

УДК 535.317.6

Ю. А. Клевцов  
(Новосибирск)

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ХОДА ЛУЧЕЙ  
ЧЕРЕЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ДИФРАКЦИОННЫЙ  
ОПТИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ  
НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОДЛОЖКЕ

Рассмотрены методы расчета хода лучей в системах с синтезированными осесимметричными дифракционными оптическими элементами на криволинейной подложке, описываемой уравнением первого и второго рода. Получены удобные дифференциальные формулы для расчета хода узких пучков лучей в частных случаях плоской и сферической подложек, а также подложки, описываемой кривой второго порядка. Последние могут использоваться как для точного синтеза анастигматических систем с дифракционными оптическими элементами, так и для приближенного анализа в области теории аберраций.

**Введение.** Методы расчета хода лучей через синтезированный осесимметричный дифракционный оптический элемент (в дальнейшем ДОЭ) на плоской подложке изложены в [1, 2]. В работе [3] излагаются общие методы расчета хода лучей через ДОЭ, использованные в пакете программ расчета и моделирования оптических систем DEMOS (разработка ГОИ им. С. И. Вавилова).

Формулы для расчета хода узких пучков лучей, аналогичные формулам Юнга для обычной оптики, в приложении к голографическим оптическим элементам впервые дал Смит [4]. Однако для синтезированных дифракционных элементов, где дифракционная структура описывается фазовой функцией, а не параметрами двух интерферирующих волновых фронтов, образующих голограмму, они неудобны.

В настоящей работе формулы для расчета хода узких пучков лучей получены в несколько иной, дифференциальной форме, удобной для применения к синтезированным осесимметричным ДОЭ на неплоской подложке, причем попутно пришлось пересмотреть также и методику расчета лучей в приложении к этим элементам, включив в нее различные частные случаи асферических подложек, что, как можно надеяться, в связи с недостаточной освещенностью этого вопроса в литературе [1] должно представить определенный интерес для специалистов, занимающихся расчетом оптических систем с дифракционными элементами.

Расчет хода лучей. Известно [1], что эйконал волнового поля, формируемого ДОЭ в  $m$ -м порядке дифракции, выражается следующей зависимостью:

$$\Phi_m = \Phi + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \Phi_0, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны света, в которой работает элемент;  $\lambda_0$  — условная длина волны, используемая для аналитического выражения структуры ДОЭ и называемая в дальнейшем длиной волны записи;  $\Phi$  и  $\Phi_m$  — эйконалы падающей и дифрагировавшей волн, заданные в плоскости элемента;  $\Phi_0$  — эйконал записи, или, как его еще иногда называют, фазовая функция элемента.

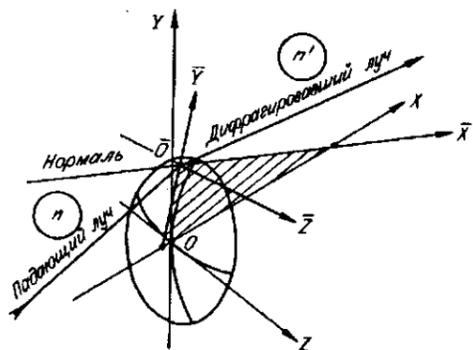


Рис. 1

Формула (1) остается справедливой и для ДОЭ на неплоской подложке, в этом случае эйконал  $\Phi_m$ ,  $\Phi$  и  $\Phi_0$  должны быть заданы на криволинейной поверхности элемента.

Для осесимметричного ДОЭ эйконал записи можно представить в виде ряда

$$\Phi_0 = a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + \dots, \quad (2)$$

где  $p = \sqrt{y^2 + z^2}$  ( $p > 0$ ).

В формуле (2) учтены также и нечетные члены ряда фазовой функции, что дает возможность

исследования на так давно открытых Русиновым aberrаций четного порядка в приложении к ДОЭ [5].

