РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

УДК 621.3

В. А. Иванов, В. С. Киричук

(Новосибирск)

ОЦЕНИВАНИЕ ПЕРИОДА И СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СИГНАЛА ЗА ПЕРИОД

В ряде задач вибродиагностики машинного оборудования возникает необходимость исследования периодических сигналов, являющихся аналогами скрытых периодичностей. Решена задача оценивания периода и среднего значения сигнала при неизвестной его модели, который не может быть представлен несколькими гармоническими функциями. Предлагаемый критерий определения периода является равномерно наиболее мощным при известной дисперсии случайного шума. При неизвестной дисперсии предложенная процедура не гарантирует оптимальности, однако эффективность ее контролируема. Методика опробирована на реальных данных.

Одной из важных задач науки и техники является проблема выявления скрытых периодичностей. В ряде задач вибродиагностики машинного оборудования возникает необходимость исследования периодических сигналов, являющихся аналогами скрытых периодичностей (длительность периода которых составляет несколько периодов на выборку, что не позволяет использовать спектральные методы). Один из подходов оценивания периода для известной структуры модели периодического сигнала приведен в работе [1], а в [2] рассмотрены задачи оценивания периодических трендов.

В данной работе решается задача оценивания периода и среднего значения сигнала при неизвестной его модели, который не может быть представлен несколькими гармоническими функциями. Будем считать заданным диапазон изменения периода обрабатываемого сигнала, например частоту вращения механизма (турбины, двигателя).

Постановка задачи. Представим регистрируемый сигнал $Y(t)$ в виде

$$Y(t_i) = m(t_i) + \xi(t_i), \tag{1}$$

где t_i — моменты регистрации сигнала: $t_i = \Delta t i$; $\xi(t_i)$ — случайный шум, сопровождающий измерения $\xi(t_i) \in N(0, \sigma^2)$.

Необходимо проверить гипотезу H_0 о периодичности $m(t_i)$ при заданном возможном диапазоне периода $L \leq T \leq M$ и при ее выполнении оценить величину периода и среднее значение сигнала за период.

Критерий для H_0. Предположим, что период равен T, и представим его в виде $T = n\Delta t$ (в период укладывается целое число отсчетов), тогда

$$m_i = m(t_i) = m(t_i - [t_i/T]T), \qquad i = 1, N, \tag{2}$$

где N — общее число измерений, [ ] — символ целочисленного деления. С учетом (2) выражение (1) преобразуется к виду (при справедливости гипотезы H_0):

$$
\begin{aligned}
&Y_i = m_i + \xi_i, && i = 1, n; \\
&Y_{i+n} = m_i + \xi_{i+n}, && \\
&Y_{i+nk} = m_i + \xi_{i+nk}, && i + kn \le N.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Альтернативным является предположение о несправедливости (3), т. е. $m_i \neq \neq m_{i+nk}$ для всех возможных k. Равномерно наиболее мощный несмещенный критерий [3] основан на статистике:

$$
\begin{gathered}
W_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{q-1} \left\{Y_{i+kn} - \widehat{m}_i\right\}^2, \\
\widehat{m}_i = (1/q) \sum_{k=0}^{q-1} Y_{i+kn}, \qquad q = [N/n].
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Статистика W при H_0 подчиняется распределению χ^2 с $n(q-1)$ степенями свободы. Если выполняется альтернативная гипотеза H_1, то W_n подчиняется нецентральному $\chi^2(\kappa)\sigma^2$-распределению с $n(q-1)$ степенями свободы и параметром нецентральности:

$$
\kappa^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{q-1} \left\{m_{i+kn} - \overline{m}_i\right\}^2 / \sigma^2,
$$

$$
\overline{m}_i = (1/q) \sum_{k=0}^{q-1} m_{i+kn}.
$$

Гипотеза H_0 отвергается, если

$$
W_n > C\alpha\sigma^2, \tag{5}
$$

где $C\alpha$ — квантиль $\chi^2_{n(q-1)}$. Проверка данной гипотезы требует знания значения дисперсии исходного шума. При неизвестной дисперсии для построения критерия требуются дополнительные предположения о характере поведения m_i, $i = 1, N$. Предполагая, что m_i — есть реализация случайного процесса, приходим к критерию [3]:

$$
W^* = \frac{q \sum_{i=1}^{n} \widehat{m}_i^2}{(1/(q-1)) \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{q-1} \left\{Y_{i+kn} - \widehat{m}_i\right\}^2} < C^*\alpha, \tag{6}
$$

где $C^*\alpha$ — квантиль распределения Фишера $F_{n,\, n(q-1)}$.

