

СИСТЕМЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.67 : 681.327.12 : 629.78

Г. И. Перетягин
(Новосибирск)

ПОСТРОЕНИЕ ОБНАРУЖИТЕЛЯ,
ИНВАРИАНТНОГО К ПОВОРОТУ ДВУМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Развит метод обнаружения двумерных объектов известной формы на сложном коррелированном фоне, инвариантный к повороту объектов, а также к изменениям уровня освещенности фона и контраста объектов. Метод основан на разложении изображения фрагментов в базисе двумерных ортогональных полиномов Цернике, в рамках которого находятся оптимальные критерии, являющиеся функциями инвариантных статистик (моментов Цернике), при различных предположениях о корреляционной структуре фона. Приводится сравнение мощностей согласованного и инвариантного к повороту обнаружителей заданных объектов в двух предельных ситуациях взаимоотношений формы объекта и статистики фона.

Одной из трудных проблем в практических задачах обработки изображений является развитие методов обнаружения и распознавания объектов известной формы на сложном коррелированном фоне, инвариантных к повороту объектов, а также к изменениям уровня освещенности фона и контраста объектов. Требование инвариантности приводит к необходимости ограничить рассмотрение классом инвариантных решающих правил, в рамках которых нужно искать оптимальные критерии, являющиеся функциями инвариантных статистик.

В [1] выведена процедура поиска объектов произвольной ориентации, основанная на представлении изображения фрагментов в функциональном базисе, инвариантном к повороту. В предлагаемой работе проводится развитие такого подхода в базисе двумерных ортогональных полиномов Цернике, образующих полную систему функций [2], что принципиально, так как позволяет реализовать «полный набор» инвариантов, вычисляемых из коэффициентов разложения сигнала в данном базисе [3]. В отличие от работы [1], в которой построен обнаружитель, адаптирующийся к повороту объектов, здесь основное внимание обращено на вывод тестовых статистик, инвариантных к отмеченной выше группе преобразований сигнала при различных предположениях о корреляционной структуре фона.

1. Полиномы Цернике хорошо известны и широко используются для анализа оптических систем [4]. Относительно недавно они стали применяться при восстановлении и распознавании двумерных форм [5, 6]. Многочлены Цернике являются множеством ортогональных полиномов следующего вида:

$$V_n(x, y) = V_n(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = R_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad (1)$$

где $V_n(x, y)$ — полное множество комплексных полиномов от двух переменных x и y , ортогональных на внутренней поверхности единичного круга $x^2 + y^2 = 1$; l — любое целое, $n \geq |l|$, $n - |l|$ четно. Многочлены $R_n(\rho)$ являются вещественными ортогональными в круге полиномами, имеющими вид

$$R_n(\rho) = \sum_{k=l}^n B_{nk} \rho^k, \quad (2)$$

$$B_{nk} = \frac{(-1)^{(n-k)/2} [(n+k)/2]!}{[(n-k)/2]! [(l+k)/2]! [(k-l)/2]!}.$$

Система круговых полиномов Цернике отличается от всех подобных систем тем, что она содержит полином для каждой пары возможных значений n (степень ρ) и l (угловая зависимость). Следовательно, любая функция (изображение) $U(x, y) = U(r, \varphi)$ может быть аппроксимирована на круге радиусом R следующим образом:

$$U(x, y) = U(R\rho, \varphi) = \sum_n \sum_l u_{nl} V_{nl}(\rho, \varphi), \quad (3)$$

где $\rho = r/R$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ и l принимает положительные и отрицательные значения, удовлетворяющие условиям: $n - |l|$ — четное число, $|l| \leq n$. Тогда в соответствии с принятой терминологией [5] комплексные моменты Цернике $\{u_{nl}\}$ равны

$$u_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} U(R\rho, \varphi) V_{nl}^*(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = (u_{n, -l}^*), \quad (4)$$

где $*$ — комплексное сопряжение.

Вещественное разложение, соответствующее уравнению (3), имеет вид

$$U(x, y) = \sum_n \sum_l (c_n \cos l\varphi + d_n \sin l\varphi) R_n(\rho),$$

где l принимает лишь положительные целые значения, меньшие n . Взаимосвязь между вещественными и комплексными моментами Цернике достаточно проста: $c_n = 2\operatorname{Re}(u_{n0})$, $d_n = -2\operatorname{Im}(u_{n0})$.

