РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1994

УДК 681.335.2 : 621.396.62

В. А. Федоров

(Томск)

АНАЛИЗ ФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ЗАДЕРЖЕК КВАДРАТУРНЫХ КОМПОНЕНТ УЗКОПОЛОСНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Анализируются два способа формирования квадратурных компонент узкополосного случайного процесса при использовании его мгновенных значений, отделенных друг от друга на интервал $\Delta t = 1/4f_0$, где f_0 — опорная частота.

Общеизвестны преимущества низкочастотного комплексного представления сигналов и шумов. Однако традиционные способы формирования квадратурных компонент (КК) часто неприемлемы из-за недостаточной оперативности. Поэтому представляется целесообразным исследовать точностные характеристики наиболее простых и быстрых методов получения КК и дать практические рекомендации по их применению.

В работе [1] проанализирован метод, когда в качестве КК узкополосного колебания $u(t)$ с известной центральной частотой f_0 используются взятые через интервал задержки $\Delta t = 1/4f_0$ пары мгновенных значений самого $u(t)$. Далее на качественном уровне кратко рассматривается случай, когда f_0 априори неизвестна, а прием $u(t)$ осуществляется идеальным прямоугольным фильтром. Примененный автором работы [1] анализ на уровне рассмотрения огибающей и фаз колебания $u(t)$ позволил получить практические выражения для дисперсии оценки второй квадратурной компоненты лишь для гауссова процесса.

Целью данной работы является более детальный анализ ошибок описанного в [1] метода получения КК, когда частота сигнала f_c точно неизвестна, например, при наличии частотных доплеровских сдвигов. Предполагаем, что прием $u(t)$ осуществляется на фоне независимого аддитивного шума $n(t)$, т. е. необходимо получить КК смеси сигнала и шума $y(t) = u(t) + n(t)$, что также налагает дополнительные ограничения на возможности метода. Наконец, для увеличения точности формирования КК анализируется модификация метода [1].

Рассмотрим типичную практическую ситуацию, когда в некоторой полосе частот осуществляется прием узкополосного стационарного центрированного случайного процесса. Входной полосовой фильтр приемника должен обеспечивать достаточно полный охват спектральной плотности (СП) сигнала $G_c(f)$ с учетом его возможного сдвига относительно некоторой опорной частоты f_0. В локационных приложениях из-за доплеровских расстроек разных знаков для получения наименьшей скорости изменения КК целесообразно в качестве опорной принять излучаемую частоту. Также предполагаем, что в пределах полосы пропускания спектр шума белый, т. е. СП шума $G_ш(f)$ на выходе приемной системы полностью определяется АЧХ фильтра, центральная частота которого равна f_0. С учетом сделанных предположений сигнал и шум можно записать в виде

$$u(t) = U(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi_c(t)] \quad \text{и} \quad n(t) = N(t)\cos[2\pi f_0 t + \varphi_ш(t)],$$

где $U(t)$, $N(t)$ — огибающие, $\varphi_с(t)$, $\varphi_ш(t)$ — случайные фазы сигнала и шума. Полагая также, что СП сигнала и шума симметричны относительно $f_с$ и f_0, соответственно имеем следующие выражения для корреляционных функций указанных аддитивных компонент:

$$B_с(\tau) = \sigma_с^2 \rho_с(\tau) \cos \cdot 2\pi f_с \tau \quad \text{и} \quad B_ш(\tau) = \sigma_ш^2 \rho_ш(\tau) \cos \cdot 2\pi f_0 \tau,$$

где $\sigma_с^2$, $\sigma_ш^2$ — мощности сигнала и шума, $\rho_с(\tau)$, $\rho_ш(\tau)$ — огибающие их корреляционных функций.

Высокочастотное центрированное колебание $y(t) = u(t) + n(t)$ можно представить с помощью низкочастотных КК смеси сигнала и шума $Y_с(t)$, $Y_s(t)$ относительно опорной частоты f_0 [2]:

$$y(t) = Y_с(t) \cos \cdot 2\pi f_0 t - Y_s(t) \sin \cdot 2\pi f_0 t, \tag{1}$$

где $Y_с(t) = U_с(t) + N_с(t)$, $Y_s(t) = U_s(t) + N_s(t)$, а $U_с(t) = U(t)\cos\theta(t)$, $U_s(t) = U(t)\sin\theta(t)$, $N_с(t) = N(t)\cos\varphi_ш(t)$, $N_s(t) = N(t)\sin\varphi_ш(t)$ — отдельные КК сигнала и шума, $\theta(t) = 2\pi f_д t + \varphi_с(t)$, $f_д = f_с - f_0$ — расстройка частоты сигнала относительно опорной. При этом комплексная огибающая имеет вид: $Z(t) = Y_с(t) + jY_s(t)$, а корреляционные функции КК сигнала $R_с(\tau) = \sigma_с^2 \rho_с(\tau) \times \cos \cdot 2\pi f_д \tau$ и шума $R_ш(\tau) = \sigma_ш^2 \rho_ш(\tau)$ [2].

