РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1994

УДК 681.7.068.4

С. Г. Раутиан
(Новосибирск)

О МОДАХ ПЛАНАРНЫХ СВЕТОВОДОВ

Построена обобщенная теория бегущих мод планарных диэлектрических световодов, применимая к незатухающим и затухающим волнам, при любых отражающих покрытиях. Получены приближенные выражения для собственных значений компонент волновых векторов, перпендикулярных границам световода. Отмечена аналогия между пластинкой Люммера — Герке и световодом. Показано, что дифракционные явления обусловливают возбуждение не одной моды.

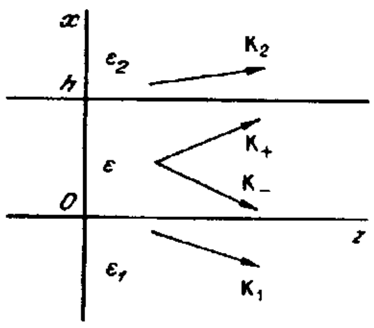
Планарные (пленочные, полосковые и т. п.) световоды играют важную роль в интегральной оптике (см., например, [1—3]). Главные свойства световодов связаны с их бегущими модами, которые представляют собой плоские волны, отражающиеся от границ световода. Волновые векторы мод образуют дискретный набор, и соответствующим характеристическим уравнением является сравнительно простое трансцендентное уравнение, решения которого найдены как численными способами, так и с помощью приближенных, асимптотических соотношений [1—3].

Вместе с тем следует констатировать, что многие работы, посвященные планарным световодам, исходят из частных моделей и соображений, например, из представления о так называемых зигзагообразных волнах, которые, строго говоря, не являются собственными решениями (модами) в обычном понимании этого термина. Такого рода подходы лишают теорию желаемой общности и создают, например, трудности при переходе к затухающим модам. Можно отметить также «технические» недостатки существующего в литературе анализа характеристического уравнения, связанные с неоправданным его усложнением.

В статье изложена простая, но достаточно общая теория мод планарных световодов, которая позволяет с единых позиций рассматривать различные практически интересные случаи. Получены приближенные выражения для собственных значений в радикалах.

1. **Общая теория.** Традиционная постановка электродинамической задачи для планарных световодов сводится к следующему. Система моделируется плоским слоем однородного изотропного диэлектрика (толщина h, диэлектрическая проницаемость ε), расположенного между однородными изотропными полупространствами с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 1). Оси z и x направлены соответственно вдоль и перпендикулярно границам раздела. Рассматриваются монохроматические волны (частота ω), не зависящие от y и бегущие вдоль направления z, т. е. зависимость от z задается фактором $\exp(ik_z z)$. Из линейности и однородности граничных условий следует, что точно такая же зависимость от z должна быть во всех трех средах [4]. Таким образом, поле ищется в виде

Рис. 1. Слой диэлектрика (ε) и волновые векторы четырех волн



$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1 e^{-i(\omega t - k_z z + k_{1x} x)}, \qquad -\infty < x < 0,$$
$$\mathbf{E} = e^{-i(\omega t - k_z z)}(\mathbf{A}_1 e^{ik_x x} + \mathbf{A}_2 e^{-ik_x x}), \qquad 0 < x < h, \tag{1}$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{D}_2 e^{-i(\omega t - k_z z - k_{2x} x)}, \qquad h < x < \infty.$$

Функции (1) являются решениями уравнений Максвелла, если выполняются равенства

$$\mathbf{k}^2 \equiv k_z^2 + k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon, \qquad k_1^2 \equiv k_z^2 + k_{1x}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1, \qquad k_2^2 \equiv k_z^2 + k_{2x}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2. \tag{2}$$

Векторные амплитуды $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{D}_2$ ортогональны соответственно волновым векторам

$$\mathbf{k}_1 = (k_{1x}, 0, k_z), \qquad \mathbf{k}_+ = (k_x, 0, k_z), \qquad \mathbf{k}_- = (-k_x, 0, k_z), \qquad \mathbf{k}_2 = (k_{2x}, 0, k_z),$$
$$\mathbf{k}_1\mathbf{D}_1 = 0, \qquad \mathbf{k}_+\mathbf{A}_1 = 0, \qquad \mathbf{k}_-\mathbf{A}_2 = 0, \qquad \mathbf{k}_2\mathbf{D}_2 = 0. \tag{3}$$