Обратимся к рис. 1, где изображен ход луча через осесимметричный преломляющий ДОЭ. Введем систему координат нормали к подложке в точке падения луча. Начало новой системы координат поместим в точку  $\bar{O}$  пересечения падающего луча с подложкой с координатами  $x_0, y_0, z_0$  в системе координат с центром в вершине подложки. Направим ось  $\bar{OX}$  по нормали к подложке в точке падения луча и условимся, что положительное направление этой оси совпадает с направлением распространения света. Оси  $\bar{OY}$  и  $\bar{OZ}$  будут лежать в плоскости, касательной к поверхности в точке  $\bar{O}$ , и в принципе могут быть развернуты произвольным образом вокруг нормали, однако для сокращения вычислений удобнее поместить ось  $\bar{OY}$  в плоскость меридионального сечения, проходящего через точку  $\bar{O}$  и ось  $OX$ , приняв, что положительные направления исходной ( $OY$ ) и новой ( $\bar{OY}$ ) осей совпадают. Таким образом, ось  $\bar{OY}$  является по сути линией пересечения плоскости меридионального сечения с плоскостью, касательной к подложке в точке  $\bar{O}$ . Направим ось  $\bar{OZ}$  так, чтобы система координат оказалась правой. Обозначим направляющие косинусы осей системы координат нормали в исходной системе координат, как это показано в табл. 1.

Согласно [6], направляющие косинусы осей исходной системы координат в новой системе можно представить табл. 2.

Для последующего анализа нам потребуются еще формулы преобразования координат при сдвиге и повороте осей [6]:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}\alpha_1 + \bar{y}\alpha_2 + \bar{z}\alpha_3 + x_0, \\ y &= \bar{x}\beta_1 + \bar{y}\beta_2 + \bar{z}\beta_3 + y_0, \\ z &= \bar{x}\gamma_1 + \bar{y}\gamma_2 + \bar{z}\gamma_3 + z_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Продифференцируем, как это сделано в [1], выражение (1) в системе координат нормали к поверхности (см. рис. 1):

| Оси        | $OX$       | $OY$      | $OZ$       |
|------------|------------|-----------|------------|
| $\bar{OX}$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $\bar{OY}$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| $\bar{OZ}$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ |

| Оси  | $\bar{OX}$ | $\bar{OY}$ | $\bar{OZ}$ |
|------|------------|------------|------------|
| $OX$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $OY$ | $\beta_1$  | $\beta_2$  | $\beta_3$  |
| $OZ$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ |

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_m}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}.\end{aligned}\quad (4)$$

Обозначим направляющие косинусы падающего на ДОЭ луча в системе координат нормали к поверхности в точке падения  $O$  как  $\bar{\delta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$  и аналогично для дифрагировавшего луча в этой же системе координат как  $\bar{\delta}', \bar{\mu}', \bar{\nu}'$ . Как известно [1], направляющие косинусы падающего и дифрагировавшего лучей связаны с соответствующими частными производными эйконала:

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \frac{1}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & \bar{\mu}' &= \frac{1}{n'} \frac{\partial \Phi_m}{\partial y}, \\ \bar{\nu} &= \frac{1}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, & \bar{\nu}' &= \frac{1}{n'} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}.\end{aligned}\quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\begin{aligned}n' \bar{\mu}' &= n \bar{\mu} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \\ n' \bar{\nu}' &= n \bar{\nu} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}.\end{aligned}\quad (6)$$

Кроме того,

$$\bar{\delta}' = \sqrt{1 - \bar{\mu}'^2 - \bar{\nu}'^2}.\quad (7)$$

Формулы (6) и (7) связывают направляющие косинусы падающего и дифрагировавшего лучей, однако ими еще нельзя пользоваться, так как в них входят неизвестные пока производные фазовой функции (2), которые должны быть определены в системе координат нормали к поверхности.

Предположим, что нам известно уравнение осесимметричной подложки ДОЭ, а также координаты точки пересечения ее падающим лучом с направляющими косинусами  $\delta, \mu, \nu$  (заданными в системе координат с центром в вершине подложки), определенные тем или иным итеративным методом [7]. Тогда, чтобы получить направляющие косинусы дифрагировавшего луча в той же системе координат, необходимо будет проделать следующее:

1. Перевести направляющие косинусы падающего луча в систему координат нормали к подложке в точке падения.
2. Рассчитать производные эйконала записи в системе координат нормали в точке падения луча.
3. Рассчитать направляющие косинусы дифрагировавшего луча в системе координат нормали.
4. Перевести направляющие косинусы дифрагировавшего луча в исходную систему координат с центром в вершине подложки.