Рассмотрим поворот изображения на угол θ . Взаимоотношение между моментами Цернике повернутого изображения $(u_{nl})'$ и исходного (u_{nl}) определяется как $(u_{nl})' = (u_{nl}) \exp(-il\theta)$. Это соотношение показывает, что моменты Цернике имеют простые свойства при повороте: каждый из них приобретает лишь фазовый сдвиг в результате вращения. Это означает, что амплитуды моментов Цернике при вращении остаются неизменными. При переходе от непрерывного изображения к дискретизованному функция яркости $U(x, y)$ заменяется на дискретную $U(x_i, y_i) = U(R\rho_i, \varphi_i)$. Соответственно интеграл (4) (осуществляющий оценивание моментов Цернике) заменяется на суммирование с весами, определяемыми используемой кубатурной формулой [7].

2. Будем считать фоновое изображение непрерывным в среднеквадратическом смысле случайным полем $Z(x, y)$ с нулевым средним и автоковариационной функцией

$$K_z(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sigma^2 C_z(R\rho_1, \varphi_1, R\rho_2, \varphi_2),$$

где σ^2 — дисперсия флуктуаций $Z(x, y)$, а $C_z(R\rho_1, \varphi_1, R\rho_2, \varphi_2)$ — нормированная автоковариация, являющаяся функцией расположения точек $(x_1, y_1) = (R\rho_1, \varphi_1)$ и $(x_2, y_2) = (R\rho_2, \varphi_2)$. Введем в качестве параметров случайного поля случайные величины

$$z_{nl} = \{(n+1)/\pi\} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z(R\rho, \varphi) V_{nl}^*(\rho, \varphi) d\rho d\varphi. \quad (5)$$

(Здесь предполагается, что случайное поле

$$Z^N(R\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^n z_{nl} V_{nl}(\rho, \varphi)$$

сходится в среднеквадратическом смысле к $Z(R\rho, \varphi)$ при $N \rightarrow \infty$.) Величины $\{z_{nl}\}$ будут независимыми гауссовыми случайными переменными лишь в том случае, когда базисные функции $v_{nl}(\rho, \varphi)$ приобретают смысл собственных функций интегрального уравнения

$$\lambda_{nl} V_{nl}(\delta, \psi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} C_z(R\delta, \psi; R\rho, \varphi) v_{nl}(\rho, \varphi) d\rho d\varphi, \quad (6)$$

где λ_{nl} — собственные значения.

Данные «координаты» централизованного поля имеют, очевидно, нулевые средние и дисперсии $\sigma_{nl}^2 = \sigma^2 \lambda_{nl}$: $z_{nl} = \sigma \lambda_{nl} \xi_{nl}$, где ξ_{nl} — стандартные (комплексные) гауссовы случайные переменные (по аналогии с принятым обозначением для действительных значений $N(0, 1)$ в комплексном случае пишут $\xi_{nl} \sim CN(0, 1)$). Разложение соответствующей модели случайного поля в ортогональном детерминированном базисе $\{V_{nl}(\rho, \varphi)\}$ в этом случае называют разложением Карунена — Лозва, которое приводит к попарно некоррелированным коэффициентам $z_{nl} = \sigma \lambda_{nl} \xi_{nl}$. Ради простоты предварительно рассмотрим данный вариант модели фонового изображения (не учитывая также явным образом шумовую компоненту).

Задача заключается в выборе «поля зрения» (имеющего вид круглого фрагмента площади πR^2), соответствующего предполагаемому размеру объекта в плоскости изображения, в последовательном переборе всех элементов изображения (в качестве центров фрагментов) и в принятии решения о наличии или отсутствии объекта в текущем поле зрения на основе оценок коэффициентов разложения (5). Если анализируемый фрагмент изображения Γ аддитивно содержит двумерный объект $S(x, y) = S(R\rho, \varphi)$, то разложение принимает вид

$$\begin{aligned} U(R\rho, \varphi) &= S(R\rho, \varphi) + Z(R\rho, \varphi) = \sum_n \sum_l u_{nl} V_{nl}(\rho, \varphi) = \\ &= \sum_n \sum_l (s_{nl} + \sigma_{nl} \xi_{nl}) V_{nl}(\rho, \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

