

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 1

1994

УДК 519.24 : 621.391

Н. С. Демин, В. В. Михайлюк

(Томск)

ОБНАРУЖЕНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ
В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ КАНАЛОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Для многомерной стохастической системы с непрерывным временем, имеющей непрерывный и дискретный во времени каналы наблюдения, решена задача обнаружения аномальных помех в дискретном канале. Рассмотрены алгоритмы распознавания гипотез и обнаружения момента разладки случайного процесса. Приводятся некоторые иллюстративные материалы по применению полученных результатов к реальному объекту.

Введение. Современные сложные технические системы функционируют в условиях, когда имеющаяся в наличии информация представляет собой совокупность реализаций непрерывных и дискретных во времени случайных процессов. Подобным классом систем являются, например, навигационные системы подвижных объектов, в которых непрерывные наблюдения формируются из показаний бортовых измерителей, работающих непрерывно, а дискретные — из показаний внешних источников (РЛС, спутники и пр.), работающих в отдельные моменты времени. Таким образом, возникают задачи как синтеза всего комплекса оптимальных алгоритмов обработки подобной информации (фильтрации, интерполяции, экстраполяции, распознавания), так и анализа этих алгоритмов. По-видимому, первой работой, посвященной данной тематике, является [1], в которой осуществлен синтез фильтра, являющегося обобщением фильтра Калмана на случай непрерывно-дискретных наблюдений. В дальнейшем был решен ряд задач интерполяции [2, 3], экстраполяции [4], распознавания [5], адаптивного оценивания [6] и передачи сигналов [7]. Во всех работах решаются задачи, когда в измерениях (наблюдениях) присутствуют только регулярные помехи. На практике распространенной является ситуация, когда, кроме регулярных, действуют и аномальные помехи, причем в случайные моменты времени и только по части компонент вектора наблюдения. В гибридных непрерывно-дискретных по времени измерительных системах дискретный канал является, как правило, более точным, информация, поступающая с него, более ценной и используется для коррекции информации, поступающей с непрерывного канала, а поэтому обнаружение аномальных помех в дискретном канале и учет их действия являются особенно важной задачей. В данной работе решается задача обнаружения аномальных помех в дискретном канале наблюдения как задача различения гипотез и обнаружения разладки случайного процесса в общей ситуации для многомерных процессов, когда аномальные помехи могут действовать лишь по части компонент наблюдаемого процесса. Отметим, что для систем с дискретным временем вопросы синтеза фильтра, точности оценивания и оптимальности процедуры исключения аномальных измерений рассматривались в [8—11].

Постановка задачи. Пусть n -мерная линейная стохастическая система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + w(t), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где $w(t)$ — n -мерный белый гауссов шум с $M\{w(t)\} = 0$ и $M\{w(t)w^T(\tau)\} = Q(t)\delta(t - \tau)$, причем $x(t_0) = x_0 \sim N\{\mu_0; \Gamma_0\}$ ($M\{\cdot\}$ — математическое ожидание, $N\{a; B\}$ — нормальное (гауссово) распределение с параметрами a и B , $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, τ — транспонирование). Выходом непрерывного по времени канала наблюдения является l -мерный процесс $z(t)$ вида

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t), \quad (2)$$

где $v(t)$ — белый гауссов шум с $M\{v(t)\} = 0$ и $M\{v(t)v^T(\tau)\} = R(t)\delta(t - \tau)$, а выходом дискретного по времени канала наблюдения является k -мерный процесс $\eta(t_m)$ вида

$$\eta(t_m) = G(t_m)x(t_m) + \xi(t_m) + \theta C f(t_m), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где $\xi(t_m)$ — k -мерный вектор регулярных помех, являющийся нормальным с $M\{\xi(t_m)\} = 0$ и $M\{\xi(t_m)\xi^T(t_j)\} = V(t_m)\delta_{mj}$ (δ_{mj} — символ Кронскера), $f(t_m)$ — r -мерный ($r \leq k$) вектор аномальных помех, который является нормальным с $M\{f(t_m)\} = \bar{f}(t_m)$ и $M\{[f(t_m) - \bar{f}(t_m)] [f(t_j) - \bar{f}(t_j)]^T\} = \Theta(t_m)\delta_{mj}$. Матрица C размером $k \times r$, определяющая структуру действия компонент вектора аномальных помех $f(t_m)$ на компоненты вектора наблюдений $\eta(t_m)$, является булевой и имеет следующий вид: если i_j — номера компонент вектора $\eta(t_m)$, по которым действуют аномальные помехи, то в j -м столбце матрицы C единица стоит на i_j -м месте ($1 \leq j \leq r; 1 \leq i_j \leq k$), а остальными элементами являются нули. Случайная величина θ в каждый момент времени может принимать значения $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = 1$ с вероятностями $p(\theta_0) = P\{\theta = \theta_0\}$ и $p(\theta_1) = P\{\theta = \theta_1\}$ ($P\{C\}$ — вероятность события C). Предполагается: 1) $x_0, w(t), v(t), \xi(t_m), f(t_m), \theta$ независимы в совокупности; 2) матрицы $Q(t), R(t), V(t_m), \Theta(t_m), \Gamma_0$ симметричные положительно определенные; 3) матрицы $H(t)$ и $G(t_m)$ полного ранга.

