РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 1994

УДК 62-50

М. Г. Зотов
(Москва)

УЛУЧШЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА

Проведено исследование вариации квадратичного функционала, из которого в результате решения оптимизационной задачи следует уравнение Винера — Хопфа $W(s)S(s) - \bar{S}(s) = \Gamma(s)$. В результате этих исследований установлены соотношения между степенями числителя и знаменателя в элементах неизвестной матрицы $\Gamma(s)$. Это соотношение использовано для уменьшения размерности системы уравнений, из которой определяются константы $W_{ij}(\alpha_{kp})$ (α_{kp} — правые полюсы элементов матрицы $S(s)$, $W_{ij}(s)$ — элементы матрицы $W(s)$).

Введение в постановку задачи. В [1—3] изложен алгоритм решения матричных уравнений Винера — Хопфа. На его основе удалось построить процедуру факторизации матриц спектральной плотности [4]. Однако, как показала практика использования в АСНИ [5] написанной по этому алгоритму программы, узким местом оказалось формирование уравнений для отыскания констант. Уравнения определялись из условий [3]:

— искомая передаточная функция имеет полюсы только в левой полуплоскости комплексного переменного;

— разность между степенями знаменателя и числителя в искомых передаточных функциях меньше заданного числа;

— величина функционала, из минимума которого следует уравнение Винера — Хопфа, конечна;

— величина функционала минимальна.

Отметим последовательность применения условий: если количества уравнений для определения констант недостаточно, к используемым условиям присовокупляется следующее согласно перечню, приведенному выше.

Изложенное поясним элементарным примером.

Пример 1. Минимизация функционала

$$I = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{W(s)W(-s)S_{\varphi\varphi}(s) - W(s)S_{\varphi m}(s) - W(-s)S_{m\varphi}(s) + S_{mm}(s)\right\}ds \quad (1)$$

приводит к уравнению Винера — Хопфа вида

$$W(s)S_{\varphi\varphi}(s) - S_{m\varphi}(s) = \Gamma(s), \quad (2)$$

$\Gamma(s)$ — неизвестная функция с полюсами только в правой полуплоскости. При исходных данных

$$S_{mm}(s) = \frac{3}{1 - s^2}, \qquad S_{nn}(s) = \frac{5}{9 - s^2}, \qquad S_{m\varphi}(s) = S_{mm}(s), \quad (3)$$

$S_{mm}(s)$, $S_{nn}(s)$ — спектральные плотности соответственно полезного сигнала $m(t)$ и наложенной на него помехи $n(t)$, $\varphi(t) = m(t) + n(t)$, $S_{m\varphi}(s)$ — взаимная спектральная плотность воздействий $m(t)$ и $\varphi(t)$. С учетом исходных данных уравнение (2) перепишется так:

$$W(s)\left[\frac{3}{1-s^2}+\frac{5}{9-s^2}\right]-\frac{3}{1-s^2}=\Gamma(s). \tag{4}$$

Используя предложенный в [1—3] алгоритм, преобразуем уравнение (4) к виду

$$W(s)\left[\frac{3}{1-s^2}+\frac{5}{9-s^2}\right]-\frac{3}{2}\frac{1}{1-s}W(1)-\frac{5}{6}\frac{1}{3-s}W(3)-\frac{3}{2}\frac{1}{1+s}=0. \tag{5}$$

Переход от (4) к (5) предполагает, что степень числителя в $\Gamma(s)$ ниже степени знаменателя. Для поиска неизвестных $W(1)$, $W(3)$ воспользуемся первым из перечисленных выше условий, а именно $W(s)$ имеет полюсы только в левой полуплоскости комплексного переменного. Из (5) найдем

$$W(s)=\frac{(3+s)}{8(4-s^2)}\frac{9W(1)(3-s)(1+s)+5W(3)(1-s^2)+9(1-s)(3-s)}{6}, \tag{6}$$

тогда

$$9W(1)(3-s)(1+s)+5W(3)(1-s^2)+9(1-s)(3-s)\Big|_{s=2}=$$
$$=27W(1)-15W(3)-9=0. \tag{7}$$

Второе уравнение, связывающее $W(1)$ с $W(3)$, ищется из условия конечности величины функционала. Для выполнимости этого условия степень числителя в (6) не должна превышать степени знаменателя, т. е.

$$-9W(1)-5W(3)+9=0. \tag{8}$$

Решая совместно (7) с (8), найдем $W(1)=2/3$, $W(3)=3/5$, тогда $W(s)=$ $=(3+s)/2(2+s)$.