Граничные условия состоят в непрерывности проекций напряженностей электрического и магнитного полей на границах раздела $x = 0$ и $x = h$. Явный вид граничных условий зависит от состояния поляризации. Аналогично задаче о френелевском отражении различаются два случая. В первом случае векторы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_2$ направлены вдоль оси y, т. е. $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ и аналогично для $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ (TE-волна, или s- или $\perp$-поляризация в терминологии задачи Френеля [4]). Векторы $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_2$ в этом случае находятся в плоскости x, z, т. е. $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$ и т. д. Во втором случае $\mathbf{H} = (0, H, 0)$, $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$ и т. д. (TH-волна, или p- или $\parallel$-поляризация).

Легко показать, что граничные условия представимы в виде

$$A_1 = \rho_1 A_2, \qquad A_2 e^{-ik_x h} = \rho_2 A_1 e^{ik_x h}, \tag{4}$$

$$D_1 = t_1 A_2, \qquad D_2 e^{ik_{2x} h} = t_2 A_1 e^{ik_{1x} h}. \tag{5}$$

Здесь под A_1, A_2, D_2, D_1 понимаются либо $\perp$-, либо $\parallel$-составляющие амплитуд $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_1$. Величины ρ_1, ρ_2, t_1, t_2 суть френелевы коэффициенты отражения и пропускания на границах $x = 0$ и $x = h$ соответственно для $\perp$-поляризации:

$$\rho_1 = \rho_{1\perp} = \frac{k_x - k_{1x}}{k_x + k_{1x}}, \qquad \rho_2 = \rho_{2\perp} = \frac{k_x - k_{2x}}{k_x + k_{2x}}, \tag{6}$$

$$t_1 = t_{1\perp} = \frac{2k_x}{k_x + k_{1x}}, \qquad t_2 = t_{2\perp} = \frac{2k_x}{k_x + k_{2x}} \tag{7}$$

— либо для $\parallel$-поляризации:

$$\rho_1 = \rho_{1\parallel} = \frac{k_x/\varepsilon - k_{1x}/\varepsilon_1}{k_x/\varepsilon + k_{1x}/\varepsilon_1}, \qquad \rho_2 = \rho_{2\parallel} = \frac{k_x/\varepsilon - k_{2x}/\varepsilon_2}{k_x/\varepsilon + k_{2x}/\varepsilon_2}, \tag{8}$$

$$t_1 = t_{1\parallel} = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_1}\,\frac{2k_x/\varepsilon}{k_x/\varepsilon + k_{1x}/\varepsilon_1}, \qquad t_2 = t_{2\parallel} = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_2}\,\frac{2k_x/\varepsilon}{k_x/\varepsilon + k_{2x}/\varepsilon_2}. \tag{9}$$

Запись граничных условий в форме (4), (5) удобна в том отношении, что она имеет силу не только для преломления и отражения из-за скачков диэлектрической проницаемости, но и при произвольных причинах отражения: отражение может быть обусловлено переходным слоем с непрерывным изменением показателя преломления либо тонким слоем металла на границах раздела, вообще любым отражающим покрытием. В подобных условиях формулы (4), (5) остаются в силе, а величины ρ_1, ρ_2, t_1, t_2 задаются коэффициентами отражения и пропускания реальных покрытий.

Для того чтобы однородная линейная система уравнений (4) обладала ненулевыми решениями, ее детерминант должен равняться нулю. Это общее условие приводит к характеристическому уравнению

$$\rho_1\rho_2 e^{2ik_x h} = 1. \tag{10}$$

Комплексные коэффициенты отражения ρ_1, ρ_2, входящие в уравнение (10), зависят от k_x, k_{1x}, k_{2x}. Последние с помощью соотношения (2) можно выразить через k_x. Поэтому уравнение (10) можно рассматривать как уравнение относительно k_x, что вполне естественно, поскольку граничные условия, как всегда в граничных задачах, задают набор значений геометрических параметров поля, каковым и служит k_x — проекция волнового вектора на направление, вдоль которого поле «удерживается» внутри системы. По собственным значениям k_x с помощью соотношений (2) можно вычислить константу распространения k_z (при фиксированной ω) или ω (при фиксированной k_z).