где s_{nl} — коэффициенты разложения сигнала $S(R\rho, \varphi)$. Процесс обнаружения в данном контексте сводится к проверке статистической гипотезы о равенстве нулю (или нет) параметров сигнала $\{s_{nl}, n = 0, 1, \dots, N; l = 0, 1, \dots, n\}$. Иначе говоря, на основании наблюдаемых коэффициентов $\{u_{00}, u_{10}, \dots, u_{NN}\}$ необходимо решить, какая из гипотез (H_0 или H_1) является истинной, где H_0 соответствует утверждению $u_{nl} = \sigma_{nl} \xi_{nl}$ в то время как при H_1 $u_{nl} = s_{nl} + \sigma_{nl} \xi_{nl}$. Отметим, что обнаружитель будет нечувствительным по отношению к «мешающему» параметру — среднему уровню освещенности, если анализ основывать лишь на коэффициентах $(u_{10}, u_{11}, \dots, u_{NN})$, так как по определению полиномов Цернике постоянную составляющую сигнала оценивает коэффициент u_{00} . В дальнейшем будем считать, что сочетания величин $\{(n, l), n = 1, \dots, N; l = 0, \dots, n\}$ необходимым образом упорядочены и $q = 1, \dots, Q$ — их порядковые значения.

3. Для того чтобы выделить на изображении заданный объект $S(R\rho, \varphi)$, очевидно, необходимо вычислить некоторую меру «сходства» коэффициентов разложения текущего фрагмента и объекта. Для решения задачи будем использовать критерий обобщенного отношения правдоподобия, который для случая известных (или оцененных) статистик фона и неизвестной амплитуды $\{a\}$ сигнала (объекта $S(R\rho, \varphi) = aS_0(R\rho, \varphi)$) имеет вид

$$\Lambda = \frac{\max_a \left\{ \left((2\pi)^Q \prod_{q=1}^Q \sigma_q^2 \right)^{-1} e^{-\sum_{q=1}^Q (u_q - as_{0q})^* (u_q - as_{0q}) / 2\sigma_q^2} \right\}}{\left((2\pi)^Q \prod_{q=1}^Q \sigma_q^2 \right)^{-1} e^{-\sum_{q=1}^Q (u_q^* u_q) / 2\sigma_q^2}}, \quad (8)$$

где $\{s_{0q}, q = 1, \dots, Q\}$ — коэффициенты разложения «нормированного» сигнала $S_0(R\rho, \varphi)$ в базисе функций Цернике. Удобнее рассматривать эквивалентную статистику $\ln \Lambda$, так как

$$\ln \Lambda = \max_a \left[-\sum_{q=1}^Q (u_q - as_{0q})^* (u_q - as_{0q}) / 2\sigma_q^2 \right] + \sum_{q=1}^Q (u_q^* u_q) / 2\sigma_q^2.$$

Максимизация $\ln \Lambda$ по неизвестному параметру $\{a\}$ приводит к следующей его оценке:

$$\hat{a} = \frac{\sum (u_q^* s_{0q} + s_{0q}^* u_q) / \sigma_q^2}{2 \left(\sum s_{0q}^* s_{0q} / \sigma_q^2 \right)}. \quad (9)$$

Подставляя \hat{a} в выражение для $\ln \Lambda$, имеем

$$W = \ln \Lambda = \frac{\left(\sum (u_q^* s_{0q} + s_{0q}^* u_q) / \sigma_q^2 \right)^2}{\sum (s_{0q}^* s_{0q} / \sigma_q^2)}. \quad (10)$$

Пусть $u_q = |u_q| \exp(i\theta_q)$ и $s_{0q} = |s_{0q}| \exp(i\varphi_q)$. Тогда числитель W будет иметь вид (опуская на время компоненты σ_q^2)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{q=1}^Q (|u_q| |s_{0q}| \exp[i(\varphi_q - \theta_q)] + |u_q| |s_{0q}| \exp[-i(\varphi_q - \theta_q)]) \right)^2 = \\ & = 2 \left(\sum_{q=1}^Q |u_q| |s_{0q}| \cos[\varphi_q - \theta_q] \right)^2. \end{aligned}$$

Если фрагмент Γ содержит объект, повернутый на угол θ относительно искомого (эталонного) объекта, то в соответствии со свойствами коэффициентов разложения Цернике $\varphi_q - \theta_q = q(l)\theta$.