Алгоритм распознавания гипотез. Задача обнаружения в момент времени t_m аномальной помехи $f(t_m)$ с матрицей структуры C действия ее компонент на компоненты вектора наблюдений $\eta(t_m)$ с точки зрения теории статистических решений [12, 13] является задачей различения гипотез $H_0\{\theta = \theta_0\}$ (нормальный режим функционирования) и $H_1\{\theta = \theta_1\}$ (аномальный режим функционирования). Для понимания алгоритма формирования логарифма отношения правдоподобия $\bar{L}_m(\theta_1; \theta_0)$ в задаче различения гипотез $H_1\{\theta = \theta_1\}$ и $H_0\{\theta = \theta_0\}$ остановимся на задаче нахождения оптимальной в среднеквадратическом смысле несмещенной оценки $\mu(t)$ для $x(t)$ по совокупности реализаций $z_0^t = \{z(s); t_0 \leq s \leq t\}$ и $\eta_0^m = \{\eta(t_0); \eta(t_1), \dots, \eta(t_m); t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m\}$ при нормальном ($\theta = \theta_0$) и аномальном ($\theta = \theta_1$) режимах функционирования дискретного канала (3). Согласно [1, 5, 7] при $\theta = \theta_0$ оценка $\mu(t)$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется уравнениями

$$\dot{\mu}(t) = F(t)\mu(t) + \Gamma(t)H^T(t)R^{-1}(t)[z(t) - H(t)\mu(t)], \quad (4)$$

$$\dot{\Gamma}(t) = F(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)F^T(t) - \Gamma(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)\Gamma(t) + Q(t) \quad (5)$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m) = \mu(t_m - 0) + \Gamma(t_m - 0)G^T(t_m)W^{-1}(t_m)\bar{\eta}(t_m), \quad (6)$$

$$\Gamma(t_m) = \Gamma(t_m - 0) - \Gamma(t_m - 0)G^T(t_m)W^{-1}(t_m)G(t_m)\Gamma(t_m - 0), \quad (7)$$

где

$$\tilde{\eta}(t_m) = \eta(t_m) - G(t_m)\mu(t_m - 0), \quad W(t_m) = V(t_m) + G(t_m)\Gamma(t_m - 0)G^T(t_m), \quad (8)$$

$\mu(t_m - 0) = \lim_{t \uparrow t_m} \mu(t)$, $\Gamma(t_m - 0) = \lim_{t \uparrow t_m} \Gamma(t)$ и являются решениями уравнений (4), (5) на предыдущем интервале времени, вычисленными в точке $t = t_m$. Соответственно при $\theta = \theta_1$ оценка $\mu(t)$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется уравнениями (4), (5) с начальными условиями

$$\begin{cases} \mu(t_m) = \mu(t_m - 0) + \Gamma(t_m - 0)G^T(t_m)W_1^{-1}(t_m)\tilde{\eta}(t_m), \\ \Gamma(t_m) = \Gamma(t_m - 0) - \Gamma(t_m - 0)G^T(t_m)W_1^{-1}(t_m)G(t_m)\Gamma(t_m - 0), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\tilde{\tilde{\eta}}(t_m) = \tilde{\eta}(t_m) - C\bar{f}(t_m), \quad W_1(t_m) = W(t_m) + C\Theta(t_m)C^T. \quad (10)$$

Утверждение 1. Логарифм отношения правдоподобия $\tilde{\Lambda}_{r_m}(\theta_1 : \theta_0)$ в момент времени t_m определяется формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{r_m}(\theta_1 : \theta_0) = & \frac{1}{2} \ln \frac{|W(t_m)|}{|W_1(t_m)|} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T(t_m) [W^{-1}(t_m) - W_1^{-1}(t_m)] \tilde{\eta}(t_m) + \\ & + \bar{f}^T(t_m) C^T W_1^{-1}(t_m) \tilde{\eta}(t_m) - \frac{1}{2} \bar{f}^T(t_m) C^T W_1^{-1}(t_m) C \bar{f}(t_m), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{\eta}(t_m)$, $W(t_m)$ и $W_1(t_m)$ определены в (8), (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $p_{r_m}(\tilde{\eta} | \theta_0)$ и $p_{r_m}(\tilde{\eta} | \theta_1)$ плотности распределения значений $\tilde{\eta}(t_m)$ соответственно при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$. Непосредственно с использованием (1)–(10) и предположения I постановки задачи можно показать, что последовательность $\{\tilde{\eta}(t_m)\}$, $m = 0, 1, \dots$, является последовательностью независимых гауссовых векторов при гипотезах $H_0[\theta = \theta_0]$ и $H_1[\theta = \theta_1]$, причем

$$p_{r_m}(\tilde{\eta} | \theta_0) = N\{0; W(t_m)\}, \quad p_{r_m}(\tilde{\eta} | \theta_1) = N\{C\bar{f}(t_m); W_1(t_m)\}. \quad (12)$$

Поскольку

$$\tilde{\Lambda}_{r_m}(\theta_1 : \theta_0) = \ln\{\Lambda_{r_m}(\theta_1 : \theta_0)\}, \quad (13)$$

где $\Lambda_{r_m}(\theta_1 : \theta_0) = p_{r_m}(\tilde{\eta}(t_m) | \theta_1) / p_{r_m}(\tilde{\eta}(t_m) | \theta_0)$ — отношение правдоподобия, то использование (12) в (13) приводит к (11).