Для реализации метода, изложенного в [1], частота дискретизации высокочастотного сигнала $f_д = 1/\Delta t = 4f_0$, а интервал дискретизации квадратурных составляющих ΔT предполагается кратным $4\Delta t$, т. е. $\Delta T = 4\Delta t m$, где $m = 1, 2, ..., M$. Максимальное M определяется шириной спектра колебания $y(t)$.

Рассмотрим некоторый момент времени t_0, удовлетворяющий условию $t_0 = n\Delta T$, где n — целое число. Тогда из (1): $y(t_0) = Y_с(t_0)$, $y(t_0 - \Delta t) = Y_s(t_0 - \Delta t)$, $y(t_0 + \Delta t) = -Y_s(t_0 + \Delta t)$. Таким образом, отсчеты высокочастотного колебания, разнесенные на $\Delta t = 1/4f_0$, совпадают с отсчетами низкочастотных КК ($y(t_0 + \Delta t)$ с точностью до знака). При этом полученные КК относятся к разным моментам времени, сдвинутым друг относительно друга на Δt. Учитывая медленность изменения КК на интервале Δt, можно записать $y(t_0 - \Delta t) \approx Y_s(t_0)$ и $y(t_0 + \Delta t) \approx -Y_s(t_0)$, т. е. в качестве оценок $Y_s(t_0)$ можно принять величины:

$$\widetilde{Y}_s(t_0) = y(t_0 - \Delta t) \quad \text{или} \quad \widetilde{Y}_s(t_0) = -y(t_0 + \Delta t). \tag{2}$$

(Если знак перед $y(t_0 + \Delta t)$ не инвертируется, как в [1], то комплексную огибающую необходимо записать в виде $Z(t_0) = y(t_0) - jy(t_0 + \Delta t)$.)

Для увеличения точности формирования последовательности пар отсчетов КК, относящихся к одному моменту времени, целесообразно осуществить линейную интерполяцию имеющихся отсчетов $\widetilde{Y}_s$:

$$\widehat{Y}_s(t_0) = [y(t_0 - \Delta t) - y(t_0 + \Delta t)]/2. \tag{3}$$

Найдем квадраты среднеквадратичных ошибок (средние мощности методических ошибок) оценок (2) $\varepsilon_1^2 = D[\widetilde{Y}_s(t_0) - Y_s(t_0)]$ и (3) $\varepsilon_2^2 = D[\widehat{Y}_s(t_0) - Y_s(t_0)]$, где $D[\cdot]$ — символ дисперсии. Полагая, что стационарные независимые процессы $u(t)$ и $n(t)$, по крайней мере, дважды дифференцируемы, и разлагая в ряд Маклорена получающиеся при статистических усреднениях медленно меняющиеся вблизи нулевых τ корреляционные функции КК, находим

$$\varepsilon_1^2 = \left\{-\sigma_c^2 [\rho_c''(0) - 4\pi^2 f_д^2] - \sigma_ш^2 \rho_ш''(0)\right\}/16 f_0^2 + O(1/f_0^4), \tag{4}$$

$$\varepsilon_2^2 = \frac{\sigma_c^2 [\rho_c^{(4)}(0) - 24\pi^2 f_д^2 \rho_c''(0) + 16\pi^4 f_д^4] + \sigma_ш^2 \rho_ш^{(4)}(0)}{1024 f_0^4} + O(1/f_0^6). \tag{5}$$

Последние выражения запишем в спектральных терминах. Используя известные соотношения, связывающие производные в нуле огибающей корреляционной функции $\rho(\tau)$ с алгебраическими моментами СП $G(f)$ [3], получаем

$$\varepsilon_1^2 = \pi^2 \left\{\sigma_c^2 (\kappa_2 [G_c(f)] + f_д^2) + \sigma_ш^2 \kappa_2 [G_ш(f)]\right\}/4 f_0^2, \tag{6}$$

$$\varepsilon_2^2 = \pi^4 \left\{\sigma_c^2 (\kappa_4 [G_c(f)] + 6 f_д^2 \kappa_2 [G_c(f)] + f_д^4) + \sigma_ш^2 \kappa_4 [G_ш(f)]\right\}/64 f_0^4, \tag{7}$$

где $\kappa_2[G_c(f)]$, $\kappa_4[G_c(f)]$, $\kappa_2[G_ш(f)]$, $\kappa_4[G_ш(f)]$ — центральные моменты второго и четвертого порядков СП сигнала и шума.