Дальнейшая процедура расчета хода лучей тривиальна: по известным формулам перехода [7] подготавливается аналогичный цикл расчета хода луча через следующую поверхность.

Перевод направляющих косинусов падающего луча в систему координат нормали осуществляется по формулам [6]:

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \delta \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1, \\ \bar{\mu} &= \delta \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2, \\ \bar{\nu} &= \delta \alpha_3 + \mu \beta_3 + \nu \gamma_3.\end{aligned}\quad (8)$$

Аналогично осуществляется перевод направляющих косинусов дифрагировавшего луча из системы координат нормали в систему координат с центром в вершине подложки:

$$\begin{aligned}\delta' &= \bar{\delta}'\alpha_1 + \bar{\mu}'\alpha_2 + \bar{\nu}'\alpha_3, \\ \mu' &= \bar{\delta}'\beta_1 + \bar{\mu}'\beta_2 + \bar{\nu}'\beta_3, \\ \nu' &= \bar{\delta}'\gamma_1 + \bar{\mu}'\gamma_2 + \bar{\nu}'\gamma_3.\end{aligned}\tag{9}$$

Необходимые для расчета параметров дифрагировавшего луча частные производные эйконала записи в системе координат нормали могут быть получены с помощью формул преобразования системы координат (3):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} &= \frac{d\Phi_0}{d(p^2)} \frac{\partial(p^2)}{\partial y}, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} &= \frac{d\Phi_0}{d(p^2)} \frac{\partial(p^2)}{\partial z}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial(p^2)}{\partial y} &= 2\left(y \frac{\partial y}{\partial y} + z \frac{\partial z}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial(p^2)}{\partial z} &= 2\left(y \frac{\partial y}{\partial z} + z \frac{\partial z}{\partial z}\right),\end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial y} &= \beta_2, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \gamma_2, \\ \frac{\partial y}{\partial z} &= \beta_3, & \frac{\partial z}{\partial z} &= \gamma_3.\end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} &= 2(y\beta_2 + z\gamma_2) \frac{d\Phi_0}{d(p^2)}, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} &= 2(y\beta_3 + z\gamma_3) \frac{d\Phi_0}{d(p^2)}.\end{aligned}$$

Согласно выражению (2), можно записать, что

$$\Phi_0 = a_2 p^2 + a_3 (p^2)^{3/2} + a_4 (p^2)^2 + \dots$$

При дифференцировании по параметру  $p^2$  это дает:

$$\frac{d\Phi_0}{d(p^2)} = a_2 + \frac{3}{2} a_3 p + 2a_4 p^2 + \dots$$

Если ввести обозначение:

$$\psi = 2a_2 + 3a_3 p + 4a_4 p^2 + \dots,\tag{10}$$

где, как и ранее,  $p = \sqrt{y^2 + z^2}$  ( $p > 0$ ), то частные производные эйконала записи в системе координат нормали можно представить в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} &= (y\beta_2 + z\gamma_2)\psi, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} &= (y\beta_3 + z\gamma_3)\psi.\end{aligned}\quad (11)$$

Остается еще определить направляющие косинусы осей системы координат нормали. Для уравнения поверхности подложки, заданного в неявной форме:  $F(x, y, z) = 0$ , направляющие косинусы нормали к поверхности (ось  $\overline{OX}$ ), согласно [6], можно определить по формулам:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -F'_x / \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}, \\ \beta_1 &= -F'_y / \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}, \\ \gamma_1 &= -F'_z / \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2},\end{aligned}\quad (12)$$

где  $F'_x$ ,  $F'_y$  и  $F'_z$  — соответствующие частные производные. Здесь и далее знак перед радикалом соответствует случаю дифракционного преломления, при котором дифрагировавший луч распространяется в том же направлении, что и падающий. Случай дифракционного отражения описывается ниже.