Оценивание периода. Так как неравенства (5) и (6) могут выполняться (принимается гипотеза H_0) на некотором множестве (Ω_n) значений n, определяемом

$$
n \in \Omega_n, \quad \text{если} \quad W_n < C\alpha\sigma^2, \tag{7}
$$

то следует выбрать такое n из Ω_n, которое наиболее адекватно экспериментальным данным. Непосредственно осуществлять поиск минимума W_n (как следует из принципа метода максимального правдоподобия) для $n \in \Omega_n$ некорректно, поскольку приходится сравнивать величины, имеющие различные законы распределения:

$$W_n \in \chi^2_{N-n}\sigma^2,$$

где число степеней свободы χ^2-распределения зависит от n. При достаточно больших n и известной дисперсии можно воспользоваться преобразованием

$$J = \sqrt{n(q-1)}\,(W_n/(n(q-1)\sigma^2) - 1).$$

Статистика J при гипотезе H_0 стремится к $N(0, 2)$, а при альтернативе H_1

$$J \to N(\kappa^2/\sqrt{n(q-1)}, 2).$$

Преобразование, «стабилизирующее дисперсию» [4] при H_0,

$$\sqrt{n(q-1)}\,\left\{\log[W_n/(n(q-1))] - \log\sigma\right\} \to N(0, 2).$$

При неизвестной дисперсии данные преобразования невыполнимы, поэтому приходится изменять постановку задачи. Будем рассматривать зависимость между m_i только для первых l-значений (l — число точек в минимальном периоде). Тогда (3) преобразуется к виду

$$Y_{i+nk} = m_i + \xi_{i+nk}, \qquad i = 1, l, \;\; k = 0, q-1,$$

$$\hat{m}_i = (1/q)\sum_{k=0}^{q-1} Y_{i+kn}, \qquad i = 1, l, \tag{8}$$

$$W = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{q-1}\left\{Y_{i+kn} - \hat{m}_i\right\}^2.$$

Статистика при H_0 подчинена $\chi^2\sigma^2$-распределению с $l(q-1)$ степенями свободы, а при альтернативе H_1 — нецентральному $\chi^2(\kappa)\sigma^2$-распределению с $l(q-1)$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$\kappa^2 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{q-1}\left\{m_{i+kn} - \overline{m}_i\right\}^2/\sigma^2.$$

При такой постановке распределения как при H_0, так и при H_1 не зависят от оцениваемого параметра, и принцип метода максимального правдоподобия (или метода наименьших квадратов, что в данной постановке тождественно) приводит к поиску минимума W по параметру n и сравнению в точке минимума статистики

$$W^* = \frac{q\sum_{i=1}^{l}\hat{m}_{iq}^2}{(1/(q-1))\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{q-1}\left\{Y_{i+kn} - \hat{m}_i\right\}^2}$$

с выбранным порогом $C^*\alpha$. Если гипотеза о наличии периодичности принимается, то осуществляем оценивание всех m_i, $i = 1, n$, т. е. среднего значения сигнала за период.

Точность оценивания периода. Для определения точности оценивания периода рассмотрим поведение статистики W вблизи истинного значения периода T. Принимая $n\Delta t = T + \delta$, предполагая допустимость разложения $m(t)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь первым членом разложения, получаем

$$\hat{m}_i = (1/q)\sum_{k=0}^{q-1}\{m(t_i) + m'(t_i)k\delta + \xi_{i+nk}\} = m_i + m_i'\delta(q-1)/2 + \bar{\xi}_i,$$

а статистика

$$W = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{q-1}\{m_i'\delta(k-(q-1)/2) + \xi_{i+nk} - \bar{\xi}_i\}^2 \in \chi^2(\kappa^2),$$

$$\kappa^2 = \sum_{i=1}^{l} m_i'^2\delta^2 q(q^2-1)/12.$$

Таким образом, величина W (с точностью до сомножителя σ^2) подчиняется нецентральному χ^2-закону распределения с $l(q-1)$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$\kappa^2 = \delta^2 q(q^2-1)l\overline{m'^2}/12. \tag{9}$$

