

СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ
АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 535.81.01

Ю. Е. Воскобойников

(Новосибирск)

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЙ АЛГОРИТМ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Предлагается нелинейный регуляризирующий алгоритм решения интегрального уравнения-свертки I-го рода в классе импульсных функций. Алгоритм основан на итерационном «доопределении» высокочастотных составляющих искомого решения исходя из заданных априорных ограничений.

Введение. Для линейных измерительных систем связь результата измерения $f(x)$ с измеряемым сигналом $\varphi(y)$ описывается интегральным уравнением-сверткой I-го рода вида

$$\int k(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \quad (1)$$

ядро которого $k(x)$ считается известным. Задача восстановления сигнала $\varphi(y)$ по измеренным значениям $f(x)$ получила название *обратной измерительной задачи* (или задачи редукции к идеальному прибору, не искажающему сигнал $\varphi(y)$) и является некорректно поставленной [1]. Характерная черта — неустойчивость к погрешностям измерений, т. е. малые ошибки регистрации функции $f(x)$ вызывают значительные ошибки восстановления $\varphi(y)$.

Существуют эффективные линейные алгоритмы [2, 3] построения устойчивых (регуляризованных) решений при различной «количественной» априорной информации о погрешностях измерений и искомой функции $\varphi(y)$, основанные на дискретном преобразовании Фурье. Однако линейные регуляризирующие алгоритмы (РА) для некоторых классов сигналов $\varphi(y)$ («ширина» которых в несколько раз меньше «ширины» ядра $k(x)$) не позволяют получать приемлемое регуляризованное решение. Так, в спектроскопических, оптических измерениях искомое решение $\varphi(y)$ имеет вид «узких» импульсов, где короткие интервалы ненулевых значений чередуются с продолжительными интервалами нулевых значений. Такие сигналы (называемые в дальнейшем *импульсными*) имеют широкий энергетический спектр, который после прохождения через прибор с ограниченной полосой пропускания трансформируется в низкочастотный, т. е. сигнал $f(x)$ уже не содержит высокочастотные составляющие функции $\varphi(y)$. В силу этого качественное восстановление таких сигналов линейными РА невозможно. Поэтому предлагается (развивая результаты работ [4, 5]) эффективный нелинейный РА решения обратной измерительной задачи в классе импульсных сигналов, основанный на итерационном доопределении высокочастотных составляющих решения $\varphi(y)$, исходя из соответствующих априорных ограничений.

Нелинейный регуляризирующий алгоритм. Численное решение уравнения (1) подразумевает переход к *конечномерному* аналогу. Осуществим этот переход путем дискретизации (1) при следующих предположениях [3, с. 175]:

1. Функции $\varphi(y)$, $k(x)$ финитны и обращаются в нуль вне интервалов $[a_\varphi, b_\varphi]$, $[a_k, b_k]$.

2. Финитная функция $f(x)$ измеряется на интервале $[a_f, b_f]$, $a_f \leq a_\varphi + a_k$, $b_f \geq b_\varphi + b_k$ в узлах $x_j = a_f + j\Delta$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_f - 1$, где $N_f = \text{ent}[(b_f - a_f)/\Delta] + 1$ — количество измерений, Δ — шаг дискретизации, $\text{ent}[z]$ — целая часть числа z . Измеренные значения допускают представление

$$\tilde{f}(j) = f(x_j) + \eta(j), \quad 0 \leq j \leq N_f - 1, \quad (2)$$

где $\eta(j)$ — стационарный дискретный шум измерения с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 .

3. Интеграл-свертка (1) аппроксимируется дискретной сверткой

$$f(j) = \sum_{m=0}^{N_\varphi-1} k(j-m)\varphi(m)\Delta, \quad (3)$$

в которой $\{k(j)\}$, $\{\varphi(m)\}$ — дискретные последовательности длиной N_k, N_φ , образованные дискретизацией функций k, φ с шагом Δ . Ошибка аппроксимации мала по сравнению с $\eta(j)$. При проведенной дискретизации обратная задача заключается в нахождении решения дискретной свертки (3), т. е. последовательности $\{\varphi(m)\}$, элементы которой отождествляются со значением искомого решения в узлах $y_j = (a_f - a_k) + j\Delta$, $0 \leq j \leq N_\varphi - 1$. «Быстрый» алгоритм построения регуляризованного решения свертки (3) на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) подробно изложен в [3]. Поэтому здесь приведем только конечную запись алгоритма в виде последовательности следующих шагов [4]:

Шаг 1. Выбирается наименьшая величина N , позволяющая использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (в частности, $N = 2^m$) и удовлетворяющая условию

$$N \geq N_f + N_k + N_\eta - 2, \quad (4)$$

где N_k — количество отсчетов ядра $k(x)$, $N_\eta = \text{ent}[\tau_\eta / \Delta]$, τ_η — интервал корреляции шума измерения.

