РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1994

УДК 621.391.1

В. Е. Фарбер

(Москва)

ОБ ОШИБКАХ АМПЛИТУДНОГО КВАНТОВАНИЯ ПРИ ОКРУГЛЕНИИ С НЕДОСТАТКОМ ПО МОДУЛЮ

Исследованы вероятностные характеристики ошибок амплитудного квантования при округлении с недостатком по модулю. Получены условия, при выполнении которых вероятностные характеристики ошибок квантования не зависят от распределения квантуемых процессов.

Введение. Процесс квантования по уровню состоит в замене текущего значения квантуемого процесса (КП) ψ величиной из набора дискретных уровней, равноотстоящих друг от друг на шаг квантования Δ. Ошибка квантования (ОК) зависит от того, как производится эта замена, или, другими словами, от принятого способа округления при квантовании.

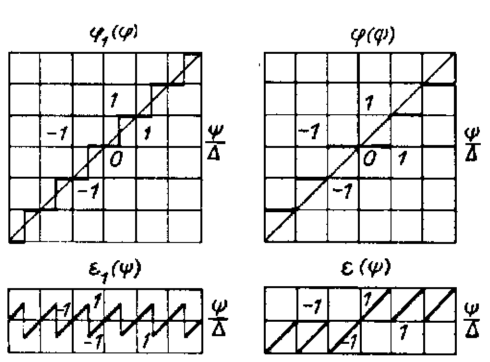
Наиболее широкое применение на практике нашли способы округления до ближайшего целого, когда значение КП заменяется ближайшим к нему дискретным уровнем, и с недостатком по модулю или с усечением [1], когда от значения КП усекается часть, меньшая по модулю шага квантования Δ. При округлении до ближайшего целого зависимость значений ОК $\varepsilon_1(\psi)$ и квантованного процесса $\varphi_1(\psi)$ от значений КП ψ можно представить в виде (см. рисунок)

$$\varphi_1(\psi) = \Delta E\{|\psi|\Delta^{-1} + 0{,}5\}\operatorname{sign}\psi, \qquad \varepsilon_1(\psi) = \psi - \varphi_1(\psi), \tag{1}$$

где $E\{*\}$ — операция взятия целой части. Аналогичные зависимости $\varepsilon(\psi)$ и $\varphi(\psi)$ от ψ при округлении с недостатком по модулю имеют вид (см. рисунок)

$$\varphi(\psi) = \Delta E\{|\psi|\Delta^{-1}\}\operatorname{sign}\psi, \qquad \varepsilon(\psi) = \psi - \varphi(\psi). \tag{2}$$

Для обоснованного выбора шага квантования необходимо оценить результирующее значение ОК на выходе цифровой системы. Для этого обычно пользуются либо оценкой по максимуму, либо вероятностной оценкой [2]. Оценка по максимуму, как известно, сильно завышена. Вероятностная оценка основана на использовании вероятностных характеристик (ВХ) ОК, исследованию которых при округлении до ближайшего целого посвящен ряд работ [3—7]. В этих работах получены условия, которым должна удовлетворять характеристическая функция (ХФ) КП и при выполнении которых ВХ ОК не зависят от параметров распределения КП, что существенно упрощает применение вероятностной оценки. Исследованию же процессов квантования по уровню



при округлении с недостатком по модулю не уделено должного внимания.

Данная работа посвящена исследованию ВХ ОК при округлении с недостатком по модулю и определению условий, при которых можно пользоваться вероятностной оценкой результирующего значения ОС на выходе цифровых систем.

Плотность распределения и характеристическая функция ОК. Согласно (2) $\varepsilon(\psi)$ связана с ψ соотношением

$$\varepsilon(\psi) = \psi - k\Delta, \tag{3}$$

где k — целое и выбирается при фиксированном ψ таким образом, чтобы

$$0 \le k\Delta \le \psi \le (k+1)\Delta \quad \text{или} \quad (k-1)\Delta \le \psi \le k\Delta < 0. \tag{4}$$