Выведем формулы расчета направляющих косинусов нормали для некоторых частных случаев поверхностей:

1. Поверхность вращения второго порядка:

$$y^2 + z^2 - 2rx + (1 - e^2)x^2 = 0, \quad (13)$$

$$F'_x = 2[(1 - e^2)x - r], \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z,$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sqrt{(r^2 - (y^2 + z^2)(1 - e^2)) / (r^2 + (y^2 + z^2)e^2)}, \\ \beta_1 &= -y / \sqrt{r^2 + (y^2 + z^2)e^2}, \\ \gamma_1 &= -z / \sqrt{r^2 + (y^2 + z^2)e^2}.\end{aligned}\quad (14)$$

Для сферической поверхности  $e^2 = 0$ , а формулы для направляющих косинусов оси  $\overline{OX}$  упрощаются:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (r - x) / r, \\ \beta_1 &= -y / r, \\ \gamma_1 &= -z / r.\end{aligned}\quad (15)$$

2. Поверхность вращения первого рода:

$$\begin{aligned}y^2 + z^2 - 2rx + (1 - e^2)x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots &= 0, \\ F'_x &= -2r + 2(1 - e^2)x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots, \\ F'_y &= 2y, \\ F'_z &= 2z,\end{aligned}\quad (16)$$

а расчет направляющих косинусов производится по общим формулам (12).

3. Поверхность вращения второго рода:

$$x - \frac{1}{2r} p^2 - a_3 p^3 - a_4 p^4 - \dots = 0, \quad (17)$$

$$F'_x = 1, \quad F'_y = -yP, \quad F'_z = -zP,$$

где  $P = \frac{1}{r} + 3a_3 p + 4a_4 p^2 + \dots$ .

Учитывая изложенные выше соображения по выбору системы координат нормали, нетрудно определить направляющие косинусы осей  $\overline{OY}$  и  $\overline{OZ}$ . Уравнение плоскости, касательной к подложке в точке  $\overline{O}(x_0, y_0, z_0)$ , может быть записано в виде [6]:

$$F'_x(X - x_0) + F'_y(Y - y_0) + F'_z(Z - z_0) = 0. \quad (18)$$

Уравнение плоскости меридионального сечения, проходящего через ту же точку и ось подложки, согласно [6], можно представить определителем третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ j & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

где  $j$  — абсцисса какой-либо точки, лежащей на оси подложки. Это даст:

$$Yz_0 - Zy_0 = 0. \quad (19)$$

Линия пересечения плоскостей (18) и (19), являющаяся по определению, данному выше, осью  $\overline{OY}$ , в соответствии с [6] определяется уравнением прямой, проходящей через точку с координатами  $x_0, y_0, z_0$ :

$$\frac{X - x_0}{k} = \frac{Y - y_0}{g} = \frac{Z - z_0}{q},$$

где  $k = -(yF'_y + zF'_z)$ ,  $g = yF'_x$ ,  $q = zF'_x$ . Вводя величину

$$D = \sqrt{y^2(F_x'^2 + F_y'^2) + 2yzF_y'F_z' + z^2(F_x'^2 + F_z'^2)},$$

можно записать направляющие косинусы оси  $\overline{OY}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= (yF'_y + zF'_z)/D, \\ \beta_2 &= -yF'_x/D, \\ \gamma_2 &= -zF'_x/D. \end{aligned} \quad (20)$$

1. Поверхность вращения второго порядка:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \sqrt{(y^2 + z^2)/(r^2 + (y^2 + z^2)e^2)}, \\ \beta_2 &= y\sqrt{(r^2 - (y^2 + z^2)(1 - e^2))/((y^2 + z^2)[r^2 + (y^2 + z^2)e^2])}, \\ \gamma_2 &= z\sqrt{(r^2 - (y^2 + z^2)(1 - e^2))/((y^2 + z^2)[r^2 + (y^2 + z^2)e^2])}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для сферической поверхности:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \sqrt{y^2 + z^2}/r, \\ \beta_2 &= y(r - x)/r\sqrt{y^2 + z^2}, \\ \gamma_2 &= z(r - x)/r\sqrt{y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