Шаг 2. Формируются периодические последовательности (индекс p означает периодичность)

$$\tilde{f}_p(j) = \begin{cases} \tilde{f}(j), & 0 \leq j \leq N_f - 1; \\ 0, & N_f \leq j \leq N - 1; \end{cases}$$

$$k_p(j) = \begin{cases} k(j)\Delta, & 0 \leq j \leq N_k - 1; \\ 0, & N_k \leq j \leq N - N_M - 1; \\ k(j - N)\Delta, & N - N_M \leq j \leq N - 1, \end{cases}$$

где N_p, N_M — число отсчетов ядра при положительных (включая нуль) и отрицательных значениях аргумента.

Шаг 3. Вычисляется прямое ДПФ от $\{\tilde{f}_p(j)\}$ и обратное ДПФ от последовательности $\{k_p(j)\}$:

$$\tilde{F}_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i lj}{N}\right), \quad 0 \leq l \leq N - 1; \quad (5)$$

$$\lambda_k(l) = \sum_{j=0}^{N-1} k_p(j) \exp\left(\frac{2\pi i l j}{N}\right). \quad (6)$$

Шаг 4. Вычисляются коэффициенты ДПФ регуляризованного решения

$$\Phi_{pa}(l) = \frac{\lambda_k(l)}{|\lambda_k(l)|^2 + \alpha \lambda_q(l)} \tilde{F}_p(l), \quad 0 \leq l \leq N-1. \quad (7)$$

Шаг 5. Обратным ДПФ (6) по коэффициентам $\Phi_{pa}(l)$ вычисляется периодическая последовательность $\{\varphi_{pa}(j)\}$.

Шаг 6. Формируется N_p -мерный вектор φ_a регуляризованного решения свертки (3):

$$\varphi_a(j) = \varphi_{pa}(j), \quad 0 \leq j \leq N_p - 1. \quad (8)$$

Последовательность $\{\lambda_q(l)\}$, входящая в (7), определяется имеющейся априорной информацией о статистических характеристиках шума и гладкости искомого решения (подробнее см. [3, с. 173, 180]). Оценка оптимального (при фиксированной $\{\lambda_q(l)\}$) значения параметра регуляризации α при известной дисперсии шума осуществляется на основе критерия оптимальности [3], а при неизвестной дисперсии — на основе метода перекрестной значимости [3]. Выбор параметра может быть также проведен по заданным точностным характеристикам РА [5].

З а м е ч а н и е 1. Число коэффициентов $\Phi_{pa}(l)$, определяемых на шаге 4, равно N . Однако свойство $\Phi_{pa}(l) = \Phi_{pa}^*(N-l)$, $l = N/2 + 1, \dots, N-1$, уменьшает число неизвестных коэффициентов до $N/2 + 1$. Поэтому при численной реализации используются только первые $N/2 + 1$ коэффициентов ДПФ.

Рассмотрим *обеспечение* измерительной информации коэффициентов $\Phi_{pa}(l)$ регуляризованного решения. В силу их линейной зависимости от $\tilde{F}_p(l)$ коэффициенты $\Phi_{pa}(l)$ практически не содержат информации о коэффициентах точного решения в двух ситуациях:

$$|\lambda_k(l)| \approx 0;$$

$$\alpha \lambda_q(l) / [|\lambda_k(l)|^2 + \alpha \lambda_q(l)] \approx 1.$$

Второй случай свидетельствует о существенной систематической ошибке оценивания $\Phi_p(l)$, вносимой методом регуляризации. Следовательно, доопределять нужно те $\Phi_p(l)$, индексы в которых удовлетворяют одному из условий:

$$|\lambda_k(l)| < \beta_1; \quad (9)$$

$$\alpha \lambda_q(l) / [|\lambda_k(l)|^2 + \alpha \lambda_q(l)] > \beta_2, \quad (10)$$

где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 1$ — *пороговые значения*. Таким образом, индексы $0 \leq l \leq N/2$ делятся на два множества L_1 и L_2 . Если $l \in L_1$, то $\Phi_p(l) = \Phi_{pa}(l)$; если $l \in L_2$, то $\Phi_{pa}(l)$ определяется на основе априорной информации.

Множества L_1, L_2 можно сформировать непосредственно по условиям (9), (10). В работе [4] предложено более простое правило формирования L_1, L_2 :

$$L_1 = \{l: 0 \leq l \leq M_d(\alpha) - 1\}; \quad L_2 = \{l: M_d(\alpha) \leq l \leq N/2\},$$

где

$$M_d(\alpha) = \sum_{l=0}^{N/2} \frac{|\lambda_k(l)|^2}{|\lambda_k(l)|^2 + \alpha \lambda_Q(l)} \quad (11)$$

— «обобщенное число» коэффициентов ДПФ, не искаженных линейным регуляризирующим алгоритмом (значение $|\lambda_k(l)|^2 / [|\lambda_k(l)|^2 + \alpha \lambda_Q(l)] \approx 1$ свидетельствует о малой систематической ошибке оценивания коэффициента $\Phi_p(l)$). В дальнейшем подразумевается, что множества L_1, L_2 сформированы тем или иным способом.