Пусть $w_{1\psi}(\psi)$ — одномерная плотность распределения КП. Тогда с учетом (3) и (4) плотность распределения ОК имеет вид

$$\begin{aligned} w_{1\varepsilon}(\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_{1\psi}(k\Delta + \varepsilon) \quad \text{при} \quad 0 \le \varepsilon \le \Delta; \\ w_{1\varepsilon}(\varepsilon) &= \sum_{k=-\infty}^{0} w_{1\psi}(k\Delta + \varepsilon) \quad \text{при} \quad -\Delta \le \varepsilon \le 0, \end{aligned} \tag{5}$$

а для определения характеристической функции ОК можно получить:

$$\begin{aligned} \Theta_{1\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\varepsilon}(\varepsilon)\exp\{j\omega\varepsilon\}d\varepsilon = \int_{-\Delta}^{0} \exp\{j\omega\varepsilon\} \sum_{k=-\infty}^{0} w_{1\psi}(k\Delta + \varepsilon)d\varepsilon + \\ + \int_{0}^{\Delta} \exp\{j\omega\varepsilon\} \sum_{k=0}^{\infty} w_{1\psi}(k\Delta + \varepsilon)d\varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

Используя фильтрующие свойства δ-функции, представим первую сумму (6) с учетом того, что $-\Delta \le \varepsilon \le 0$, последовательно в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{0} w_{1\psi}(k\Delta + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\psi}(\psi) \sum_{k=-\infty}^{0} \delta(\psi - k\Delta - \varepsilon)d\psi = \\ = \int_{-\infty}^{0} w_{1\psi}(\psi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\psi - k\Delta - \varepsilon)d\psi, \end{aligned} \tag{7}$$

а вторую сумму с учетом того, что $0 \le \varepsilon \le \Delta$, аналогично в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_{1\psi}(k\Delta + \varepsilon) = \int_{0}^{\infty} w_{1\psi}(\psi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\psi - k\Delta - \varepsilon)d\psi. \tag{8}$$

Разлагая сумму δ-функций в ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\psi - k\Delta - \varepsilon) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{j\frac{2\pi}{\Delta}k(\psi - \varepsilon)\right\} \tag{9}$$

и подставляя это разложение в (7) и (8), а затем (7) и (8) в (6), получим после интегрирования по ε

$$\Theta_{1\varepsilon}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\left\{-j\Delta\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right\}}{j\Delta\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}k\right)} \int_{-\infty}^{0} w_{1\psi}(\psi)\exp\left\{j\frac{2\pi}{\Delta}k\psi\right\}d\psi +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left\{j\Delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right\}-1}{j\Delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}k\right)}\int_{0}^{\infty}w_{1\psi}(\psi)\exp\left\{j\frac{2\pi}{\Delta}k\psi\right\}d\psi. \tag{10}$$

Пусть КП принимает только положительные значения, т. е.

$$w_{1\psi}(\psi)\equiv 0 \quad \text{при} \quad \psi<0. \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}w_{1\psi}(\psi)\exp\left\{j\frac{2\pi}{\Delta}k\psi\right\}d\psi=\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta}k\right), \tag{12}$$

где $\Theta_{1\psi}(*)$ — ХФ КП, из (10) получим

$$\Theta_{1\varepsilon}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\frac{\exp\left\{j\Delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right\}-1}{j\Delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}k\right)}. \tag{13}$$

Аналогично, если КП принимает только отрицательные значения:

$$w_{1\psi}(\psi)\equiv 0 \quad \text{при} \quad \psi\ge 0, \tag{14}$$

из (10) нетрудно получить, что

$$\Theta_{1\varepsilon}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\frac{1-\exp\left\{-j\Delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right\}}{j\Delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}k\right)}. \tag{15}$$

Пусть выполняется следующее условие [4]:

$$\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta}k\right)=0 \quad \text{при} \quad k\ne 0. \tag{16}$$

Тогда, как это следует из (13) и (15), ХФ ОК равны

$$\Theta_{1\varepsilon}(\omega)=\left(\exp\{j\Delta\omega\}-1\right)/j\Delta\omega \quad \text{и} \quad \Theta_{1\varepsilon}(\omega)=\left(1-\exp\{-j\Delta\omega\}\right)/j\Delta\omega,$$

что совпадает с ХФ величин, равномерно распределенных на интервалах от 0 до Δ и от $-\Delta$ до 0 соответственно.