2. **Полное отражение.** При полном отражении модули коэффициентов отражения равны 1 и можно написать

$$\rho_1 = \exp(-2i\delta_1), \qquad \rho_2 = \exp(-2i\delta_2), \tag{11}$$

где $2\delta_1, 2\delta_2$ — скачки фазы при отражении от границ $x = 0$ и $x = h$ соответственно. Уравнение (10) преобразуется к виду

$$k_x h - \delta_1 - \delta_2 = \pi m, \tag{12}$$

где m — целое число.

В случае полного отражения из-за скачков диэлектрической проницаемости (соотношения (6), (8) для ρ_1, ρ_2) величины δ_1, δ_2 легко выражаются через k_x, поскольку из формулы (2) следует:

$$k_{1x} = i\sqrt{k_z^2 - k_1^2} = i\sqrt{k^2 - k_1^2 - k_x^2}, \qquad k_{2x} = i\sqrt{k_z^2 - k_2^2} = i\sqrt{k^2 - k_2^2 - k_x^2},$$
$$k_z^2 \geq k_1^2, \qquad k_z^2 \geq k_2^2. \tag{13}$$

Поэтому имеем для $\perp$-поляризации

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{(k^2 - k_1^2)/k_x^2 - 1}, \qquad \delta_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{(k^2 - k_2^2)/k_x^2 - 1} \tag{14}$$

и для $\parallel$-поляризации

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\sqrt{(k^2 - k_1^2)/k_x^2 - 1}\right], \qquad \delta_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\sqrt{(k^2 - k_2^2)/k_x^2 - 1}\right]. \tag{15}$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = k_x/\sqrt{k^2 - k_1^2}, \tag{16}$$

$$V = h\sqrt{k^2 - k_1^2} = \frac{\omega}{c}h\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_1}, \tag{17}$$

$$a = \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_1} / \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_2} \tag{18}$$

и примем соглашение

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2, \qquad a \leq 1. \tag{19}$$

С помощью введенных обозначений запишем для $\perp$-поляризации

$$V\xi = \operatorname{arctg}\sqrt{\xi^{-2} - 1} + \operatorname{arctg}\sqrt{(a\xi)^{2} - 1} + \pi m \tag{20}$$

или еще проще

$$V\xi = \arccos\xi + \arccos(a\xi) + \pi m \tag{20a}$$

и для $\parallel$-поляризации

$$V\xi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\sqrt{\xi^{-2} - 1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\sqrt{(a\xi)^{-2} - 1}\right) + \pi m. \tag{21}$$

Уравнения (20), (20a), (21) представляют собой сравнительно простые трансцендентные уравнения, записанные в форме, наиболее удобной для общего анализа и числовых расчетов.

Переменная ξ изменяется в пределах $0 \leq \xi \leq 1$, которые отвечают скользящему падению ($\xi = 0$) и предельному углу полного отражения ($\xi = 1$). В этом интервале тригонометрические функции в уравнениях (20a), (21) монотонно уменьшаются с ростом ξ. Поэтому при заданных значениях параметров V, m, $\varepsilon/\varepsilon_2$, $\varepsilon/\varepsilon_1$ решение, если оно существует, единственно. Рис. 2 иллюстрирует сделанное утверждение для $V = 14$ и $\perp$-поляризации.

Уравнения (20a), (21) при $m = -1$ имеют решение $\xi = 0$. Однако в этом случае поле внутри световода оказывается равным нулю:

$$A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} = 2\sqrt{A_1 A_2}\cos(k_x h - \delta_1) = 0,$$

так как при $\xi = 0$ имеем $k_x = 0, \delta_1 = \pi/2$. Мода наинизшего порядка $m = 0$ при $a = 1$ всегда существует, поскольку уравнения

$$V\xi = 2\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\sqrt{\xi^{-2} - 1}, \qquad V\xi = 2\arccos\xi \tag{22}$$

имеют решение при любых значениях параметров V и $\varepsilon/\varepsilon_1$. Если $a < 1$, то уравнения (20a), (21) для основной моды ($m = 0$)

$$V\xi = \arccos\xi + \arccos a\xi, \tag{23}$$

$$V\xi = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\sqrt{\xi^{-2} - 1} + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\sqrt{(a\xi)^{-2} - 1} \tag{24}$$

имеют решения лишь при выполнении условий [2]