2. Поверхность вращения первого рода:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 2\sqrt{(y^2 + z^2)/(F_x'^2 + 4(y^2 + z^2))}, \\ \beta_2 &= -\frac{yF_x'}{\sqrt{(y^2 + z^2)[F_x'^2 + 4(y^2 + z^2)]}}, \\ \gamma_2 &= -\frac{zF_x'}{\sqrt{(y^2 + z^2)[F_x'^2 + 4(y^2 + z^2)]}}.\end{aligned}\quad (23)$$

3. Поверхность вращения второго рода:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= P\sqrt{(y^2 + z^2)/(1 + (y^2 + z^2)P^2)}, \\ \beta_2 &= \frac{y}{\sqrt{(y^2 + z^2)[1 + (y^2 + z^2)P^2]}}, \\ \gamma_2 &= \frac{z}{\sqrt{(y^2 + z^2)[1 + (y^2 + z^2)P^2]}}.\end{aligned}\quad (24)$$

По определению, данному выше, прямая, перпендикулярная плоскости меридионального сечения в точке  $\bar{O}(x_0, y_0, z_0)$ , есть ось  $\bar{OZ}$ . Из условия перпендикулярности прямой и плоскости [6] получим

$$k = 0, \quad g = iz, \quad q = -iy,$$

где  $i$  — коэффициент пропорциональности. Поэтому

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 0, \\ \beta_3 &= -z/\sqrt{y^2 + z^2}, \\ \gamma_3 &= y/\sqrt{y^2 + z^2}.\end{aligned}\quad (25)$$

Легко видеть, что условие (25) обращает производную фазовой функции (11) по координате  $\bar{z}$  в нуль, поэтому с учетом соотношений (6) и (7) закон дифракционного преломления в системе координат нормали может быть описан формулами

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}' &= \text{sign} n' \sqrt{1 - \bar{\mu}'^2 - \bar{\nu}'^2}, \\ n' |\bar{\mu}'| &= n\bar{\mu} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} (y\beta_2 + z\gamma_2)\psi, \\ n'\bar{\nu}' &= n\bar{\nu}.\end{aligned}\quad (26)$$

При дифракционном отражении абсолютная величина угла дифракции не изменяется, однако отраженный луч меняет направление. Чтобы его правильно определить, необходимо, как это указывалось выше, сменить знаки направляющих косинусов осей  $\bar{OX}$  и  $\bar{OZ}$ , однако в этом случае пришлось бы отказаться от смены знака  $n'$  и вообще от ввода отрицательных показателей преломления, что не позволило бы использовать развиваемый алгоритм совместно с известными схемами расчета хода лучей на ЭВМ [7]. Поэтому в формулах (26) при дифракционном отражении система координат нормали не разворачивается, а вместо этого принимается, что  $n' < 0$  и  $\bar{\mu}'$  не зависит от знака  $n'$ .

Таким образом, полученные выше выражения для направляющих косинусов дифрагировавшего луча в системе координат нормали (26) с учетом полинома для  $\psi$  (10) и формул перехода из одной системы координат в другую (8) и (9), а также выражений для направляющих косинусов осей координат

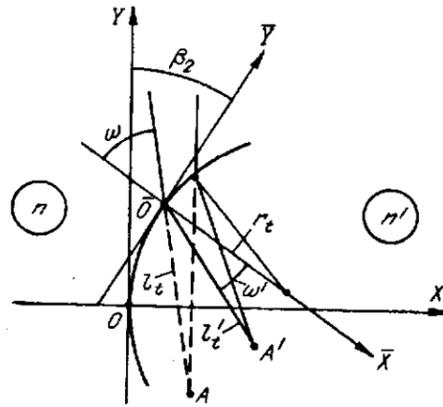


Рис. 2

чей в меридиональном сечении к дифференциальной форме. При  $v = 0$  и  $z = 0$  из (26) и (10) получим

$$n' \bar{\mu}' = n \bar{\mu} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \beta_2 \frac{d\Phi_0}{dy}.$$

Однако так как из (20) при  $z = 0$  вытекает, что  $\beta_2 = -\frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}$ , то

$$\frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}} \frac{d\Phi_0}{dy} = \frac{d\Phi_0}{dS},$$