Обнаружитель аномальной помехи на основе $\tilde{\Lambda}_{r_m}(\theta_1 : \theta_0)$ имеет пороговую структуру вида [13]

$$\tilde{\Lambda}_{r_m}(\theta_1 : \theta_0) \underset{\theta_0}{\overset{\theta_1}{\gtrless}} d(t_m), \quad (14)$$

где значение порога определяется видом критерия. В случае байесовского критерия

$$d(t_m) = \frac{p_{r_m}^0(\theta_0) \omega(0, 1) - \omega(0, 0)}{p_{r_m}^0(\theta_1) \omega(1, 0) - \omega(1, 1)}, \quad (15)$$

где $\omega(i, j)$ — элементы матрицы потерь ($0 \leq i, j \leq 1$), $p_{r_m}^0(\theta_0)$, $p_{r_m}^0(\theta_1)$ — априорные вероятности соответственно отсутствия и наличия аномальной помехи в

момент времени t_m , которые определяются исходя из содержания конкретной задачи.

Если, кроме задачи обнаружения аномальной помехи, стоит задача построения оценки, то соотношения (4)–(10), (14) могут быть объединены в соотношения, определяющие помехоустойчивый (отказоустойчивый, если аномальные помехи связаны с отказами измерительных каналов) фильтр:

$$\dot{\mu}(t) = F(t)\mu(t) + \Gamma(t)H^T(t)R^{-1}(t)[z(t) - H(t)\mu(t)], \quad (16)$$

$$\dot{\Gamma}(t) = F(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)F^T(t) - \Gamma(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)\Gamma(t) + Q(t), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mu(t_m) = & \mu(t_m - 0) + \Gamma(t_m - 0)G^T(t_m)[V(t_m) + G(t_m)\Gamma(t_m - 0)G^T(t_m) + \\ & + \hat{\theta}C\Theta(t_m)C^T]^{-1}[\eta(t_m) - G(t_m)\mu(t_m - 0) - \hat{\theta}C\bar{f}(t_m)], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t_m) = & \Gamma(t_m - 0) - \Gamma(t_m - 0)G^T(t_m)[V(t_m) + G(t_m)\Gamma(t_m - 0)G^T(t_m) + \\ & + \hat{\theta}C\Theta(t_m)C^T]^{-1}G(t_m)\Gamma(t_m - 0), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{\Lambda}_{t_m}(\theta_1 : \theta_0) < d(t_m), \\ 1, & \text{если } \bar{\Lambda}_{t_m}(\theta_1 : \theta_0) \geq d(t_m). \end{cases} \quad (20)$$

Основными характеристиками обнаружителя являются вероятность ложной тревоги $\alpha = P\{\theta = \theta_1 \mid \theta = \theta_0\}$ и вероятность пропуска аномальной помехи $\beta = P\{\theta = \theta_0 \mid \theta = \theta_1\}$. Поскольку точное нахождение α и β связано с нахождением распределения статистики (11) соответственно при гипотезах $H_0\{\theta = \theta_0\}$ и $H_1\{\theta = \theta_1\}$, то в общем случае эта задача затруднительна, поскольку не удастся найти указанные распределения. Однако в конкретных задачах для конкретных обнаружителей путем статистического моделирования можно найти приближенные численные значения α и β , и таким образом встает вопрос о нахождении минимально возможных α и β (будем обозначать их α^* и β^*), достижимых на идеальном обнаружителе, и насколько близки к ним подобные вероятности для реального обнаружителя. Этот вопрос может быть решен на основе неравенств Кульбака [12]:

$$I_{t_m}(1 : 0) \geq \beta \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + (1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}, \quad (21)$$

$$I_{t_m}(0 : 1) \geq \alpha \ln \frac{\alpha}{1 - \beta} + (1 - \alpha) \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}, \quad (22)$$

где

$$I_{t_m}(1 : 0) = M\{\bar{\Lambda}_{t_m}(\theta_1 : \theta_0) \mid \theta_1\}, \quad I_{t_m}(0 : 1) = -M\{\bar{\Lambda}_{t_m}(\theta_1 : \theta_0) \mid \theta_0\}. \quad (23)$$

Использование (11), (12) в (23) дает, что

$$\begin{aligned} I_{t_m}(1 : 0) = & \frac{1}{2} \ln \frac{|W(t_m)|}{|W_1(t_m)|} + \frac{1}{2} \text{tr}[W^{-1}(t_m)W_1(t_m)] + \\ & + \frac{1}{2} \bar{f}^T(t_m)C^T W^{-1}(t_m)C\bar{f}(t_m) - \frac{k}{2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$I_{t_m}(0 : 1) = \frac{1}{2} \ln \frac{|W_1(t_m)|}{|W(t_m)|} + \frac{1}{2} \text{tr}[W_1^{-1}(t_m)W(t_m)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{f}^T(t_m) C^* W_1^{-1}(t_m) C \bar{f}(t_m) - \frac{k}{2}, \quad (25)$$

где $\text{tr}[\cdot]$ — след матрицы $[\cdot]$. Тогда из неравенства (21) можно получить $\alpha^* = \inf \alpha$ при фиксированном β , а из неравенства (22) — $\beta^* = \inf \beta$ при фиксированном α .