Для того чтобы функционал W не зависел от угла поворота θ , усредним W по априорному распределению данного «мешающего параметра», считая последний равномерно распределенным в интервале от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} & (2/2\pi) \int_0^{2\pi} \left(\sum_{q=1}^Q |u_q| |s_{0q}| \cos[q(l)\theta] \right)^2 d\theta = \\ & = (1/\pi) \int_0^{2\pi} \left(\sum_{q=1}^Q |u_q| |s_{0q}| \cos[q(l)\theta] \sum_{p=1}^Q |u_p| |s_{0p}| \cos[p(l)\theta] \right) d\theta = \sum_{q=1}^Q |u_q|^2 |s_{0q}|^2. \end{aligned}$$

В результате приходим к инвариантному критерию обнаружения объектов (на фоне с определенными выше корреляционными свойствами), зависящему лишь от инвариантов моментов Цернике текущего фрагмента и селектируемого объекта:

$$\langle W \rangle = \frac{\sum (|u_q|^2 |s_{0q}|^2 / \sigma_q^4)}{\sum |s_{0q}|^2 / \sigma_q^2}. \quad (11)$$

Обнаружение объекта в данном случае сводится к «скользящему» вычислению оценок функционала $\langle W(\Gamma_i) \rangle$ (для каждого фрагмента Γ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$), выделению максимального значения среди них и сравнению $\max \langle W \rangle$ с заданным порогом $S\alpha$. Вычисление константы $S\alpha$, соответствующей заданному уровню значимости критерия (вероятности ложной тревоги α), а также расчет функции мощности критерия требуют знания функции распределения статистики $\langle W \rangle$.

4. Для поиска аппроксимации функции распределения $\langle W \rangle$ перейдем к нормированным коэффициентам разложения объекта:

$$h_q = (s_{0q}/\sigma_q) / \sqrt{\sum |s_{0q}|^2 / \sigma_q^2} = (s_{0q}/\sigma_q) / G_Q. \quad (12)$$

В данной нормировке имеем $\sum (h_q^* h_q) = 1$ и $\langle W \rangle = \sum |u_q|^2 |h_q|^2 / \sigma_q^2$. Рассматривая квадратичную форму $\langle W \rangle$ и учитывая, что $u_q = \delta_q + i\xi_q$, получим

$$\langle W \rangle = \sum (\delta_q^2 / \sigma_q^2 + \xi_q^2 / \sigma_q^2) |h_q|^2 = \sum \xi_q^2 |h_q|^2 + \sum \eta_q^2 |h_q|^2, \quad (13)$$

где $\xi_q, \eta_q \sim N(0, 1)$ и взаимно независимы (при гипотезе H_0), в то время как при альтернативной гипотезе H_1 : $\xi_q \sim N(aG_Q \operatorname{Re}(h_q), 1)$, $\eta_q \sim N(aG_Q \operatorname{Im}(h_q), 1)$.

Поэтому статистика $w_q = (\xi_q^2 + \eta_q^2) |h_q|^2$, инвариантная к повороту фрагмента Γ , имеет χ^2 -распределение с двумя степенями свободы (гипотеза H_0). При наличии на фрагменте объекта (гипотеза H_1) величина w_q имеет нецентральное χ^2 -распределение с параметром нецентральности $\tau_q^2 = a^2 G_Q^2 |h_q|^2$.