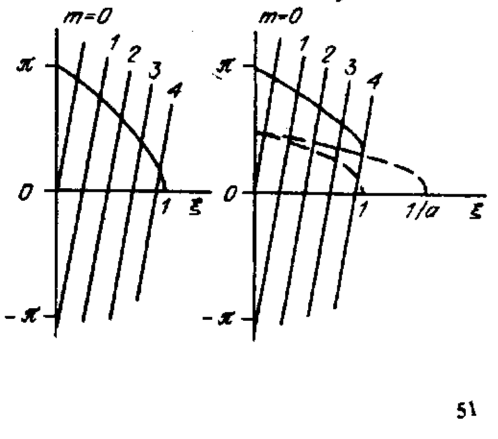


Рис. 2. Графики функций, входящих в уравнение (20a):

прямые отвечают функции $V\xi = \pi m$ ($V = 14$), сплошные кривые соответствуют сумме $\arccos\xi + \arccos a\xi$ для $a = 1$ (*a*) и $a = 2/3$ (*b*), штриховые кривые суть графики функций $\arccos\xi$ и $\arccos a\xi$ по отдельности

4*

$$V > \arccos a, \qquad V > \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\sqrt{a^{-2}-1} \tag{25}$$

соответственно для $\perp$- и $\parallel$-поляризаций. Максимальное число мод $m_{\max}$ определяется нарушением полного отражения на границе $x = 0$ ($\xi = 1$) и задается соотношениями [2]

$$m_{\max} = \left[\frac{1}{\pi}(V - \arccos a)\right] \quad (\perp\text{-поляризация}), \tag{26}$$

$$m_{\max} = \left[\frac{1}{\pi}\left(V - \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\sqrt{a^{-2}-1}\right)\right] \quad (\parallel\text{-поляризация}), \tag{27}$$

где $[b]$ обозначает целую часть числа b.

При больших значениях параметров V и m основную роль в характеристических уравнениях играют члены $V\xi$ и πm, а фазы δ_1, δ_2 приводят к небольшим поправкам. Разлагая δ_1, δ_2 в ряд около точки $\xi = \pi(m+1)/V$, приходим к следующему приближенному выражению:

$$\xi = \xi_m + \delta_m/(V - d\delta/d\xi), \qquad \xi_m = \pi(m+1)/V, \tag{28}$$

$$\delta_m = -\arcsin\xi_m - \arcsin(a\xi_m) \quad (\perp\text{-поляризация}),$$

$$\frac{d\delta}{d\xi} = -(1-\xi_m^2)^{-1/2} - a(1-a^2\xi_m^2)^{-1/2},$$

$$\delta_m = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\xi_m/\sqrt{1-\xi_m^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}a\xi_m/\sqrt{1-a^2\xi_m^2}\right) \quad (\parallel\text{-поляризация}),$$

$$\frac{d\delta}{d\xi} = -\frac{\varepsilon_1/\varepsilon}{\sqrt{1-\xi_m^2}\,[1-(1-\varepsilon_1^2/\varepsilon^2)\xi_m^2]} - \frac{a\varepsilon_2/\varepsilon}{\sqrt{1-a^2\xi_m^2}\,[1-(1-\varepsilon_2^2/\varepsilon^2)(a\xi_m)^2]}.$$

Приведем без вывода приближенные формулы для малых ξ:

$$\xi = \pi\frac{m+1}{V+1+a} \quad (\perp\text{-поляризация}), \tag{29}$$

$$\xi = \pi\frac{m+1}{V+(\varepsilon_1+a\varepsilon_2)/\varepsilon} \quad (\parallel\text{-поляризация}) \tag{30}$$

— и для малых значений $1 - \xi$:

$$\xi = 1 - \frac{(V-\pi m)^2}{2[1+\sqrt{1+V(V-\pi m)/2}]^2}, \quad a = 1 \quad (\perp\text{-поляризация}), \tag{31}$$

$$\xi = 1 - \frac{2[V-\pi m-\arccos a]^2}{[1+\sqrt{1+2(V+a/\sqrt{1-a^2})(V-\pi m-\arccos a)}]^2},$$

$$a < 1 \quad (\perp\text{-поляризация}), \tag{32}$$

$$\xi = 1 - \frac{(V-\pi m)^2\varepsilon_1/\varepsilon}{2[1+\sqrt{1+V(V-\pi m)\varepsilon_1^2/2\varepsilon^2}]^2}, \quad a = 1 \quad (\parallel\text{-поляризация}), \tag{33}$$

$$\xi = 1 - \frac{2(V-\pi m-A)^2\varepsilon_1/\varepsilon}{\left[1+\sqrt{1+2(V+B)(V-\pi m-A)\varepsilon_1^2/\varepsilon^2}\right]^2}, \quad a < 1, \tag{34}$$

$$A = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\sqrt{a^{-2}-1}\right), \qquad B = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\,\frac{\varepsilon/\varepsilon_2}{a^2+(1-a^2)\varepsilon^2/\varepsilon_2^2}.$$

Формулы, эквивалентные (29) и (30), получены в [2].