Если наряду с (16) выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{0}w_{1\psi}(\psi)\exp\left\{j\frac{2\pi}{\Delta}k\psi\right\}d\psi=\int_{0}^{\infty}w_{1\psi}(\psi)\exp\left\{j\frac{2\pi}{\Delta}k\psi\right\}d\psi=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{при } k=0,\\ 0 & \text{при } k\ne 0,\end{cases} \tag{17}$$

то из (10) следует, что $\Theta_{1\varepsilon}(\omega)=(\sin\Delta\omega)/\Delta\omega$, что соответствует ХФ величины, равномерно распределенной на интервале от $-\Delta$ до Δ.

Числовые характеристики ошибок квантования. Математическое ожидание m_ε и дисперсия σ_ε^2 ОК, а также взаимная корреляционная функция $K_{\psi\varepsilon}$ ОК и КП определяются выражениями

$$m_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\psi) w_{1\psi}(\psi) d\psi, \qquad \sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(\psi) w_{1\psi}(\psi) d\psi - m_\varepsilon^2,$$

$$K_{\psi\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \varepsilon(\psi) w_{1\psi}(\psi) d\psi - m_\psi m_\varepsilon. \tag{18}$$

Представим $\varepsilon(\psi)$ (см. рисунок) в виде ряда Фурье [8]

$$\varepsilon(\psi) = \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n}{\Delta} \psi - \Delta\eta(-\psi), \tag{19}$$

где $\eta(x)$ — единичная функция: $\eta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\eta(x) = 0$ при $x < 0$.

Подставляя (19) в (18), заменяя затем синус разностью экспоненциальных функций, после интегрирования для случаев (11) или (14) по аналогии с [3] нетрудно получить:

$$m_\varepsilon = \frac{\Delta}{2} \operatorname{sign}\psi - j \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n\right), \tag{20}$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = -\frac{\Delta^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{nk} \left[\Theta_{1\psi}\left\{\frac{2\pi}{\Delta}(n+k)\right\} - \Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n\right) \Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} k\right)\right], \tag{21}$$

$$K_{\psi\varepsilon} = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial\omega} \Theta_{1\psi}(\omega) \Big|_{\omega = 2\pi n/\Delta} + j m_\psi \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n\right). \tag{22}$$

Пусть, наряду с (11) или (14), выполняются условия (16) и

$$\Theta'_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n\right) = \frac{\partial}{\partial\omega} \Theta_{1\psi}(\omega) \Big|_{\omega = 2\pi n/\Delta} = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 0. \tag{23}$$

Тогда, как это следует из (20)—(22),

$$m_\varepsilon = \frac{\Delta}{2} \operatorname{sign}\psi, \qquad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \qquad K_{\psi\varepsilon} = 0. \tag{24}$$

Условию (16) точно удовлетворяет, например, ХФ КП, равномерно распределенного на интервале длиной $m\Delta$, $m = 1, 2, \ldots$, а условию (23) — ХФ КП, представляющего собой аддитивную смесь как минимум двух процессов, ХФ каждого из которых удовлетворяет условию (16).

Характеристическая функция нормально распределенных процессов

$$\Theta_{1\psi}(\omega) = \exp\left\{j\omega m_\psi - \frac{\omega^2 \sigma_\psi^2}{2}\right\}$$

условиям (16) и (23) точно не удовлетворяет, однако при увеличении ω она быстро убывает и, как показали расчеты [2, 4, 7], при $\sigma_\psi/\Delta > 0{,}5$ с достаточной для практических целей степенью точности можно считать, что имеет место выполнение условий (16) и (23), а при $|m_\psi| > 3\sigma_\psi$ — выполнение условий (11) и (16).

В случае, когда условия (11) и (16) не выполняются, проанализировать поведение плотности распределения (5) и числовых характеристик (18) ОК без расчетов на ЭВМ затруднительно. Как показали расчеты, в указанных случаях ЧХ ОК существенно зависят от параметров распределения КП. В качестве иллюстрации рассмотрим случай симметричной плотности распределения

$w_{1\psi}(\psi)$ относительно $m_\psi = 0$ и покажем, что при любом отношении σ_ψ/Δ ОК сильно коррелированы с КП, хотя при увеличении σ_ψ/Δ плотность распределения ОК стремится к равномерной.