Пронормируем средние мощности методических ошибок ε_1^2 и ε_2^2 на мощность обрабатываемой смеси $\sigma^2 = \sigma_c^2 + \sigma_ш^2$ и введем безразмерные параметры:

$$\varepsilon_1^2/\sigma^2 = \pi^2 [q(1+\gamma^2) + \eta^2]/[16 k^2 (q+1)], \tag{8}$$

$$\varepsilon_2^2/\sigma^2 = \pi^4 [q(\beta_c + 6\gamma^2 + \gamma^4) + \beta_ш \eta^4]/[1024 k^4 (q+1)], \tag{9}$$

где $q = \sigma_c^2/\sigma_ш^2$ — отношение сигнал/шум (С/Ш), $k = f_0/2\sqrt{\kappa_2[G_c(f)]}$ — средний коэффициент узкополосности сигнала (так как $\sqrt{\kappa_2[G_c(f)]} = \Delta f_{эс}$ — по смыслу среднеквадратичная полуширина СП сигнала), $\gamma = f_д/\Delta f_{эс}$ — относительный доплеровский сдвиг, $\eta = 2\sqrt{\kappa_2[G_ш(f)]}/2\Delta f_{эс} = \Delta f_{эш}/\Delta f_{эс}$ — отношение ширин СП шума (или среднеквадратичной ширины полосы пропускания входного фильтра для белого шума на его входе) и сигнала, $\beta_c = \kappa_4[G_c(f)]/\Delta f_{эс}^4$, $\beta_ш = \kappa_4[G_ш(f)]/\Delta f_{эш}^4$ — эксцессы СП сигнала и шума. β_c и $\beta_ш$ характеризуют форму частотной протяженности СП сигнала и шума и в основном определяются крутизной спада $G_c(f)$ и $G_ш(f)$ (или квадрата АЧХ-фильтра) при удалении от их центральных частот.

Приведенные в различных формах соотношения (4)—(9) позволяют оценить ошибки «квадратуризации» для реальных параметров высокочастотных колебаний и приемных систем. Решая вопрос о применимости оценок (2) и (3), целесообразно ориентироваться на максимально возможные ошибки, например, при задании максимально возможных частотных расстроек $|f_д|_{max}$ или $|\gamma|_{max}$. При этом, чтобы не потерять полезную информацию о сигнале, необходимо обеспечить достаточно полный охват входным фильтром спектра $G_c(f)$, т. е. должно выполняться $\eta > |\gamma|_{max}$.

Проанализируем случай больших отношений С/Ш. Тогда при $q \to \infty$ $\varepsilon_1^2/\sigma_c^2 = \pi^2(1+\gamma^2)/16k^2$ и $\varepsilon_2^2/\sigma_c^2 = \pi^4(\beta_c + 6\gamma^2 + \gamma^4)/1024k^4$, т. е. методические ошибки обоих методов определяются главным образом коэффициентом узкополосности сигнала. Также существенно влияние параметра γ при больших расстройках f_c относительно опорной f_0. (Заметим, что частный случай выражения для $\varepsilon_1^2/\sigma_c^2$ при $\gamma = 0$ идентичен аналогичному выражению (18) работы [1], полученному другим способом для гауссовых случайных сигналов.) При

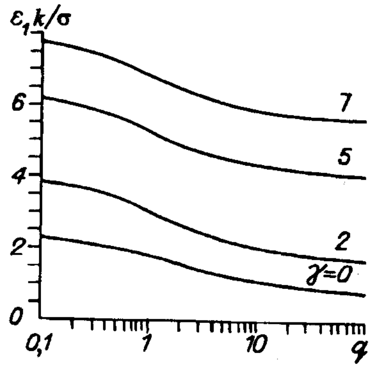

Рис. 1

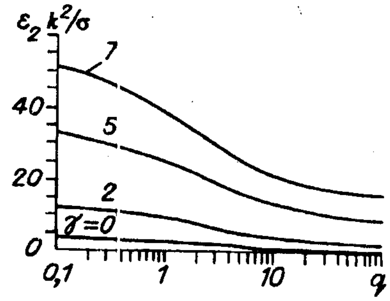

Рис. 2

наличии шума увеличения $f_д$ и связанной с ней полосы пропускания приемника (параметр η) приводят к еще большему росту рассматриваемых методических ошибок. Это объясняется уменьшением коэффициента узкополосности всей смеси сигнала и шума.