Апробация алгоритма проводилась на примере обнаружения аномальных помех, появление которых связано с отказами измерительных каналов, для объекта, которым является продольное движение тяжелого самолета, линеаризованное относительно стационарного режима полета. Условия задачи, а также моделирование на ЦВМ движения и работы фильтра показали, что данный объект относится к системам частного вида, определяемым следующими ограничениями.

1. Система стационарная, т. е. F, H, G, Q, R, V, Θ являются постоянными матрицами, а \bar{f} — постоянный вектор.

2. Матрицы V и Θ являются диагональными, т. е. $V = \text{diag}[V_{11}, V_{22}, \dots, V_{kk}]$, $\Theta = \text{diag}[\Theta_{11}, \Theta_{22}, \dots, \Theta_{rr}]$, $r \leq k$.

3. Отказ происходит после того, как система достигла установившегося состояния, что соответствует достижению уравнением Риккати (5) стационарного решения Γ^* .

4. При гипотезе $H_0\{\theta = \theta_0\}$ в системе обеспечивается высокая точность фильтрации, чему соответствует условие $W \equiv V$.

5. Интенсивности Θ_{ij} и средние \bar{f}_j аномальной помехи масштабируются относительно интенсивностей V_{ij} и среднеквадратических отклонений $\sqrt{V_{ij}}$ регулярной помехи по соответствующим каналам, т. е.

$$\Theta_{ij} = l_j V_{ij}, \quad \bar{f}_j = q_j \sqrt{V_{ij}}, \quad 1 \leq j \leq r, \quad 1 \leq i_j \leq k, \quad (26)$$

где двойной индекс i_j имеет тот же смысл, что и при формировании матрицы C в постановке задачи.

Для систем подобного вида формулы (11), (24), (25) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_m(\theta_1 : \theta_0) = & -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \ln(l_j + 1) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \frac{l_j}{(l_j + 1) V_{ij}} \tilde{\eta}_{ij}^2(t_m) + \\ & + \sum_{j=1}^r \frac{q_j}{(l_j + 1) \sqrt{V_{ij}}} \tilde{\eta}_{ij}(t_m) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \frac{q_j^2}{l_j + 1}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$I_{r,m}(1 : 0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r [l_j - \ln(l_j + 1)] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r q_j^2, \quad (28)$$

$$I_{r,m}(0 : 1) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^r \left(\ln(l_j + 1) + \frac{1}{l_j + 1} \right) - r \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \frac{q_j^2}{l_j + 1}. \quad (29)$$

Если соотношения между Θ_{ij} и V_{ij} , \bar{f}_j и $\sqrt{V_{ij}}$ во всех аномальных каналах одинаковы, т. е. $\Theta_{ij} = l V_{ij}$, $\bar{f}_j = q \sqrt{V_{ij}}$, то формулы (27)–(29) приобретают вид

$$\bar{\Lambda}_m(\theta_1 : \theta_0) = -\frac{r}{2} \ln(l + 1) + \frac{l}{2(l + 1)} \sum_{j=1}^r \frac{\tilde{\eta}_{ij}^2(t_m)}{V_{ij}} + \frac{q}{l + 1} \sum_{j=1}^r \frac{\tilde{\eta}_{ij}(t_m)}{\sqrt{V_{ij}}} - \frac{rq^2}{2(l + 1)}, \quad (30)$$

$$I_m(1:0) = \frac{r}{2} [l - \ln(l+1)] + \frac{1}{2} r q^2, \quad (31)$$

$$I_m(0:1) = \frac{r}{2} \left[\ln(l+1) - \frac{l}{l+1} \right] + \frac{1}{2(l+1)} r q^2. \quad (32)$$

Из (31), (32) и соответственно из (21), (22) следует, что для систем, определяемых ограничениями 1—5, значения односторонних дивергенций $I_m(1:0)$, $I_m(0:1)$ и соответственно нижних границ α^* и β^* для вероятностей α и β определяются только количеством аномальных каналов r и коэффициентами пропорциональности l и q соответственно между интенсивностями аномальной и регулярной помех, средним аномальной помехи и среднеквадратическим отклонением регулярной помехи. Исследование зависимости $I_m(1:0)$ от r , l и q показывает, что $I_m(1:0)$ является монотонно возрастающей функцией этих аргументов и соответственно α^* — монотонно убывающей функцией этих аргументов. Исследование $I_m(0:1)$ показывает, что $I_m(0:1)$ является монотонно возрастающей функцией от r и q , а зависимость от l носит экстремальный характер. При этом $I_m(0:1)$ для $0 \leq l \leq q^2$ монотонно убывает, а для $l > q^2$ монотонно возрастает. В точке $l = 0$ значение $I_m(0:1)$, которое обозначим $I_m^0(0:1)$, и в точке $\tilde{l} = q^2$ минимальное значение $I_m(0:1)$, которое обозначим $\tilde{I}_m(0:1)$, определяются формулами

$$I_m^0(0:1) = \frac{1}{2} r q^2, \quad \tilde{I}_m(0:1) = \frac{1}{2} r \ln(q^2 + 1). \quad (33)$$