Итак, согласно (2) $\varphi(\psi) = \psi - \varepsilon(\psi)$, откуда

$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_\psi^2 + \sigma_\varepsilon^2 - 2K_{\psi\varepsilon}. \quad (25)$$

Квантованный процесс $\varphi(\psi)$ является дискретным по уровню, и исходя из (2) его закон распределения определяется соотношением

$$w_{1\varphi}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^+ \delta(\varphi - k\Delta) + \sum_{k=-\infty}^{0} p_k^- \delta(\varphi - k\Delta), \quad (26)$$

где p_k^+ и p_k^- — вероятности, с которыми квантованный процесс принимает положительные и отрицательные значения $k\Delta$:

$$p_k^+ = \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} w_{1\psi}(\psi)d\psi, \qquad p_k^- = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} w_{1\psi}(\psi)d\psi. \quad (27)$$

Дисперсии квантованного и квантуемого процессов с учетом симметричности $w_{1\psi}(\psi)$ относительно $m_\psi = 0$ определяются как

$$\sigma_\varphi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 w_{1\varphi}(\varphi)d\varphi = 2\sum_{k=0}^{\infty} k^2\Delta^2 \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} w_{1\psi}(\psi)d\psi,$$

$$\sigma_\psi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 w_{1\psi}(\psi)d\psi = 2\sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \psi^2 w_{1\psi}(\psi)d\psi.$$

Делая замену переменных $x = \psi - k\Delta$, имеем

$$\sigma_\varphi^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} k^2\Delta^2 \int_0^{\Delta} w_{1\psi}(x + k\Delta)dx,$$

$$\sigma_\psi^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} k^2\Delta^2 \int_0^{\Delta} w_{1\psi}(x + k\Delta)dx + 2\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\Delta} (x^2 + 2k\Delta x) w_{1\psi}(x + k\Delta)dx,$$

откуда следует, что

$$\sigma_\psi^2 \geq \sigma_\varphi^2, \qquad 2K_{\psi\varepsilon} \geq \sigma_\psi^2. \quad (28)$$

При увеличении σ_ψ^2 наступает момент, когда можно считать, что $w_{1\psi}(\psi)$ постоянна при изменении ψ от $k\Delta$ до $(k+1)\Delta$. В этом случае для симметричной $w_{1\psi}(\psi)$ можно считать, что выполняются условия (17) и $w_{1\psi}(\psi)$ является равномерной на интервале от $-\Delta$ до Δ. При этом ОК коррелированы с КП, причем согласно (28) $K_{\psi\varepsilon} \geq \sigma_\varepsilon^2/2 = \Delta^2/6$.

Заключение. Пусть КП принимает либо только положительные (11), либо только отрицательные (14) значения. Тогда, если выполняются условия (16) и (23), ЧХ ОК определяются соотношениями (24) и не зависят от ВХ КП. Если же КП может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то даже при выполнении условий (16) и (23) ЧХ ОК существенно зависят от ВХ КП.

Нормально распределенные процессы условиям (11), (14), (16) и (23) точно не удовлетворяют. Однако с достаточной для практики степенью точности можно считать, что условия (11) и (14) выполняются при $|m_\psi| \geq 3\sigma_\psi$, а условия (16) и (23) — при $\sigma_\psi/\Delta \geq 0{,}5$.

Следуя изложенной в работе методике, можно получить выражения и для многомерных ОК, аналогичных полученным, например, в [2, 4], применительно к способу округления до ближайшего целого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов.—М.: Сов. радио, 1973.
2. Верешкин А. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации.—М.: Сов. радио, 1973.
3. Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле.—М.: Энергия, 1969.
4. Косякин А. А. Статистическая теория квантования по уровню // АиТ.—1966.—№ 6.
5. Баранов Л. А. Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления.—М.: Энергоатомиздат, 1990.
6. Лившиц Н. А., Фарбер В. Е. Числовые характеристики ошибок амплитудного квантования // АиТ.—1978.—№ 12.
7. Лившиц Н. А., Фарбер В. Е. Сравнительное исследование числовых характеристик ошибок счета ЦВУ при различных модификациях способа округления до ближайшего целого // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ.—1977.—Вып. 6.
8. Бронштейн И. Н., Семендяев Н. А. Справочник по математике.—М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 4 марта 1993 г.