В точке истинного значения периода параметр нецентральности $\kappa^2 = 0$. Точность оценивания периода характеризуется соотношением

$$\sigma^2(T) \approx \{E\{\partial\log L/\partial\delta\}^2\}^{-1} = \frac{12\sigma^2}{l(q^2-1)q\overline{n'^2}}$$

(L — функция правдоподобия), которое кубическим образом зависит от числа анализируемых периодов и обратно пропорционально среднеквадратичному значению производной сигнала. Такое резкое поведение функционала, с одной стороны, обеспечивает высокую точность оценивания периода, а с другой — требует большого объема вычислений (так как экстремум W определяется перебором возможных значений T), поскольку даже при представлении периода с точностью $\pm\Delta t/2$ возможен пропуск экстремума. Поэтому, исходя из (9), желательный шаг при переборе периодов должен быть порядка $\Delta t/q$.

На практике период, как правило, подвержен «малым возмущениям». В этих условиях характер зависимости W от n определяет стратегию обработки: необходимо допустить некоторую вариацию ε_k (определяемую диапазоном Δ возможных изменений периода) начальной точки k-го периода. Такое допущение приводит к поиску минимума функционала по ε_k, $k = 1, q-1$:

$$W = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{q-1}\{Y_{i+kn+\varepsilon_k} - \hat{m}_i\}^2,$$

$$\hat{m}_i = (1/q)\sum_{k=0}^{q-1} Y_{i+kn+\varepsilon_k} \quad \text{и} \quad -\Delta < \varepsilon_k < \Delta, \quad k = 1, q-1.$$

Если число измеряемых точек «достаточно» велико и изменения сигнала «достаточно» резкие, т. е.

$$2\sigma^2/l\overline{m'^2} \ll 1,$$

то поиск возмущающих значений ε_k осуществляется по парным сравнениям значений сигналов для всех периодов реализации

$$\min_{\varepsilon_k}\sum_{i=1}^{l}\{Y_i - Y_{i+kn+\varepsilon_k}\}^2.$$

Реально существуют ситуации, когда значение периода стабильно, а «внутри периода» есть некоторая нестационарность сигнала. В этом случае предлагается поиск возмущений периода осуществлять для его частей, которые затем учитываются при вычислении среднего значения сигнала за период.

В рассматриваемом подходе не затрагивалась проблема несовпадения математических ожиданий сигнала в точках измерений, т. е.

$$m(t_i) = m(t_i + kT + \eta) \approx m(t_i + kT) + m'(t)\eta,$$

где $\Delta t/2 \leq \eta \leq \Delta t/2$. Такое предположение оправдано в том случае, когда Δt мало и вносимая погрешность $m'(t)\eta$ незначительна. При несоблюдении этого условия необходимо воспользоваться стандартными интерполяционными формулами без изменения методики.

Предлагаемый критерий определения периода является равномерно наиболее мощным при известной дисперсии случайного шума. При неизвестной дисперсии нельзя гарантировать оптимальности предложенной процедуры, однако эффективность ее контролируема и зависит от числа используемых измерений и составляет величину порядка $(T - L)/T$.

Численные эксперименты. Для численных экспериментов использованы данные, полученные с датчиков виброускорений, установленных на шпильках крышки цилиндра дизельного двигателя карьерного самосвала (грузоподъемность 170 т). Интервал дискретизации 50 мкс. Число оборотов двигателя по тахометру $n = 700$ об./мин, что составляет $T = 3428$ точек на два оборота коленчатого вала (рабочий цикл четырехтактного двигателя). Полученное значение оценки периода составило $T_0 = 3436$ точек. Для $n = 430$ об./мин $T = 2793$, а $T_0 = 2891$. Период вращения коленчатого вала является стабильной величиной в течение секунд (порядка сотни периодов, а время регистрации менее 10 периодов). Предполагалось, что нестабильным является сигнал внутри периода. Учет этой нестационарности позволяет на 30 % уменьшить среднеквадратичное отклонение при вычислении среднего значения сигнала за период. Кроме того, знание вариаций сигнала «внутри» периода необходимо для оценки синхронности работы цилиндров, что определяет состояние двигателя.

При регистрации виброскоростей паровой турбины (мощность ~30 МВт) датчики устанавливались на опорах турбины и цилиндров (компрессоров). В данном случае устойчиво выявлялись замаскированные периодичности, кратные периоду вращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.—М.: Мир, 1968.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.—М.: Мир, 1976.
3. Леман Э. Проверка статистических гипотез.—М.: Наука, 1964.
4. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение.—М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 8 февраля 1994 г.