т. е. не что иное, как производная фазовой функции, взятая по длине дуги подложки. Легко заметить также, что  $\bar{\mu} = \sin\omega$  и  $\bar{\mu}' = \sin\omega'$ . Поэтому закон преломления (отражения) луча в меридиональном сечении осесимметричного ДОЭ можно представить в виде

$$n' \sin\omega' = n \sin\omega - \frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{d\Phi_0}{dS}. \quad (27)$$

Продифференцируем выражение (27) по длине дуги подложки:

$$n' \cos\omega' \frac{d\omega'}{dS} = n \cos\omega \frac{d\omega}{dS} - \frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{d^2\Phi_0}{dS^2}. \quad (28)$$

В монографии [8] установлены связи:

$$\frac{d\omega}{dS} = \frac{\cos\omega}{l_t} - \frac{1}{r_t}, \quad (29)$$

$$\frac{d\omega'}{dS} = \frac{\cos\omega'}{l'_t} - \frac{1}{r'_t}.$$

Подставляя (29) в (28), получим

$$\frac{n' \cos^2\omega'}{l'_t} - \frac{n \cos^2\omega}{l_t} = \frac{n' \cos\omega'}{r'_t} - \frac{n \cos\omega}{r_t} - \frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{d^2\Phi_0}{dS^2}. \quad (30)$$

Выражение (30) связывает отрезки  $l_t$  и  $l'_t$  вдоль главного луча. При  $m = 0$  формула (30) переходит в широкоизвестный меридиональный инва-

(12), (20), (25) и их частных вариантов позволяют производить полный цикл расчета луча через ДОЭ на осесимметричной криволинейной подложке практически всех применяемых в практике расчета оптических систем типов.

Расчет хода узкого пучка лучей в меридиональной плоскости. Рассмотрим ход узкого пучка лучей в меридиональном сечении осесимметричного дифракционного оптического элемента на криволинейной подложке (рис. 2). Вывод меридионального инварианта ДОЭ может быть проделан способом, аналогичным описанному в [8]. Однако вначале преобразуем закон преломления лу-

риант Юнга [8]. Для ДОЭ на плоской подложке  $r_t = \infty$ , а  $d^2\Phi_0/dS^2$  вырождается в  $d^2\Phi_0/dy^2$ . Таким образом, для плоских ДОЭ инвариант (30) упрощается:

$$\frac{n' \cos^2 \omega}{l'} - \frac{n \cos^2 \omega}{l} = -\frac{m\lambda}{\lambda_0} \frac{d^2\Phi_0}{dy^2}. \quad (31)$$

Определим вторую производную фазовой функции (2) по длине дуги для частного случая подложки второго порядка. По правилу дифференцирования сложной функции [6]

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0}{dS} &= \frac{d\Phi_0}{dy} \frac{dy}{dS}, \\ \frac{d^2\Phi_0}{dS^2} &= \frac{d^2\Phi_0}{dy^2} \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \frac{d^2y}{dS^2} \frac{d\Phi_0}{dy}. \end{aligned} \quad (32)$$

Кроме того [6],

$$dy/dS = F_x / \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (33)$$

Учитывая (12), получим

$$\frac{dy}{dS} = -\sqrt{(r^2 - y^2(1 - e^2)) / (r^2 + y^2e^2)}, \quad (34)$$

$$\left(\frac{dy}{dS}\right)^2 = \frac{r^2 - y^2(1 - e^2)}{r^2 + y^2e^2}. \quad (35)$$

Дифференцируя выражение (34) по  $S$ , после преобразований и упрощений удастся получить

$$\frac{d^2y}{dS^2} = -\frac{yr^2}{(r^2 + y^2e^2)^2}. \quad (36)$$

Подставляя (35) и (36) в (32), получим окончательно:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dS^2} = \frac{r^2 - y^2(1 - e^2)}{r^2 + y^2e^2} \frac{d^2\Phi_0}{dy^2} - \frac{yr^2}{(r^2 + y^2e^2)^2} \frac{d\Phi_0}{dy}. \quad (37)$$