На рис. 1 изображено семейство зависимостей $I_m(0:1)$ от l при $q = 3$ для различных r , а на рис. 2 — пересчет по формуле (22) этих зависимостей в β^* при $\alpha = 0,05$. На рис. 3 изображены два семейства зависимостей $I_m(0:1)$ от l при $r = 1$ и $r = 4$ для различных q , а на рис. 4 — пересчет по формуле (22) этих зависимостей в β^* при $\alpha = 0,05$. Штриховыми линиями на рис. 1 и 3 соединены

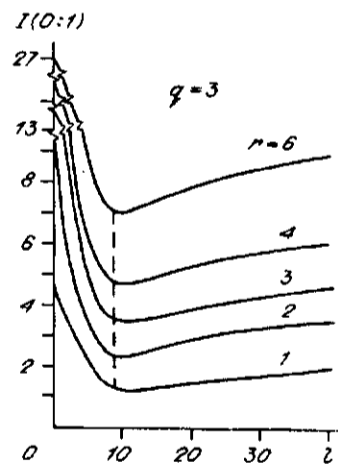


Рис. 1. Односторонняя дивергенция при различном числе аномальных каналов

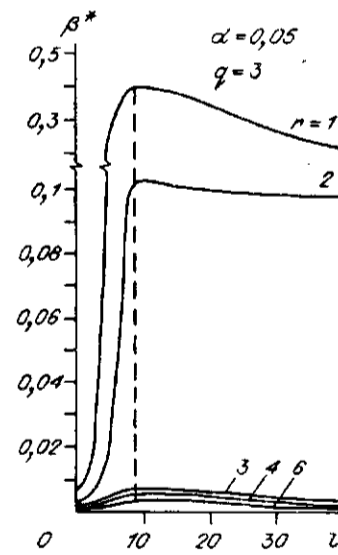


Рис. 2. Нижняя граница вероятности пропуска аномальной помехи

Рис. 3. Семейства односторонних дивергенций при количестве аномальных каналов $r = 1$ и $r = 4$

точки, соответствующие значениям $\tilde{I}_{tm}(0:1)$, вычисленным по формуле (33), а на рис. 2 и 4 — точки, соответствующие $\beta^* = \max \beta^*$, которые достигаются при $\tilde{I} = q^2$. Для упомянутого выше объекта, которым является продольное движение тяжелого самолета, линеаризованное относительно стационарного режима полета, расчеты, проводившиеся по формулам (24), (25) и (31), (32), отличались не более чем на 0,5%.

Семейства кривых, типа изображенных на рис. 2 и 4, рассчитанные и для других значений α , представляют собой, по существу, семейства номограмм, с помощью которых можно находить ответы на вопросы, касающиеся зависимостей потенциально достижимых вероятностных характеристик обнаружителей β^* от значений параметров r, l, q , характеризующих аномальные помехи. Аналогичным образом с использованием формул (31) и (21) могут быть построены семейства кривых для α^* при фиксированных β , с помощью которых можно получать ответы на аналогичные вопросы относительно α^* .

Одним из основных является вопрос о степени близости ошибок α и β , которые достигаются на реальном обнаружителе аномальных помех и их нижних границ α^* и β^* . Приведем некоторые результаты, касающиеся β и β^* , для систем, определяемых ограничениями 1—5. Как известно [13], α, β и порог $d(t_m)$ связаны соотношениями

$$\alpha = \int_{d(t_m)}^{\infty} p_{r,m}(\tilde{\Lambda} | \theta_0) d\tilde{\Lambda}, \quad \beta = \int_{-\infty}^{d(t_m)} p_{r,m}(\tilde{\Lambda} | \theta_1) d\tilde{\Lambda}, \quad (34)$$

где $p_{r,m}(\tilde{\Lambda} | \theta_0)$ и $p_{r,m}(\tilde{\Lambda} | \theta_1)$ — плотности распределений статистики (30) соответственно при гипотезах $H_0\{\theta = \theta_0\}$ и $H_1\{\theta = \theta_1\}$. Рассмотрим случай, когда $l = 0$, т. е. в качестве аномальной помехи в j -м аномальном канале идет константа $\tilde{I}_j, 1 \leq j \leq r$. Тогда из (30) при $l = 0$ следует, что

$$p_{r,m}(\tilde{\Lambda} | \theta_0) = N\left\{-\frac{1}{2}rq^2; rq^2\right\},$$

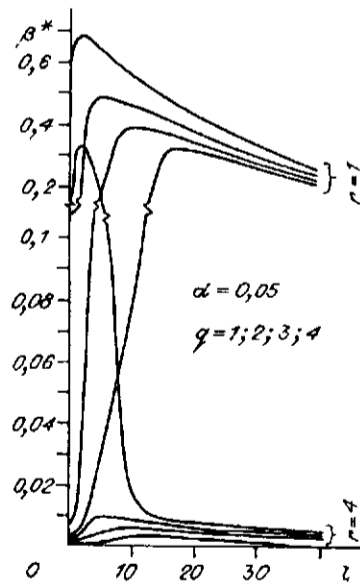
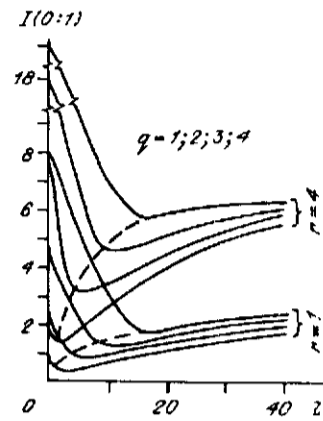
$$p_{r,m}(\tilde{\Lambda} | \theta_1) = N\left\{\frac{1}{2}rq^2; rq^2\right\}, \quad (35)$$