Выражения (29)—(34) содержат большое число параметров (m, V, a, $\varepsilon_1/\varepsilon_2$), и подробный их анализ здесь вряд ли целесообразен. Ограничимся упоминанием линейной зависимости ξ от m при $\xi \ll 1$, т. е. вдали от предельного угла полного отражения, квадратичной зависимости $1-\xi$ от $V-\pi m$ вблизи предельного угла ($1-\xi \ll 1$). Отметим также поляризационный эффект, связанный с зависимостью δ_1 и δ_2 от поляризации.

Численные решения $\xi(V)$ характеристического уравнения сравнительно просто находятся предварительным вычислением обратной функции $V(\xi)$ по формулам

$$V(\xi) = \frac{1}{\xi}(\pi m + \arccos\xi + \arccos a\xi), \tag{20б}$$

$$V(\xi) = \frac{1}{\xi}\left[\pi m + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\sqrt{\xi^{-2}-1} + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\sqrt{(a\xi)^{-2}-1}\right]. \tag{21а}$$

Затем графически или с помощью интерполяции можно вычислить $\xi(V)$ с любой необходимой точностью.

Сравнение значений $\xi(V)$ для $m = 0$, 1 и 2, полученных из формул (29) и (31), с результатами численного расчета привело к следующим выводам. В интервале $0{,}4 < \xi < 1$ значения из (31) отличаются от точных не более чем на единицу второго знака после запятой. Формула (29) дает точность не хуже двух единиц второго знака после запятой в интервале $0 < \xi < 0{,}5$. Таким образом, с указанной точностью собственные значения ξ можно вычислять с помощью приведенных выражений во всем интервале изменения ξ.

Характеристические уравнения в форме (20а), (21) представляются наиболее простыми математически и наглядными с физической точки зрения. Переменная ξ удобна в том отношении, что левая часть уравнений (20а) и (21) оказывается самой простой — линейной функцией от ξ, что иллюстрирует рис. 2. В отличие от принятого здесь в [2] введена переменная $b = 1-\xi^2$, для которой вместо, например, уравнения (20а) получается

$$V\sqrt{1-b} = \operatorname{arctg}\sqrt{b/(1-b)} + \operatorname{arctg}\sqrt{1/(a^2(1-b))-1} + \pi m, \tag{20в}$$

и оно, очевидно, более сложное. В работе [3] от левой и правой частей характеристического уравнения вычисляется тангенс, т. е. линейная функция $V\xi$ заменяется на $\operatorname{tg} V\xi$. Таким образом, в математическом отношении уравнения (20), (20а), (21) наиболее просты.

Переменная ξ есть нормированная поперечная компонента волновых векторов поля внутри слоя, и она очевидным образом связана с константой распространения k_z и с k:

$$\xi^2 = (k^2-k_z^2)/(k^2-k_1^2).$$

Величина b из [2] есть

$$b = 1-\xi^2 = (k_{1x}/i)^2/(k^2-k_1^2),$$

т. е. тем же способом нормированный квадрат мнимой части волнового вектора уходящей волны в среде 1, и эта величина, несомненно, физически менее показательна и интересна.

3. Затухающие моды. В реальных системах отражение может быть неполным, а среда световода — обладать поглощением. Оба фактора приводят к затуханию полей. В такой задаче поле и характеристическое уравнение попрежнему задаются формулами (1) и (10). Отличие состоит в том, что модули коэффициентов отражения меньше единицы

$$\rho_1\rho_2 = r\exp[-2i(\delta_1+\delta_2)], \qquad r = |\rho_1\rho_2| < 1, \tag{35}$$

и величина k_x оказывается комплексной: $k_x = k_x' + ik_x''$. Разделяя в характеристическом уравнении модульную и фазовую части, приходим к системе уравнений относительно k_x' и k_x'':

$$\begin{aligned} k_x'h &= \delta_1(k_x', k_x'') + \delta_2(k_x', k_x'') + \pi m, \\ 2k_x''h &= \ln[r(k_x', k_x'')]. \end{aligned} \tag{36}$$

Величины r, δ_1, δ_2 зависят от k_x', k_x'', и в общем случае система уравнений (36) достаточно сложна.