Для кривой второго порядка меридиональный и сагиттальный радиусы кривизны вычисляются по формулам [9], после небольших преобразований можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} r_t &= (r^2 + y^2e^2)\sqrt{r^2 + y^2e^2}/r^2, \\ r_s &= \sqrt{r^2 + y^2e^2}, \end{aligned} \quad (38)$$

в связи с чем формула (37) может быть упрощена:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dS^2} = \left(1 - \frac{y^2}{r_s^2}\right) \frac{d^2\Phi_0}{dy^2} - \frac{y}{r_t r_s} \frac{d\Phi_0}{dy}. \quad (39)$$

Последнее выражение для сферической поверхности можно привести к виду

$$\frac{d^2\Phi_0}{dS^2} = \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) \frac{d^2\Phi_0}{dy^2} - \frac{y}{r^2} \frac{d\Phi_0}{dy}. \quad (40)$$

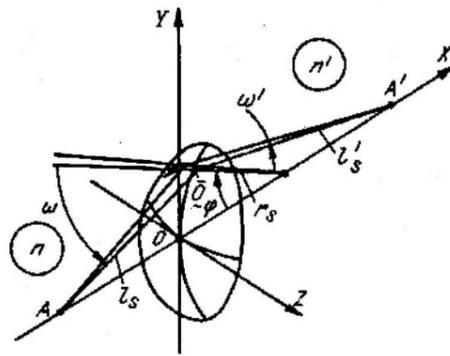


Рис. 3

Расчет хода узкого пучка лучей в сагиттальной плоскости. Рассмотрим ход узкого пучка лучей в сагиттальном сечении осесимметричного ДОЭ (рис. 3). Для упрощения анализа положим, как это обычно делается [9], что точка предмета лежит на оси симметрии дифракционного элемента. Из рис. 3 можно заметить, что при вращении меридиональной плоскости, в которой лежит главный луч узкого пучка, вокруг оси симметрии сагиттальные лучи будут описывать конус с центром в точке пересечения главного луча с оптической осью в пространстве изображений. Таким образом (см. рис. 3), точка  $A'$  будет

сагиттальным изображением точки  $A$ . Выпишем следующие, очевидные из рис. 3 соотношения:

$$-y = r_s \sin \varphi = l_s \sin(\omega + \varphi) = l'_s \sin(\omega' + \varphi). \quad (41)$$

Из (41) получим

$$\sin \omega = r_s \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{1}{l_s} - \frac{\cos \omega}{r_s} \right), \quad (42)$$

$$\sin \omega' = r_s \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{1}{l'_s} - \frac{\cos \omega'}{r_s} \right).$$

Подставляя (42) в (27) и разделив на  $r_s \operatorname{tg} \varphi$ , получим

$$\frac{n'}{l'_s} - \frac{n}{l_s} = \frac{n' \cos \omega' - n \cos \omega}{r_s} - \frac{m \lambda}{\lambda_0} \frac{1}{r_s \operatorname{tg} \varphi} \frac{d\Phi_0}{dS}. \quad (43)$$

Поскольку на главном луче  $\cos \omega$ ,  $\cos \omega'$ ,  $r_s \operatorname{tg} \varphi$  и  $d\Phi_0/dS$  постоянны, условие (43) выполняется для любого положения точки предмета, в том числе и когда она лежит вне оси симметрии ДОЭ. Выражение (43) связывает отрезки  $l_s$  и  $l'_s$  вдоль главного луча. При  $m = 0$  оно переходит в широкоизвестный сагиттальный инвариант Юнга [8]. Для ДОЭ на плоской подложке  $r_s = \infty$ , а выражение (43) упрощается:

$$\frac{n'}{l'_s} - \frac{n}{l_s} = - \frac{m \lambda}{\lambda_0} \frac{d\Phi_0}{y dy}. \quad (44)$$

Выше было показано, что

$$\frac{d\Phi_0}{dS} = \frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}} \frac{d\Phi_0}{dy}. \quad (45)$$

Из рис. 3 следует, что  $r_s \operatorname{tg} \varphi = -y \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ , однако поскольку  $\operatorname{tg} \varphi = -F'_y / F'_x$ , то

$$r_s \operatorname{tg} \varphi = y (\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2} / F'_x)$$

и из (45) вытекает:

$$\frac{1}{r_s \sin \varphi} \frac{d\Phi_0}{dS} = \frac{F_x'^2}{F_x'^2 + F_y'^2} \frac{d\Phi_0}{y dy}. \quad (46)$$

Для подложки второго порядка формула (46) упрощается:

$$\frac{1}{r_s \sin \varphi} \frac{d\Phi_0}{dS} = \left(1 - \frac{y^2}{r_s^2}\right) \frac{d\Phi_0}{y dy}. \quad (47)$$

Для сферической подложки следует принимать  $r_s = r$ .