и из первых формул в (34) и (35) получаем

$$\alpha = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{d(t_m) - a_0}{\sigma_0}\right),$$

$$\Phi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-s^2/2} ds, \quad (36)$$

Рис. 4. Семейства нижних границ вероятностей пропуска аномальной помехи при количестве аномальных каналов $r = 1$ и $r = 4$



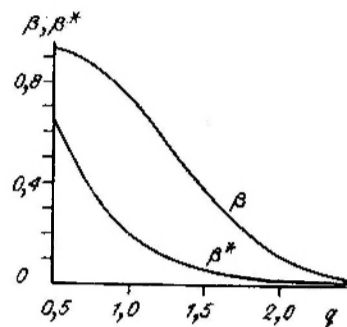


Рис. 5. Нижняя граница вероятности пропуска аномальной помехи β^* и вероятность пропуска аномальной помехи β в обнаружителе Неймана — Пирсона

где $a_0 = -1/2rq^2$, $\sigma_0^2 = rq^2$. Задав α , можно по формуле (36) найти порог, используя который по вторым формулам (34) и (35) можно построить зависимость β от q при фиксированном r , а соответствующая зависимость для β^* может быть построена аналогично зависимостям на рис. 2. На рис. 5 изображены зависимости β и β^* от q при $\alpha = 0,01$ для $r = 3$, из которых сле-

дует, что при заданной вероятности ложного обнаружения аномальной помехи, равной 0,01, числе аномальных каналов, равном трем, константе в качестве аномальной помехи во всех аномальных каналах реальная вероятность пропуска аномальной помехи и ее нижняя граница практически совпадают при $q > 2,5$, т. е. когда аномальная константа начинает превышать среднеквадратическое отклонение регулярной помехи в соответствующем канале более чем в 2,5 раза. Аналогичным образом могут быть построены как зависимости β и β^* при других значениях α и r , так и зависимости α и α^* от q при фиксированных β и r .

Алгоритм обнаружения разладки случайного процесса. Согласно (12) момент появления аномальной помехи может квалифицироваться как момент разладки случайного процесса $\tilde{\eta}(t_m)$, а задача обнаружения момента ее появления — как задача обнаружения момента разладки [14]. Пусть t_s — момент появления аномальной помехи, а t_r — момент обнаружения разладки процесса $\tilde{\eta}(t_m)$. Тогда задача ставится следующим образом: найти t_r из условия минимума среднего времени задержки в обнаружении момента появления аномальной помехи, т. е. из условия

$$M\{t_r - t_s \mid t_r > t_s\} \rightarrow \min \quad (37)$$

при ограничении на вероятность ложной тревоги

$$P\{t_r \leq t_s\} < \alpha. \quad (38)$$

Утверждение 2. Оптимальное в смысле критерия (37) при ограничении (38) решающее правило имеет вид

$$t_r = \inf\{t_m > t_0 : \pi_{t_m} \geq 1 - \alpha\}, \quad (39)$$

где апостериорные вероятности

$$\pi_{t_m} = P\{t_s \leq t_m \mid \tilde{\eta}_0^m\}. \quad (40)$$

$\tilde{\eta}_0^m = \{\tilde{\eta}(t_0), \tilde{\eta}(t_1), \dots, \tilde{\eta}(t_m)\}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \pi_{t_{m+1}} = & |W_1(t_{m+1})|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_{m+1}) - C\tilde{f}(t_{m+1})]^T W_1^{-1}(t_{m+1}) [\tilde{\eta}(t_{m+1}) - \right. \\ & \left. - C\tilde{f}(t_{m+1})]\right\} \left[\pi_{t_m} + (1 - \pi_{t_m}) P_{t_{m+1}}^0(\theta_1) \right] \left\{ |W_1(t_{m+1})|^{-1/2} \times \right. \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_{m+1}) - C\tilde{f}(t_{m+1})]^T W_1^{-1}(t_{m+1}) [\tilde{\eta}(t_{m+1}) - C\tilde{f}(t_{m+1})]\right\} \times \\ & \times \left[\pi_{t_m} + (1 - \pi_{t_m}) P_{t_{m+1}}^0(\theta_1) \right] + |W(t_{m+1})|^{-1/2} \times \end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\eta}^m(t_{m+1})W^{-1}(t_{m+1})\tilde{\eta}^m(t_{m+1})\right\}(1-\pi_{i_m})p_{i_{m+1}}^0(\theta_0)\}^{-1}, \quad (41)$$