Допустим, что система (36) решена и k_x', k_x'' известны. Тогда из равенств (2) находим систему уравнений для вещественной и мнимой частей z-компоненты волнового вектора $k_z = k_z' + ik_z''$:

$$k_z'^2 - k_z''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' - k_x'^2 + k_x''^2, \qquad 2k_z'k_z'' = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'' - 2k_x'k_x''. \tag{37}$$

Из уравнений видно, что и неполное отражение ($k_x'' \neq 0$), и поглощение ($\varepsilon'' \neq 0$) обусловливают затухание волн в направлении z ($k_z'' \neq 0$). Формулы (36), (37) наглядно иллюстрируют высказанную выше мысль о том, что естественной переменной в граничной задаче световода служит величина k_x, а другие характеристики мод находятся из уравнений, в правую часть которых входят собственные значения k_x.

В простейшем случае $\varepsilon'' = 0$, $k_z''^2 \ll k_z'^2$, $k_x''^2 \ll k_x'^2$ находим

$$k_z' = \sqrt{\omega^2\varepsilon'/c^2 - k_x'^2}, \qquad k_z'' = -\frac{k_x'}{k_z'}k_x'' = \frac{k_x'}{2hk_z'}\ln\frac{1}{r}. \tag{38}$$

Величина $2hk_z'/k_x'$ представляет собой расстояние между двумя последовательными точками падения луча внутри слоя на его границу, и, следовательно, k_z'' согласно (38) задает ослабление поля на фактор r на протяжении этой длины.

При углах падения на границы световода меньше предельного в средах *1* и *2* распространяются волны, также затухающие в направлениях x, z. Для описания зависимости от z служат формулы (1) и (37), (38), а для k_{1x}, k_{2x} из соотношений (2) получаем уравнения:

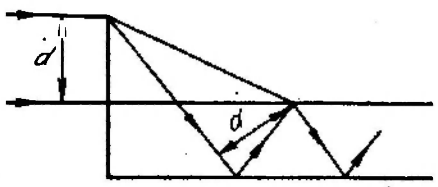
$$(k_{1x}' + ik_{1x}'')^2 = (k_x' + ik_x'')^2 - (\varepsilon - \varepsilon_1)\omega^2/c^2, \tag{39}$$

$$(k_{2x}' + ik_{2x}'')^2 = (k_x' + ik_x'')^2 - (\varepsilon - \varepsilon_2)\omega^2/c^2. \tag{40}$$

Решения уравнений (39), (40) задают, в частности, положения (k_{1x}', k_{2x}') и ширины (k_{1x}'', k_{2x}'') колец интерференционной картины пластинки Люммера — Герке, изобретенной в 1901 г. и применяющейся в качестве спектрального прибора [5]. Ее следует рассматривать как предтечу световодов в той же мере, в какой эталон Фабри — Перо (1897 г. [5]) является прародителем открытых резонаторов.

Некоторые постановки вопросов, принятые в теории пластинки Люммера — Герке, и соответствующие результаты полезны в теории световодов. Изложенное относится, в частности, к анализу роли дифракции при возбуждении мод световода [6, 7]. Одна из схем возбуждения показана на рис. 3 [1—3,

Рис. 3. Схема возбуждения мод пластинки Люммера — Герке и световода с помощью призмы полного отражения



5—7]. Плоская волна, проходящая входную призму полного отражения, ограничена по протяженности волнового фронта (d), и вследствие дифракции в световоде формируется пакет плоских волн с характерной шириной $\Delta\varphi_d = \lambda/d$. Легко показать, что

$$d = 2h\sin\varphi, \qquad \Delta\varphi_d = \lambda/2h\sin\varphi, \tag{41}$$

где φ — угол падения на границу. Сопоставим $\Delta\varphi_d$ с угловым интервалом $\Delta\varphi$ между модами, которые отличаются значением числа m на Δm. Из характеристического уравнения (12) находим

$$h\Delta k_x = \frac{d\delta}{dk_x}\Delta k_x + \pi\Delta m, \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2,$$