В общем случае распределение квадратичной формы вида (13) не соответствует χ^2 -распределению и приемлемую аппроксимацию для него можно получить на основе моментов (или семиинвариантов) переменной $\langle W \rangle$, воспользовавшись разложением в ряд Эджворта [8]. Общая формула для семиинвариантов распределения квадратичной формы известна [8]. Используя ее, находим для $(\langle W \rangle | H_0)$

$$\kappa_k = 2^k (k-1)! \sum_{q=1}^Q |h_q|^{2k}. \quad (14)$$

Отсюда непосредственно следует, что $E(\langle W \rangle | H_0) = \kappa_1 = 2 \sum |h_q|^2 = 2$, дисперсия $\langle W \rangle$ равна $\kappa_2 = 4 \sum |h_q|^4$. В то же время, как нетрудно показать, при альтернативной гипотезе $E(\langle W \rangle | H_1) = a^2 G_Q^2 \sum |h_q|^4$. Все остальные семиинварианты ($\kappa_2, \kappa_3, \dots$) одинаковы для обеих гипотез. В результате для нормированной переменной

$$x = (\langle W \rangle - \kappa_1) / \sqrt{\kappa_2}$$

плотность распределения и функцию распределения можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j(x) \varphi(x), \quad (15)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = - \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_{j-1}(y) \varphi(y), \quad (16)$$

где $\varphi(x)$ — стандартная гауссова плотность, $H_j(x)$ — полиномы Чебышева — Эрмита, $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = \kappa_3/6$, $c_4 = \kappa_4/24$, $c_5 = \kappa_5/120$, $c_6 = (\kappa_6 + 10\kappa_3^2)/720$ и т. д. [8].

Для оценивания мощности критерия рассмотрим функцию $\psi(|h|) = E\langle W(u, h) | H_1 \rangle$ как функцию набора $(|h_1|, |h_2|, \dots, |h_Q|)$. Говорят, что n -мерный вектор $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ мажоризован вектором $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, если, выполнив упорядочение $e_{[1]} \geq e_{[2]} \geq \dots \geq e_{[n]}$, $f_{[1]} \geq f_{[2]} \geq \dots \geq f_{[n]}$, получим

$$\sum_{j=1}^k e_{[j]} \leq \sum_{j=1}^k f_{[j]}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n e_{[j]} = \sum_{j=1}^n f_{[j]}.$$

В этом случае пишут $e < f$. В частности, можно показать [9], что

$$(1/Q, 1/Q, \dots, 1/Q) < (|h_1|^2, |h_2|^2, \dots, |h_Q|^2) < (1, 0, \dots, 0), \quad (17)$$

поскольку $|h_q|^2 \geq 0$, $\sum_{q=1}^Q |h_q|^2 = 1$. Далее, функции $\psi(|h|)$, для которых

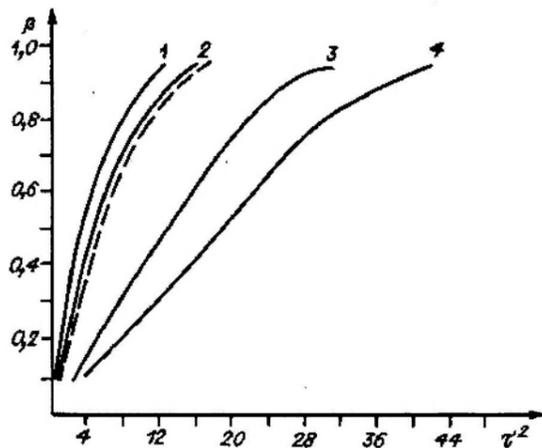
$|h^{(1)}| < |h^{(2)}|$ влечет $\psi(|h^{(1)}|) \leq \psi(|h^{(2)}|)$, называются выпуклыми по Шуру [9]. Такие функции с необходимостью симметричны по перестановкам компонент аргументов. Исходя из этого, можно видеть, что функция $\psi(|h|) = E\langle \sum_{q=1}^Q (\xi_q^2 + \eta_q^2) |h_q|^2 \rangle$ является симметричной шур-выпуклой функцией и, следовательно, достигает минимума в точке, в которой все компоненты вектора $|h|$ равны $1/Q$. В то же время ее максимум достигается в точке $(|h_{[1]}|, |h_{[2]}|, \dots, |h_{[Q]}|) = (1, 0, \dots, 0)$. Наконец, поскольку мощность критерия является монотонно возрастающей функцией $\{\psi(|h|)\}$, то достаточно рассмотреть данные выделенные «предельные» варианты (17), поскольку во всех остальных случаях вероятность действительного обнаружения будет занимать промежуточное значение.