Основным неудобством при отыскании $W(1)$ и $W(3)$ является то, что ищутся они из разных условий, это усложняет программную реализацию алгоритма. Ниже приводится процедура, позволяющая уменьшать число неизвестных и определять их только из первого условия. Продемонстрируем этот подход на том же примере.

Пример 2. Решить уравнение (4). Предположим, что в $\Gamma(s)$ разность между степенями знаменателя и числителя равна двум. Левую и правую части уравнения умножим на $(1-s)$, и, используя алгоритм из [1—3], преобразуем его к виду

$$W(s)\left[\frac{3}{1+s}+\frac{5(1+s)}{9-s^2}\right]+\frac{5}{3}\frac{1}{3-s}W(3)-\frac{3}{1+s}=0. \tag{9}$$

Как видно, количество неизвестных параметров уменьшилось. Решая уравнение (9), найдем

$$W(s)=\frac{3+s}{8(4-s^2)}\frac{(27-5W(3))-(9+5W(3))s}{3}. \tag{10}$$

Используя тот факт, что полюсы $W(s)$ лежат только в левой полуплоскости (первое условие), находим $W(3)=3/5$, $W(s)=(3+s)/2(2+s)$, т. е. получаем тот же результат.

Из вышеприведенных примеров видно, что количество неизвестных параметров совпадает с количеством правых полюсов в $S_{\varphi\varphi}(s)$. Умножением на $\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i-s)$ (α_i — правые полюсы $S_{\varphi\varphi}(s)$) необходимо стремиться уменьшить их количество в функции $S_{\varphi\varphi}(s)\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i - s)$. Значение k должно быть таким, чтобы функция $\Gamma(s)\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i - s)$ не имела целой части. Напомним, что только при этом условии из (4) следуют (5) и (9) [1—3].

Постановка задачи. Рассмотрим функционал

$$I = S_p\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{W(s)S(s)W^T(-s) - W(s)\overline{S}^T(-s) - \overline{S}(s)W^T(-s) + \overline{\overline{S}}(s)\right\}ds =$$

$$= S_p\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}Q(s)ds, \qquad (11)$$

$W(s)$ — матрица искомых передаточных функций; $S(s)$, $\overline{S}(s)$, $\overline{\overline{S}}(s)$ — матрицы с заданными элементами в виде дробно-рациональных функций.

Минимизация следа равносильна минимизации каждой из компонент, стоящей на диагонали в матрице $Q(s)$. Из (11) запишем i-ю компоненту следа:

$$I_i = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{W_i(s)S(s)W_i^T(-s) - W_i(s)\overline{S}_i^T(-s) - \overline{S}_i(s)W_i^T(-s) + \overline{\overline{S}}_{ii}(s)\right\}ds, \qquad (12)$$

$W_i(s)$, $\overline{S}_i(s)$ — i-е строки матриц $W(s)$ и $\overline{S}(s)$; $\overline{\overline{S}}_{ii}(s)$ — элемент i-й строки и i-го столбца матрицы $\overline{\overline{S}}(s)$.

Решение оптимизационной задачи приводит к матричному уравнению Винера — Хопфа

$$W_i(s)S(s) - \overline{S}_i(s) = \Gamma_i(s), \qquad (13)$$

$\Gamma_i(s)$ — строка, элементы которой — неизвестные дробно-рациональные функции с полюсами только в правой полуплоскости.

Для каждого элемента $\Gamma_i(s)$ необходимо найти разность степеней знаменателя и числителя, чтобы использовать эту информацию для уменьшения числа неизвестных параметров $W_i(\alpha_{kp})$ (α_{kp} — правые полюсы элементов матрицы $S(s)$).