**Параксиальная область.** Рассмотрим узкий осевой пучок лучей. Для такого пучка:

$$\omega = \omega' = 0, \quad \frac{d\Phi_0}{y dy} = 2a_2, \quad \frac{d^2\Phi_0}{dy^2} = 2a_2,$$

а формулы для инвариантов (30) и (43) переходят в известный [3] инвариант Аббе для осесимметричных ДОЭ:

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r} - 2 \frac{m\lambda}{\lambda_0} a_2. \quad (48)$$

Положим, что  $\lambda = \lambda_0$ ,  $m = 1$ , а  $l = \infty$ , тогда  $l' = f_0'$  и из (48) получим, что

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{n_0' - n_0}{r} - \frac{n_0'}{f_0'} \right). \quad (49)$$

Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

1. В случае ДОЭ на плоской подложке  $r = \infty$  и  $a_2 = -n_0'/2f_0'$  как при дифракционном преломлении, так и при дифракционном отражении.

2. Если среда пространства предметов и изображений, разделяемая ДОЭ, одна и та же, то, как видно из (49), первый коэффициент фазовой функции в случае дифракционного преломления определяется так же, как и для ДОЭ на плоскости, а при дифракционном отражении, когда  $n_0 = -n_0'$ ,

$$a_2 = n_0' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2f_0'} \right). \quad (50)$$

Следовательно, в этом случае коэффициент  $a_2$  зависит от кривизны подложки.

**Заключение.** Проверка формул расчета хода лучей и узких пучков производилась для ДОЭ на осесимметричной подложке второго порядка для случая как дифракционного преломления, так и дифракционного отражения при одинаковых параметрах среды пространства предметов и изображений. Суть проверки заключалась в следующем: по программе DEMOS рассчитывался ход луча, близкого к главному, в меридиональном и сагиттальном сечениях и определялась плоскость фокусировки лучей в этих сечениях, положение которой с высокой точностью совпадало с рассчитанным по формулам (30), (39), (43), (47). Таким образом, подтверждается правильность развиваемой в настоящей работе методики расчета хода лучей и дифференциальных формул расчета узких пучков для ДОЭ на осесимметричной криволинейной подложке. Последние могут быть с успехом использованы как для точного решения проблем синтеза анастигматических дифракционных оптических систем, так и для приближенного анализа в области теории аберраций.

В заключение автор выражает благодарность д-ру техн. наук М. А. Гану за полезные обсуждения материалов работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобров С. Т., Грейсх Г. И., Туркевич Ю. Г. Оптика дифракционных элементов и систем.— Л.: Машиностроение, 1986.
2. Грейсх Г. И., Ефименко И. М., Степанов С. А. Оптика градиентных и дифракционных элементов.— М.: Радио и связь, 1990.
3. Ган М. А. Теория и методы расчета голограммных и киноформных оптических элементов.— Л.: Изд. ГОИ им. С. И. Вавилова, 1984.
4. Smith R. W. The S and T formulae for holographic lens elements // Opt. Commun.—1977.—21, N 1.—P. 106.
5. Русинов М. М. Об aberrациях второго порядка в центрированных оптических системах // Изв. вузов. Приборостроение.—1987.—№ 5.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1984.
7. Леонова В. Б. Автоматизация расчетов оптических систем.— М.: Машиностроение, 1970.
8. Чуриловский В. Н. Теория оптических приборов.— М.: Машиностроение, 1966.
9. Русинов М. М. Несферические поверхности в оптике. Расчет, изготовление и контроль.— М.: Недра, 1973.

*Поступила в редакцию 7 февраля 1994 г.*