и, следовательно,

$$\Delta k_x = \pi\Delta m/(h - d\delta/dk_x). \tag{42}$$

Принимая во внимание соотношения

$$k_x = k\cos\varphi, \qquad \Delta k_x = -k\sin\varphi\Delta\varphi, \qquad k = 2\pi/\lambda,$$

приходим к выражению

$$|\Delta\varphi| = \lambda/2h_e\sin\varphi, \qquad h_e = h - d\delta/dk_x, \qquad \Delta m = 1. \tag{43}$$

Таким образом, с точностью до множителя $h/h_e \approx 1$ величины $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi_d$ совпадают [6, 7]. Следовательно, из-за дифракции в световоде должна возбуждаться не одна мода, подобно тому, как в пластинке Люммера — Герке наблюдается не одно интерференционное кольцо.

4. Обсуждение. Сравним развитый способ расчета собственных значений с другими, изложенными в литературе. Выше рассматривалась стандартная постановка граничной задачи для волн, бегущих в слое конечной толщины и неограниченной протяженности (в направлении оси z). Дискретные собственные значения возникают как следствие общего требования ненулевых решений волнового уравнения, и это требование оформляется в виде уравнения (10). При таком подходе характеристическое уравнение обладает максимально возможной общностью. Отметим также полезную аналогию уравнения (10) с характеристическим уравнением открытых резонаторов.

В литературе часто применяют иную аргументацию, рассматривая распространение в световоде так называемой «зигзагообразной волны» [1—3]. При таком способе рассуждений характеристическое уравнение в форме (12) возникает как следствие требования точной синфазности различных частей (соседних «зигзагов») волны. Подобная аргументация вызывает ряд возражений. Во-первых, уравнение (12) имеет менее общий характер, чем уравнение (10). Во-вторых, остается неясным, почему не могут существовать не вполне синфазные волны. В-третьих, не очевиден переход к затухающим волнам (поглощение, неполное отражение). Наконец, понятие зигзагообразной волны обычно связывают с конечностью размера ее волнового фронта и апеллируют к оптико-геометрическому приближению, имея в виду в то же время бесконечно протяженный слой. Известно, однако, что при достаточно большом пути распространения ограниченность волнового фронта приводит к существенному проявлению дифракции (зона Фраунгофера). Ссылка на ограниченность длины реальных световодов не разъясняет ситуации, но усугубляет неполноценность аргументации, ибо волновод конечной длины — это уже другая граничная задача, с другими собственными значениями (в частности, они комплексны даже при $r = 1$ [8]). Пластинка Люммера — Герке, упомянутая в разделе [3], относится к световодам конечной длины, и наличие в ее интерференционной картине нескольких колец наглядно иллюстрирует утверждение о том, что понятие моды световода связано с плоскими волнами, бесконечно протяженными в направлении свободного распространения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Introduction to Integrated Optics /Ed. by M. K. Barnoski.—N. Y.; L.: Plenum Press, 1974. (Пер.: Введение в интегральную оптику /Под ред. М. К. Барноски.—М.: Мир, 1977).
2. Kogelnik H. Integrated Optics /Ed. by T. Tamir.—Berlin a. o.: Springer, 1975.—Ch. 2.—P. 27. (Пер.: Интегральная оптика.—М.: Мир, 1978.—Гл. 2).
3. Unger H.-G. Planar Optical Waveguides and Fibers.—Oxford: Clarendon Press, 1977. (Пер.: X.-Г. Унгер. Планарные и волоконные оптические волноводы.—М.: Мир, 1980).
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика.—2-е изд.—М.: Наука, 1985.
5. Talansky S. High Resolution Spectroscopy.—N. Y.; Chicago, 1947. (Пер.: С. Таланский. Спектроскопия высокой разрешающей силы.—М.: ИЛ, 1955).
6. Королев Ф. А. // Труды ФИАН.—М.—Л.: Изд. АН СССР, 1940.—Т. 2.
7. Королев Ф. А. Спектроскопия высокой разрешающей силы.—М.: Гостехиздат, 1953.
8. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и волноводы.—М.: Сов. радио, 1966.

Поступила в редакцию 2 марта 1994 г.