являются обобщением формул Ван Циттерта — Цернике на случай широкополосного излучения [7]. Найденные преобразования не являются преобразованиями Фурье и Френеля и сводятся к ним лишь в частном случае при выполнении квазимонохроматического приближения (условия пространственно-временной узкополосности).

Преобразования V_{FL}, V_{FL}^{-1}, $V_{\Phi L}$, $V_{\Phi L}^{-1}$ ценны тем, что по переменным p и t обладают преимуществами преобразований Лапласа и могут быть использованы при исследовании динамических широкополосных и сверхширокополосных пространственно-временных систем и переходных процессов в них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Фалькович С. Е.** Оптимизация оценок пространственно-распределенных параметров электродинамических моделей поверхностей в обратных задачах интерпретации при активном дистанционном зондировании // ДАН СССР. 1992. 322, № 2.
2. **Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Пономарев В. И.** Корреляционная связь рассеянного и собственного излучения статистически неровных подстилающих поверхностей // ДАН СССР. 1991. 317, № 6.
3. **Фомалон Э., Фратер Р., Хамакер Дж. и др.** Построение изображений в астрономии по функциям когерентности. М.: Мир, 1982.
4. **Томпсон Р., Моран Дж., Свенсон Дж.** Интерферометрия и синтез в радиоастрономии. М.: Мир, 1989.
5. **Фалькович С. Е.** Восстановление распределения радиояркости протяженного источника излучения. Когерентная трактовка // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1990. № 2.
6. **Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В.** Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием. М.: Радио и связь, 1989.
7. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1970.
8. **Сороко Л. Н.** Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971.
9. **Френкс Л.** Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.

Поступила в редакцию 9 марта 1994 г.