Вывод основного соотношения. Если $W_i^{\text{оп}}(s)$ доставляет минимум (12), то $W_i^{\text{оп}}(s) + \alpha A_i(s)$ увеличивает значение функционала (α — параметр; $A_i(s)$ — строка, элементы которой любые, но из того же класса, что и элементы $W_i^{\text{оп}}(s)$, т. е. с полюсами только в левой полуплоскости комплексного переменного). Подставив в (12) вместо $W_i(s)$ функцию $W_i^{\text{оп}}(s) + \alpha A_i(s)$, выделим приращение функционала [6]

$$\Delta_i = \alpha\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Gamma_i(s)A_i^T(-s)ds + \alpha^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}A_i(s)S(s)A_i^T(-s)ds. \qquad (14)$$

Проведем его анализ. Величина Δ_i должна быть конечной при любых $A_i(s)$ из заданного класса и всегда больше нуля. Такое возможно, если первый интеграл из (14) всегда равен нулю, т. е.

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Gamma_i(s)A_i^T(-s)ds = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Gamma_{il}(s)A_{il}(-s)ds = 0. \qquad (15)$$

Так как $A_{il}(-s)$ — функция любая, то для выполнения (15) каждый из интегралов под знаком суммы должен быть равен нулю [6], что означает: $\Gamma_i(s)$ имеет полюсы в той же полуплоскости, что и $A_i(-s)$, т. е. в правой, степень числителя должна быть меньше степени знаменателя не менее чем на два [7]. Введем соотношения:

$$A_{il}(s) = \frac{B_{il}(s)}{C_{il}(s)}, \quad \Gamma_{il}(s) = \frac{\Lambda_{il}(s)}{\Theta_{il}(s)}, \quad S_{lk}(s) = \frac{D_{lk}(s)}{P_{lk}(s)}. \tag{16}$$

Обозначим степени полиномов малыми буквами (это соглашение имеет место и далее). Следуя изложенному выше, можно записать:

$$\theta_{il} + c_{il} \geq \lambda_{il} + b_{il} + 2. \tag{17}$$

Однако если (15) выполняется при

$$\theta_{il} + c_{il} = \lambda_{il} + b_{il} + 2, \tag{18}$$

то оно и подавно выполняется при $\theta_{il} + c_{il} > \lambda_{il} + b_{il} + 2$. Перейдем ко второму интегралу в (14). Его величина должна быть конечной. Это означает, что степень его числителя меньше степени знаменателя хотя бы на единицу [7]. Заметим, что подынтегральная функция является четной. Рассмотрим ее:

$$A_i(s)S(s)A_i^T(-s) = \sum_k (A_{i1}(s)S_{1k}(s) + \dots + A_{il}(s)S_{lk}(s) + \dots$$

$$\dots + A_{in}(s)S_{nk}(s))A_{ik}(-s). \tag{19}$$

Величина интеграла конечна, если каждое слагаемое из (19) имеет степень знаменателя выше степени числителя, т. е. для функции из (19) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} c_{il} + \rho_{lk} + c_{ik} &\geq b_{il} + d_{lk} + b_{ik} + 1 \quad \text{при } k \neq l, \\ 2c_{il} + \rho_{ll} &\geq 2b_{il} + d_{ll} + 2 \quad \text{при } k = l. \end{aligned} \tag{20}$$

В силу того что при $k = l$ подынтегральная функция четная, величина интеграла от нее конечна, если степень числителя меньше степени знаменателя на два. Это учтено при записи второго соотношения в (20). Преобразуем (20) к более удобному виду:

$$\begin{aligned} (c_{il} - b_{il}) + (c_{ik} - b_{ik}) &> d_{lk} - \rho_{lk} + 1 \quad \text{при } k \neq l, \\ 2(c_{il} - b_{il}) &> d_{ll} - \rho_{ll} + 2 \quad \text{при } k = l. \end{aligned} \tag{21}$$

Используя (18), найдем

$$\begin{aligned} (\lambda_{il} - \theta_{il}) + (\lambda_{ik} - \theta_{ik}) + 4 &\geq d_{lk} - \rho_{lk} + 1 \quad \text{при } k \neq l, \\ 2(\lambda_{il} - \theta_{il}) &> d_{ll} - \rho_{ll} - 2 \quad \text{при } k = l. \end{aligned} \tag{22}$$