Статистика критерия с максимальной мощностью $w_1 = \xi_{[1]}^2 + \eta_{[1]}^2$ ($|h_{[1]}|^2 = 1$) при гипотезе H_1 имеет нецентральное χ^2 -распределение с двумя степенями свободы и параметром нецентральности

$$\tau^2 = a^2 \tau_1^2 = a^2 s_q^2 / \lambda_q \sigma_q^2 = a^2 s_q^2 / \lambda_q \sigma^2. \quad (18)$$

Данный вариант соответствует ситуации, когда объект имеет форму действительной части одной из функций Цернике $\tilde{v}_n(\rho, \varphi)$. При заданном a наилучшая процедура для проверки H_0 формулируется в следующем виде: равномерно наиболее мощная (РНМ) симметричная инвариантная процедура проверки значимости выделенного коэффициента разложения двумерного сигнала s_q , не зависящая от мешающих параметров (значений нулевых коэффициентов и уровня освещенности), состоит в том, что решение $s_{[1]} = s_q > 0$ принимается при $w_1 > -2\ln\alpha$. Из вида (18) можно заключить, что возможен вырожденный вариант идеального обнаружения при $\lambda_q = 0$ ($\tau^2 = \infty$). Физически такая возможность исключается наличием шумовой компоненты ϵ , приводящей к тому, что в каждой составляющей разложения сигнала фонового изображения появляется аддитивная случайная добавка с дисперсией σ_0^2 (выше мы специально указали, что явно не будем учитывать ее). С этой точки зрения ясно, что при устранении влияния фоновых компонент ($\lambda_q = 0$) шум становится величиной, ограничивающей достоверность обнаружения, так как в действительности $\tau^2 = a^2 s_q^2 / (\lambda_q \sigma^2 + \sigma_0^2)$.

Если ориентация искомого объекта известна, то, как нетрудно видеть из (10), статистика соответствующего (согласованного) критерия при гипотезе H_1 имеет нецентральное χ^2 -распределение с одной степенью свободы и с тем же параметром нецентральности $a^2 G_1^2$. Сравнительное поведение функций



Вероятности обнаружения объекта (мощность критериев — β) как функции отношения сигнал/шум τ^2 :

1 — для «согласованного» обнаружителя; 2 — для инвариантного обнаружителя наиболее благоприятного объекта (с известной и оцениваемой (штриховая линия) дисперсией вариаций фона); 3, 4 — для инвариантного обнаружителя наименее благоприятного объекта (с 10 и 25 членами разложения изображения по полиномам Цернике)

мощности согласованного и инвариантного обнаружителей при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ приведено на рисунке (соответственно кривые 1 и 2).

Рассмотренная процедура является наилучшей тогда, когда важно обнаружить большие индивидуальные коэффициенты разложения исходного селектируемого объекта. Однако возможны ситуации, когда коэффициенты разложения объекта «сравнимы» с их фоновыми вариациями (т. е. $s_{0q}^2 / \sigma_q^2 = \text{const}$), что соответствует наименее благоприятной форме объекта при заданной пространственной структуре фона. Здесь мы приходим ко второй предельной ситуации, когда все коэффициенты $i \hat{n}_i i^2 = 1/Q$. В такой постановке инвариантный критерий принимает гипотезу H_1 , если

$$\langle W \rangle = \left\{ \sum_{q=1}^Q (\xi_q^2 + \eta_q^2) \right\} / Q > C\alpha, \quad (19)$$

где $C\alpha$ выбирается из условия $P_c(0) = \alpha$ (функция распределения $\bar{P}(\tau^2)$ переменной $\langle W \rangle$ — нецентральное χ^2 -распределение с $2Q$ степенями свободы и параметром нецентральности $\tau^2 = a^2 G_Q^2 / Q = a^2 \langle G^2 \rangle$). Здесь переменная $G_Q^2 = \sum s_{0q}^2 / \sigma_q^2$ увеличивается с ростом числа членов разложения Q и параметр нецентральности зависит от ее среднего значения $\langle G_Q^2 \rangle = G_Q^2 / Q$. Для сравнения на рисунке (кривые 3 и 4) приведены графики функции мощности критерия (19) (в зависимости от параметра нецентральности τ^2) при числе степеней свободы $2Q_1 = 20$ и $2Q_2 = 50$. Обратим внимание, что критерий (19) инвариантен не только к повороту, но и к форме обнаруживаемых изображений и поэтому, как видно из сравнения поведения графиков 2 с 3 и 4 на рисунке, имеет слабую обнаруживающую способность. Для известных объектов вероятность их действительного обнаружения будет больше.