$W(t_m)$, $W_1(t_m)$ определены в (8), (10), а $p_{i_{m+1}}^0(\theta_1)$ и $p_{i_{m+1}}^0(\theta_0)$ — априорные вероятности соответственно наличия и отсутствия аномальной помехи в момент t_{m+1} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле условной вероятности

$$\pi_{i_{m+1}} = P\{t_s \leq t_{m+1} \mid \tilde{\eta}_0^{m+1}\} = P\{t_s \leq t_{m+1}, \tilde{\eta}_0^{m+1}\} / P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}\}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} P\{t_s \leq t_{m+1}, \tilde{\eta}_0^{m+1}\} &= P\{t_s \leq t_{m+1}, \tilde{\eta}_0^m, \tilde{\eta}^m(t_{m+1})\} = \\ &= P(\tilde{\eta}^m(t_{m+1}) \mid \tilde{\eta}_0^m, t_s \leq t_{m+1})P\{\tilde{\eta}_0^m, t_s \leq t_{m+1}\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Так как последовательность $\tilde{\eta}^m(t_0), \tilde{\eta}^m(t_1), \dots, \tilde{\eta}^m(t_{m+1})$ является последовательностью независимых случайных векторов, то с учетом (12)

$$P(\tilde{\eta}^m(t_{m+1}) \mid \tilde{\eta}_0^m, t_s \leq t_{m+1}) = P(\tilde{\eta}^m(t_{m+1}) \mid t_s \leq t_{m+1}) = p_{i_{m+1}}(\tilde{\eta} \mid \theta_1). \quad (44)$$

Использование (44) в (43) с последующей подстановкой (43) в (42) и применением формулы условной вероятности к $P\{\tilde{\eta}_0^m, t_s \leq t_{m+1}\}$ дает, что

$$\pi_{i_{m+1}} = p_{i_{m+1}}(\tilde{\eta} \mid \theta_1)P\{t_s \leq t_{m+1} \mid \tilde{\eta}_0^m\}P\{\tilde{\eta}_0^m\} / P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}\}. \quad (45)$$

Следующее соотношение для событий следует из постановки задачи:

$$\{t_s \leq t_{m+1} \mid \tilde{\eta}_0^m\} = [\{t_s \leq t_m \mid \tilde{\eta}_0^m\} \cap \{t_s \neq t_{m+1}\}] \cup \{t_s = t_{m+1}\}.$$

Тогда

$$P\{t_s \leq t_{m+1} \mid \tilde{\eta}_0^m\} = P\{t_s \leq t_m \mid \tilde{\eta}_0^m\}P\{t_s \neq t_{m+1}\} + P\{t_s = t_{m+1}\}.$$

Так как $P\{t_s = t_{m+1}\} = p_{i_{m+1}}^0(\theta_1)$, то согласно (40)

$$P\{t_s \leq t_{m+1} \mid \tilde{\eta}_0^m\} = \pi_{i_m}(1 - p_{i_{m+1}}^0(\theta_1)) + p_{i_{m+1}}^0(\theta_1) = \pi_{i_m} + (1 - \pi_{i_m})p_{i_{m+1}}^0(\theta_1). \quad (46)$$

Подстановка (46) в (45) даст, что

$$\pi_{i_{m+1}} = p_{i_{m+1}}(\tilde{\eta} \mid \theta_1) [\pi_{i_m} + (1 - \pi_{i_m})p_{i_{m+1}}^0(\theta_1)] P\{\tilde{\eta}_0^m\} / P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}\}. \quad (47)$$

Имеем очевидное соотношение для событий

$$\{\tilde{\eta}_0^{m+1}\} = [\{\tilde{\eta}_0^m\} \cap \{t_s \leq t_{m+1}\}] \cup [\{\tilde{\eta}_0^m\} \cap \{t_s > t_{m+1}\}].$$

Тогда

$$P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}\} = P\{\tilde{\eta}_0^m, t_s \leq t_{m+1}\} + P\{\tilde{\eta}_0^m, t_s > t_{m+1}\}. \quad (48)$$

Из (42), (47) следует, что

$$P\{\tilde{\eta}_0^m, t_s \leq t_{m+1}\} = p_{i_{m+1}}(\tilde{\eta} \mid \theta_1) [\pi_{i_m} + (1 - \pi_{i_m})p_{i_{m+1}}^0(\theta_1)] P\{\tilde{\eta}_0^m\}. \quad (49)$$

Использование (49) в (48) с последующей подстановкой в (47) приводит к формуле

$$\pi_{t_{m+1}} = \frac{p_{t_{m+1}}(\tilde{\eta} | \theta_1) [\pi_{t_m} + (1 - \pi_{t_m}) p_{t_{m+1}}^0(\theta_1)] P\{\tilde{\eta}_0^m\}}{p_{t_{m+1}}(\tilde{\eta} | \theta_1) [\pi_{t_m} + (1 - \pi_{t_m}) p_{t_{m+1}}^0(\theta_1)] P\{\tilde{\eta}_0^m\} + P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}, t_s > t_{m+1}\}}. \quad (50)$$

По формуле условной вероятности

$$\begin{aligned} P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}, t_s > t_{m+1}\} &= P\{\tilde{\eta}(t_{m+1}), \tilde{\eta}_0^m, t_s > t_{m+1}\} = \\ &= P\{\tilde{\eta}(t_{m+1}), t_s > t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\} P\{\tilde{\eta}_0^m\}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$P\{\tilde{\eta}(t_{m+1}), t_s > t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\} = p(\tilde{\eta}(t_{m+1}) | \tilde{\eta}_0^m, t_s > t_{m+1}) P\{t_s > t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\}. \quad (52)$$

Аналогично (44) с учетом (12)

$$p(\tilde{\eta}(t_{m+1}) | \tilde{\eta}_0^m, t_s > t_{m+1}) = p(\tilde{\eta}(t_{m+1}) | t_s > t_{m+1}) = p_{t_{m+1}}(\tilde{\eta} | \theta_0). \quad (53)$$