Как видно из (22), для определения разности степеней числителя и знаменателя в функции $\Gamma_{il}(s)$ достаточно второго соотношения:

$$2(\theta_{il} - \lambda_{il}) < \rho_{ll} - d_{ll} + 2. \tag{23}$$

Из (23) следует оценка минимально возможного рассогласования между степенью знаменателя и числителя в функции $\Gamma_{il}(s)$:

$$2(\theta_{il} - \lambda_{il}) = \rho_{ll} - d_{ll} + 2. \tag{24}$$

Из соотношения (24) следует грань, разделяющая случаи, когда необходимо умножение на функции только с правыми нулями и с правыми полюсами. Эта грань ищется из условия $\theta_{il} - \lambda_{il} = 1$, что имеет место при

$$\rho_{ii} - d_{ii} = 0. \tag{25}$$

Для пояснения изложенного рассмотрим

П р и м е р 3. Найти решение уравнения Винера — Хопфа:

$$\frac{(1 - s^2)(4 - s^2)}{9 - s^2} W(s) - \frac{20}{9 - s^2} = \Gamma(s). \tag{26}$$

Уравнения, где в исходных дробно-рациональных функциях степень числителя выше степени знаменателя, имеют место при решении задач с различного рода ограничениями, например на реализуемость передаточных функций управляющего устройства [3]. Используя оценку (24), найдем $b - \lambda = 0$, т. е. функция $\Gamma(s)$ может содержать целую часть. Нормируем исходное уравнение, умножив левую и правую части на функцию $1/(2 - s)$. Полученное уравнение преобразуем к виду, используя методику из [1—3]:

$$\frac{(1 - s^2)(2 + s)}{9 - s^2} W(s) + \frac{20}{3(3 - s)} W(3) - \frac{2}{3(3 + s)} = 0, \tag{27}$$

откуда

$$W(s) = -\frac{20(3 + s)W(3) - 2(3 - s)}{3(1 - s^2)(2 + s)}. \tag{28}$$

Из условия, что $+1$ является корнем числителя, следует уравнение $80W(3) - 4 = 0$, откуда $W(3) = 1/20$. Подставим найденное значение $W(3)$ в уравнение (28). В результате получим $W(s) = 1/(1 + s)(2 + s)$. Из исходного уравнения найдем $\Gamma(s) = -(6 - s)/(3 - s)$, т. е. $\Gamma(s)$ действительно содержит целую часть. Предварительная нормировка исходного уравнения позволила от нее избавиться.

Алгоритм решения задачи. Используя изложенное выше, приведем алгоритм решения матричного уравнения Винера — Хопфа:

1. По соотношению (24) определяется разность между степенями знаменателя и числителя функции $\Gamma_{ii}(s)$.

2. Образовывается диагональная матрица с полиномиальными элементами $T_i(s)$. Степень $T_i(s)$ на единицу меньше разности степеней знаменателя и числителя функции $\Gamma_{ii}(s)$.

3. Левая и правая части уравнения (13) умножаются справа на $T_i(s)$ (корни полинома $T_i(s)$ задаются так, чтобы суммарное количество правых полюсов в матрице $S(s)T_i(s)$ было наименьшим, назначение таких корней обычно затруднений не вызывает).

4. Далее для решения используется алгоритм из [1—3].

Алгоритм решения поясним на примере. На нем же приведем сравнительную оценку предлагаемого способа.

П р и м е р 4. Найти решение матричного уравнения

$$\left\| W_1(s) W_2(s) \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{9}{9 - s^2} + \frac{0,25}{1 - s^2} & \frac{12}{(3 + s)(4 - s)} \\ \frac{12}{(4 + s)(3 - s)} & \frac{16}{16 - s^2} + \frac{1}{4 - s^2} \end{matrix} \right\| -$$

$$- \left\| \frac{9}{9 - s^2} \; \frac{12}{(3 + s)(4 - s)} \right\| = \left\| \Gamma_1(s)\Gamma_2(s) \right\|. \tag{29}$$