5. До сих пор мы считали, что дисперсии коэффициентов разложения $\sigma_q^2 = \sigma^2 \lambda_q$ известны. Чаще всего на практике имеется обучающее множество фрагментов изображения, полученного при некоторых стандартных условиях, которые могут отличаться от текущих. В совокупности это приводит к тому, что λ_q можно считать известными (оцененными на множестве фрагментов), а

общий множитель σ^2 неизвестен и может меняться от фрагмента к фрагменту вследствие нестационарности фона. Для решения проблемы в таком варианте будем редуцировать данные, рассматривая достаточные статистики на множестве инвариантных статистик. Эти статистики называются инвариантно-достаточными, так как они дают всю информацию о семействе распределений, порожденном инвариантными статистиками [10].

Поскольку $\{u_q\}$ — комплексные гауссовы переменные, то их совместное распределение можно представить в виде

$$f(u_1, u_2, \dots, u_Q) = \left\{ \left((2\pi)^Q \prod_{q=1}^Q \sigma^2 \lambda_q \right)^{-1} e^{-\sum_{q=1}^Q (u_q - a s_{0q})^* (u_q - a s_{0q}) / 2\sigma^2 \lambda_q} \right\} = \\ = c(\omega) h(u) \exp\left\{ \sum \omega_i T_i(u) \right\},$$

где

$$c(\omega) = (2\pi\sigma^2)^{-Q} \left(\prod_{q=1}^Q \lambda_q^{-1/2} \right) \exp\left\{ -\frac{a^2}{2\sigma^2} \sum_{q=1}^Q s_{0q}^* s_{0q} / \lambda_q \right\}, \\ h(u) = 1, \quad \omega_1 = a/2\sigma^2, \quad \omega_2 = -1/2\sigma^2, \\ T_1(u) = \sum_{q=1}^Q (s_{0q}^* u_q + u_q^* s_{0q}) / \lambda_q, \quad T_2(u) = \sum_{q=1}^Q u_q^* u_q / \lambda_q. \quad (20)$$

Здесь явно выделен тот факт, что распределение (u_1, u_2, \dots, u_Q) принадлежит двухпараметрическому экспоненциальному семейству распределений, откуда следует, что двумерная статистика (T_1, T_2) является достаточной статистикой для пары параметров (ω_1, ω_2) . Поэтому критерий редуцируется к рассмотрению достаточной статистики (T_1, T_2) и к проверке гипотезы $H_0: \omega_1 = 0$ против $H_1: \omega_1 > 0$ [10]. Параметр ω_2 (или σ^2) играет роль мешающего параметра. Для вывода критерия вновь осуществим нормировку параметров разложения объекта в виде $\sum (s_{0q}^2 / \lambda_q) = 1$, так что $\sum (s_q^2 / \lambda_q) = a^2$. В этой нормировке (как нетрудно показать) статистики $X = T_1/\sigma$ и $Y = (T_2 - T_1^2/4)/\sigma^2$ независимы и распределены соответственно по нормальному закону $N(a/\sigma, 1)$ и χ^2 -распределению с $(2Q - 2)$ степенями свободы. В результате максимальный инвариант (относительно преобразования «масштаба» сигнала) можно взять либо в виде статистики Стьюдента $T = T_1 / \{(T_2 - T_1^2/4)/(2Q - 2)\}^{1/2}$, либо в виде квадрата этой величины T^2 [10]. В данном случае предпочтительнее вторая статистика, так как числитель можно вновь (как и выше) усреднить по распределению углов поворота фрагмента относительно положения объекта. В принятой нормировке получим

$$\langle T_1^2 \rangle = E_\theta(T_1^2) = \sum |u_q|^2 |s_{0q}|^2 / \lambda_q. \quad (21)$$

Знаменатель T^2 является оценкой неизвестной дисперсии и поэтому не зависит от поворота фрагмента.