Подстановка (53) в (52) с последующим использованием в (51) дает, что

$$P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}, t_s > t_{m+1}\} = p_{t_{m+1}}(\tilde{\eta} | \theta_0) P\{t_s > t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\} P\{\tilde{\eta}_0^m\}. \quad (54)$$

Очевидно, что

$$P\{t_s > t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\} = \overline{P\{t_s \leq t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\}} = 1 - P\{t_s \leq t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\}, \quad (55)$$

где $\overline{\{B\}}$ — отрицание события $\{B\}$. Использование (46) в (55) даст, что

$$\begin{aligned} P\{t_s > t_{m+1} | \tilde{\eta}_0^m\} &= 1 - [\pi_{t_m} + (1 - \pi_{t_m}) p_{t_{m+1}}^0(\theta_1)] = \\ &= (1 - \pi_{t_m})(1 - p_{t_{m+1}}^0(\theta_1)) = (1 - \pi_{t_m}) p_{t_{m+1}}^0(\theta_0). \end{aligned} \quad (56)$$

Подстановка (56) в (54) приводит к формуле

$$P\{\tilde{\eta}_0^{m+1}, t_s > t_{m+1}\} = p_{t_{m+1}}(\tilde{\eta} | \theta_0) (1 - \pi_{t_m}) p_{t_{m+1}}^0(\theta_0) P\{\tilde{\eta}_0^m\}. \quad (57)$$

Использование (57) в (50) с учетом (12) приводит к (41).

На рис. 6 приведена реализация π_{t_m} для объекта, которым является продольное движение тяжелого самолета при условиях 1—5, когда в момент

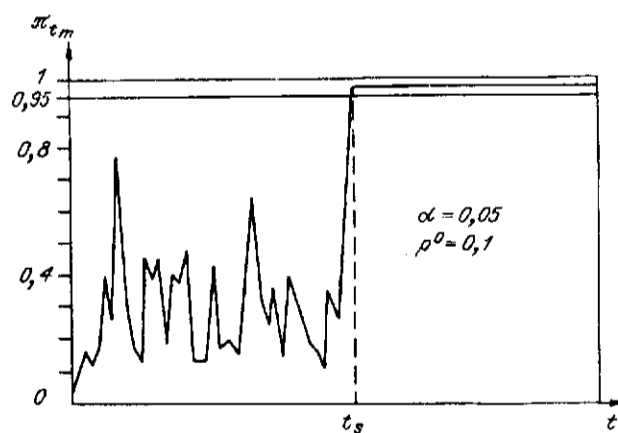


Рис. 6. Апостериорная вероятность появления аномальной помехи не позже момента времени t_m (канал возмущения угла тангажа)

времени t , появилась аномальная помеха в измерительном канале для второй координаты. Моделирование проводилось при $q_i = 0$, $l_i = l = 36$, $p_m^0(\theta_i) = p^0 = 0,1$, $\alpha = 0,05$, $t_s = 20$ с. Моделирование при других значениях исходных параметров показало сильную чувствительность алгоритма к значениям априорной вероятности p^0 , а именно с ростом p^0 увеличивается частота ложных тревог и с уменьшением p^0 она уменьшается. Это свидетельствует о том, что алгоритм хорошо реагирует на реализацию маловероятной априори ситуации. Например, при $p^0 = 0,001$ практически безошибочно обнаруживалась аномальная помеха для $l = 3$, когда ее интенсивность превышала интенсивность регулярной помехи в 3 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кицул П. И. Нелинейная фильтрация по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений // Адаптация, самоорганизация.—М.: Наука, 1970.
2. Кицул П. И. К решению одной задачи эффективной последовательной интерполяции // АиТ.—1974.—№ 12.
3. Демин Н. С., Петров В. В. Интерполяция состояния стохастической системы со скачкообразными параметрами по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.—1977.—№ 6.
4. Демин Н. С. Непрерывно-дискретная скользящая экстраполяция марковских процессов // АиТ.—1981.—№ 7.
5. Демин Н. С. Оценивание и классификация случайных процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.—1979.—№ 1.
6. Демин Н. С. Адаптивное оценивание вектора состояния линейной стохастической динамической системы по совокупности непрерывных и дискретных измерений // Автометрия.—1978.—№ 2.
7. Демин Н. С., Короткевич В. И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // АиТ.—1983.—№ 7.
8. Демин Н. С., Жадан Л. И. Об оптимальности процедуры исключения аномальных измерений // Автометрия.—1983.—№ 4.
9. Демин Н. С., Жадан Л. И. Синтез и анализ оптимального алгоритма фильтрации для дискретных сигналов с аномальными помехами // Радиотехника и электроника.—1984.—29, № 2.
10. Жадан Л. И. К процедуре исключения аномальных измерений // Автометрия.—1985.—№ 2.
11. Демин Н. С., Лузина Л. И. Точность оценивания и возможность обнаружения отказов в системах фильтрации при резервировании измерительных комплексов // Автометрия.—1989.—№ 4.
12. Кульбак С. Теория информации и статистика.—М.: Наука, 1967.
13. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов.—М.: Наука, 1979.
14. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ.—М.: Наука, 1976.

Поступило в редакцию 15 июля 1993 г.