Решение проведем, используя метод из [1—3]. Согласно оценке (24), степень числителя в $\Gamma_1(s)$ и $\Gamma_2(s)$ меньше степени знаменателя на два. Используя алгоритм из [1—3], преобразуем эту систему к виду

$$W_1(s)\left(\frac{9}{9-s^2}+\frac{0{,}25}{1-s^2}\right)+W_2(s)\frac{12}{(4+s)(3-s)}-\frac{3}{2(3-s)}W_1(3)-$$

$$-\frac{0{,}25}{2(1-s)}W_1(1)-\frac{12}{7(3-s)}W_2(3)-\frac{3}{2(1+s)}=0, \tag{30}$$

$$W_1(s)\frac{12}{(3+s)(4-s)}+W_2(s)\left(\frac{16}{16-s^2}+\frac{1}{4-s^2}\right)-\frac{12}{7(4-s)}W_1(4)-$$

$$-\frac{2}{4-s}W_2(4)-\frac{1}{4(2-s)}W_2(2)-\frac{12}{7(3+s)}=0.$$

Вместо неизвестных функций $\Gamma_1(s)$ и $\Gamma_2(s)$, в системе уравнений появились неизвестные константы $W_1(3)$, $W_1(1)$, $W_1(4)$, $W_2(3)$, $W_2(4)$, $W_2(2)$. Всего их шесть. Из системы уравнений (30) найдем $W_1(s)$ и $W_2(s)$. Четыре уравнения формируются из следующего условия: полюсы $W_1(s)$ и $W_2(s)$ находятся только в левой полуплоскости. Эти уравнения имеют вид:

$$W_2(2)+2{,}112W_2(4)+1{,}810W_1(4)-3{,}326W_2(3)+$$

$$+1{,}268W_1(1)-2{,}910W_1(3)=0{,}0403,$$

$$W_2(2)-17{,}495W_2(4)-14{,}996W_1(4)+19{,}351W_2(3)+$$

$$+0{,}0677W_1(1)+16{,}932W_1(3)=2{,}153, \tag{31}$$

$$W_2(2)+2{,}121W_2(4)+1{,}818W_1(4)-3{,}327W_2(3)+$$

$$+1{,}266W_1(1)-2{,}911W_1(3)=0{,}00933,$$

$$W_2(2)-19{,}491W_2(4)-16{,}707W_1(4)+22{,}124W_2(3)+$$

$$+0{,}164W_1(1)+19{,}358W_1(3)=2{,}886.$$

К сожалению, два других уравнения приходится искать из условия конечности величины функционала, из минимизации которого следует система (29). Из анализа этого функционала следует, что он конечен, если степень числителя $W_1(s)$ и $W_2(s)$ не превышает степени знаменателя. Из этого условия следует система уравнений:

$$W_2(2)+8{,}000W_2(4)+6{,}857W_1(4)-9{,}714W_2(3)-$$

$$-0{,}708W_1(1)-8{,}500W_1(3)=-1{,}642, \tag{32}$$

$$W_2(2)+8{,}000W_2(4)+6{,}857W_1(4)-8{,}896W_2(3)-$$

$$-0{,}649W_1(1)-7{,}784W_1(3)=-0{,}927.$$

Решая систему из шести уравнений с шестью неизвестными, найдем $W_2(4)=0{,}112$, $W_2(3)=0{,}176$, $W_2(2)=0{,}312$, $W_1(4)=0{,}824$, $W_1(3)=0{,}751$, $W_1(1)=0{,}579$. К сожалению, матрица исходных данных близка к вырожденной (величина определителя порядка 10^{-6}). Решение было получено в системе REDUCE, где разрядность представления числа может задаваться произвольно. Подставив полученные в результате решения системы уравнений (31), (32) неизвестные в $W_1(s)$ и $W_2(s)$ и проведя сокращение совпадающих нулей и полюсов, получим

$$W_1(s) = \frac{0{,}635(s + 4{,}026)(s + 1)}{(s + 3{,}771)(s + 1{,}311)}, \qquad W_2(s) = \frac{0{,}248(s + 2)(s + 4)}{(s + 3{,}771)(s + 1{,}311)}. \tag{33}$$

Рассмотрим решение матричного уравнения (29) с использованием предлагаемого способа. Левую и правую части уравнения (29) справа умножим на матрицу

$$\begin{Vmatrix} 3 - s & 0 \\ 0 & 4 - s \end{Vmatrix}. \tag{34}$$

В результате получим

$$\begin{Vmatrix} W_1(s)\, W_2(s) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{9}{3 + s} + 0{,}25\,\frac{3 - s}{1 - s^2} & \frac{12}{3 + s} \\ \frac{12}{4 + s} & \frac{16}{4 - s} + \frac{4 - s}{4 - s^2} \end{Vmatrix} -$$

$$- \begin{Vmatrix} \frac{9}{3 + s}\, \frac{12}{3 + s} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Gamma_1(s)(3 - s)\Gamma_2(s)(4 - s) \end{Vmatrix}. \tag{35}$$