На рис. 1 и 2 в качестве примера изображены нормированные среднеквадратичные ошибки получения КК для гауссовой СП сигнала и гауссовой формы входного фильтра, т. е. $\beta_с = 3$ и $\beta_ш = 3$. При этом для каждого относительного доплеровского сдвига γ параметр $\eta = |\gamma| + 3$, что соответствует практически полному охвату входным фильтром сигнальной компоненты. Из рисунков отчетливо видны преимущества метода получения КК с линейной интерполяцией.

Одним из разумных критериев применимости рассмотренных методов может служить отношение их ошибок к мощности шумов квантования $P_{ШК}$, т. е. должно выполняться [1]:

$$\varepsilon_1^2 \le P_{ШК}, \qquad \varepsilon_2^2 \le P_{ШК}. \tag{10}$$

Полагая $y(t)$ гауссовым стационарным процессом, с учетом известного правила «трех сигм» можно получить [1]:

$$P_{ШК} = 3\sigma^2/2^{2n}, \tag{11}$$

где n — число разрядов аналого-цифрового преобразования (АЦП). Тогда из (8), (10), (11) получаем условие применимости оценки (2):

$$k_1 \ge 0{,}45 \cdot 2^n\sqrt{[q(1+\gamma^2)+\eta^2]/(q+1)}, \tag{12}$$

из (9)—(11) — условие применимости оценки (3):

$$k_2 \ge 0{,}42 \cdot 2^{n/2}([q(\beta_с + 6\gamma^2 + \gamma^4) + \beta_ш\eta^4]/(q+1))^{1/4}. \tag{13}$$

Для случая отсутствия шумов на рис. 3 изображены графики зависимостей минимально допустимых значений коэффициентов узкополосности $k_{1\min} = 0{,}45 \cdot 2^n\sqrt{1+\gamma^2}$ и $k_{2\min} = 0{,}42 \cdot 2^{n/2}(\beta_с + 6\gamma^2 + \gamma^4)^{1/4}$ от относительных частотных расстроек γ при заданном числе n разрядов АЦП. Сплошные линии соответствуют

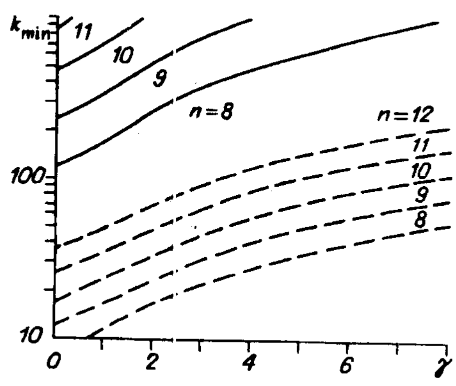

Рис. 3

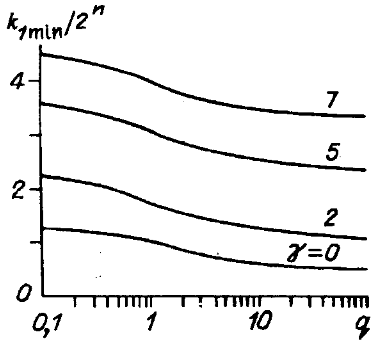

Рис. 4

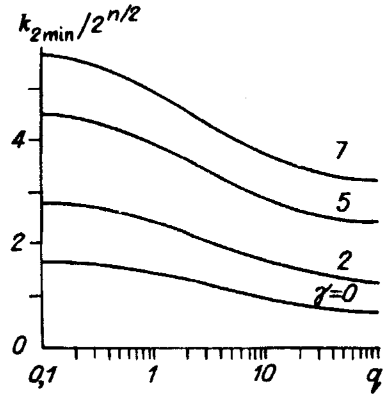

Рис. 5

оценке (2), а штриховые — оценке (3). Отметим сильное влияние частотных сдвигов на $k_{1\min}$ и $k_{2\min}$. На рис. 4, 5 изображены графики зависимостей нормированных минимально допустимых величин $k_{1\min}/2^n$ и $k_{2\min}/2^{n/2}$ от отношения С/Ш при различных γ. При этом, как и ранее, СП сигнала и шума гауссовы, а $\eta = |\gamma| + 3$. Приведенные графики также подтверждают преимущества метода получения КК с линейной интерполяцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Побережский Е. С. Анализ метода дискретизации узкополосных колебаний // Изв. вузов. Радиоэлектроника.—1984.—27, № 3.
2. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем.—М.: Радио и связь, 1991.
3. Хименко В. И. О нормированных спектральных моментах стационарных случайных процессов // Изв. вузов. Радиофизика.—1976.—19, № 8.

Поступила в редакцию 4 марта 1993 г.