Таким образом, инвариантный обнаружитель (имеющий вид максимального инварианта относительно вариаций фона и поворота объектов) основывается на следующей статистике:

$$\langle W_1 \rangle = \langle T^2 \rangle = \{ \langle T_1^2 \rangle (2Q - 2) \} / (T_2 - T_1^2/4) = \langle T_1^2 \rangle / \hat{\sigma}^2. \quad (22)$$

В соответствии с неравенствами (17) в первом предельном варианте обнаружения «наилучшего» объекта величину

$$\langle W_1 \rangle = |u_q|^2 (2Q - 2) / \lambda_q \hat{\sigma}^2 \quad (23)$$

можно считать распределенной «по Фишеру» $F(\langle W_1 \rangle | \nu_1, \nu_2)$ [10] с $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 2Q - 2$ степенями свободы и параметром нецентральности $\tau^2 = a^2 G_1^2$. Ясно, что мощность данного критерия (график представлен на рисунке штриховой линией) уменьшается по сравнению с мощностью критерия (13). Асимптотически (при $Q \rightarrow \infty$) мощности критериев совпадают.

6. В общем случае произвольного фона переменные (u_1, u_2, \dots, u_Q) будут взаимно коррелированы. Процедура построения инвариантного обнаружителя в этом случае должна начинаться с вычисления элементов ковариационной матрицы вектора инвариантов моментов Цернике $|U| = (|u_1|^2, |u_2|^2, \dots, |u_Q|^2)'$ по достаточно большому обучающему множеству фрагментов исходного изображения, т. е. с получения оценки

$$K(|U|) = E\{(|U| - E|U|)(|U| - E|U|)'\}.$$

Статистика критерия обнаружения (22) в этом случае модифицируется естественным образом к «разбеленному» виду

$$\langle W_1 \rangle_K = |U'| \hat{K}^{-1} |S| / \hat{\sigma}^2. \quad (24)$$

Селекция объекта в данном случае также сводится к «скользящему» вычислению оценок функционала $\langle W_1 \rangle_K$ (для каждого фрагмента Γ_i , $i = 1, 2, \dots$), выделению максимального значения среди них и сравнению $\{\max \langle W_1 \rangle_K\}$ с заданным порогом. Распределение тестовых статистик аналитически очень сложно получить, однако для больших форматов изображений представляется целесообразным аппроксимировать гистограмму высот локальных максимумов двумерного «поля откликов» частичной суммой из полиномов Эрмита [11], на основании которой можно по заданному уровню ложных тревог вычислить пороговое значение статистики $\langle W_1 \rangle_K$. Этот прием также позволяет обнаруживать неизвестное число объектов, поскольку статистические выводы основываются на сравнительном анализе высот локальных максимумов поля откликов [11]. Практическая проверка изложенной процедуры на экспериментальном материале показала, что она во многих отношениях является удовлетворительной и может быть рекомендована для задач инвариантного обнаружения групп объектов с вариациями их яркостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киричук В. С., Яковенко Н. С. Линейная фильтрация в задаче поиска объектов произвольной ориентации // *Автометрия*. 1991. № 3.
2. Bhatia A., Wolf E. On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets // *Proc. Cambr. Philos. Soc.* 1954. 50. P. 40.
3. Панюшев Д. И., Тхабисимов Д. К., Усиков Д. А., Чеботарев Н. Г. Математические основы построения систем инвариантных признаков в задаче распознавания образов // *Математические методы исследования природных ресурсов земли из космоса*. М.: Наука, 1984.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
5. Teague M. R. Image analysis via the general theory of moments // *JOSA*. 1980. 70, N 8. P. 920.
6. Belkasim S. O., Shridhar M., Ahmadi M. Pattern recognition with moment invariants: a comparative study and new result // *Pattern Recognition*. 1991. 24, N 12. P. 1117.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
8. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966.
9. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983.
10. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
11. Перетягин Г. И. Об обнаружении группы объектов переменной яркости на изображении // *Автометрия*. 1991. № 3.

Поступила в редакцию 21 марта 1994 г.