Используя алгоритм из [1—3], преобразуем эту систему к виду

$$W_1(s)\left(\frac{9}{3 + s} + 0{,}25\,\frac{3 - s}{1 - s^2}\right) + W_2(s)\,\frac{12}{(4 + s)} = \frac{9}{3 + s} + \frac{0{,}25}{1 - s}\,W_1(1),$$

$$W_1(s)\,\frac{12}{(3 + s)} + W_2(s)\left(\frac{16}{4 + s} + \frac{4 - s}{4 - s^2}\right) = \frac{12}{3 + s} + \frac{0{,}5}{2 - s}\,W_2(2). \tag{36}$$

Как видно, количество неизвестных параметров уменьшилось в 3 раза. Найдем $W_1(s)$ и $W_2(s)$:

$$W_1(s) = \frac{\{[9(1 - s) + 0{,}25W_1(1)(3 + s)]\,[16(4 - s) + 16 - s^2] - 12[12(2 - s) +}{(s^2 - 1{,}311^2)(s^2 - 3{,}772^2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ 0{,}5(3 + s)W_2(2)](1 - s)(2 + s)\}\,(1 + s)}{},$$

$$W_2(s) = \frac{\{[9(1 - s^2) + 0{,}25(9 - s^2)]\,[12(2 - s) + 0{,}5W_2(2)(3 + s)] - 12[9(1 - s) +}{(s^2 - 1{,}311^2)(s^2 - 3{,}772^2)(s + 3)} \rightarrow \tag{37}$$

$$\rightarrow \frac{+ 0{,}25W_1(1)(3 + s)](1 + s)(2 - s)\}\,(4 + s)(2 + s)}{}.$$

Входящие в $W_1(s)$ и $W_2(s)$ неизвестные ищутся из условия, что передаточные функции $W_1(s)$ и $W_2(s)$ имеют корни только в левой полуплоскости комплексного переменного. Эти условия для $W_1(s)$ приводят к системе уравнений:

$$-407{,}391W_2(2) + 171{,}715W_1(1) = -27{,}765,$$

$$-10{,}027W_2(2) - 20{,}591W_1(1) = -15{,}047. \tag{38}$$

Решая ее, находим: $W_2(2) = 0{,}3121$, $W_1(1) = 0{,}579$. Проблем с вырожденностью матрицы исходных данных здесь нет. Величина определителя порядка 10^3. Подставляя эти значения в $W_1(s)$ и $W_2(s)$, сокращая совпадающие нули и полюсы, приходим к полученным ранее соотношениям (33). Отметим, что неизвестные $W_1(1)$ и $W_2(2)$ можно искать, используя функцию $W_2(s)$. Из данного примера можно сделать вывод: предложенный способ приводит к существенному улучшению алгоритма решения матричного уравнения Винера — Хопфа, так как сокращает размерность системы уравнений для отыскания $W_i(\alpha_{kp})$, количество условий, из которых они следуют. Вероятность получения в процессе решения вырожденных матриц уменьшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зотов М. Г. Решение систем интегральных уравнений при оптимальном синтезе многомерных систем // Автометрия.—1973.—№ 4.
2. Зотов М. Г. Об одном алгоритме решения интегральных уравнений Винера — Хопфа // Автометрия.—1983.—№ 1.
3. Зотов М. Г. Аналитическое конструирование стационарных управляющих устройств.—М.: Энергоатомиздат, 1987.
4. Зотов М. Г. Алгоритм факторизации матриц спектральной плотности // Изв. вузов. Приборостроение.—1986.—№ 4.
5. Зотов М. Г., Востриков М. М. Комплексный подход к разработке АСНИ систем автоматического управления с аналитической компонентой // Приборы и системы управления.—1991.—№ 6.
6. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.—М.: Наука, 1965.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.—М.: Физматгиз, 1958.

Поступило в редакцию 20 мая 1993 г.