Рассмотрим следующие ограничения, порождаемые соответствующей априорной информацией:

1. Финитность решения $\varphi(y)$ определяет допустимое множество для последовательности $\varphi(j)$:

$$\Phi_2 = \{\varphi : \varphi_{\min}(J) \geq \varphi_{\min} \geq \varphi_{\max}(J)\}.$$

3. Импульсная форма решения $\varphi(y)$ порождает допустимое множество

$$\Phi_3 = \{\varphi : \varphi(j) = 0, \quad j \in J_0, \quad J_0 \subset J_p\}.$$

Для последовательностей из этого множества имеет место чередование интервалов ненулевых значений ($j \notin J_0$) с достаточно продолжительными интервалами нулевых значений ($j \in J_0$).

4. Условие сохранения «низкочастотных» информативных составляющих регуляризованного решения φ_α определяет множество

$$\Phi_4 = \{\varphi : (FR_N \varphi)(l) = \Phi_{pa}(l), \quad l \in L_1\},$$

где F — оператор прямого ДПФ (5). Оператор R_N строит последовательность длиной N добавлением $N - N_p$ нулей к последовательности φ .

Построение решения, удовлетворяющего всем этим ограничениям, осуществим методом проекций на выпуклые множества. Теория метода изложена в [6], а его применение при решении обратных задач — в [4, 7]. Поэтому здесь приведем только соотношения, необходимые для алгоритмической реализации этого метода применительно к построенным множествам $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$.

В методе проекций на выпуклые множества строится последовательность элементов $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}, \dots$ и для получения следующего элемента $\varphi^{(n+1)}$ выбирается некоторое множество $\Phi_{i(n)}$ и делается шаг по направлению к этому множеству, т. е.

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} + \mu_i^{(n)} (P_{i(n)} \varphi^{(n)} - \varphi^{(n)}) = T_{i(n)} \varphi^{(n)}, \quad (12)$$

где $P_{i(n)}$ — оператор проектирования на множество $\Phi_{i(n)}$.

В частном случае $\mu_i^{(n)} \equiv 1$ элемент $\varphi^{(n+1)}$ есть проекция $\varphi^{(n)}$ на множество с номером $i(n)$.

Справедливо следующее утверждение [6]. Если множества Φ_i выпуклы, их пересечение $\Phi^* = \bigcap \Phi_i$ не пусто и выполняется условие

$$0 < \mu_i^{(n)} < 2, \quad (13)$$

то при периодическом выборе номера $i(n)$, т. е. $i(n) = 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \dots$, имеет место сходимость $\varphi^{(n)}$ к элементу $\varphi^* \in \Phi^*$.

В нашем случае множества $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ выпуклы, и если они имеют общую точку (т. е. ограничения совместны), то $\varphi^{(n)}$ сходится к $\varphi^* \in \bigcap \Phi_i$. В случае когда множество Φ^* пусто (из-за несовместности ограничений во временной (множества Φ_1, Φ_2, Φ_3) и частотной (множество Φ_4) области), в качестве φ^* принимается предельная точка, принадлежащая пересечению $\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3$ (более подробно см. [4]).

З а м е ч а н и е 2. Параметры релаксации $\mu_i^{(n)}$, удовлетворяющие (13), можно задавать соотношениями:

$$P_1\varphi = \begin{cases} \varphi(j), & j \in J_\varphi; \\ 0, & j \notin J_\varphi; \end{cases} \quad P_3\varphi = \begin{cases} \varphi(j), & j \notin J_0; \\ 0, & j \in J_0; \end{cases}$$

$$P_2\varphi = \begin{cases} \varphi_{\min}(j), & \text{если } \varphi(j) < \varphi_{\min}(j); \\ \varphi(j), & \text{если } \varphi_{\min}(j) \leq \varphi(j) \leq \varphi_{\max}(j); \\ \varphi_{\max}(j), & \text{если } \varphi(j) > \varphi_{\max}(j); \end{cases}$$

$$P_4\varphi = S_N F^{-1} D_M F R_N \varphi,$$

где S_N — оператор, преобразующий последовательность из N элементов в последовательность, состоящую из N_φ элементов, удалением последних $N - N_\varphi$ элементов; D_M — оператор, приписывающий коэффициентам ДПФ $\Phi_p(l)$ заданные значения $\Phi_{pa}(l)$, т. е.

$$D_M\{\Phi_p(l)\} = \begin{cases} \Phi_{pa}(l), & l \in L_1; \\ \Phi_p(l), & l \in L_2. \end{cases}$$

Если реализация операторов P_1, P_2, P_4 тривиальна, то оператор P_3 требует задания множества индексов J_0 . Очевидно, что из-за незнания функции $\varphi(y)$ априори (т. е. до выполнения итерационной процедуры) нельзя определить это множество. Поэтому остается формировать множество J_0 по вычисленной на n -й итерации последовательности $\Phi^{(n)}$.

Эта задача по своей постановке похожа на задачу обнаружения сигнала на фоне помехи, и для формирования J_0 можно использовать известные, но трудоемкие методы. Для сокращения числа вычислительных операций обратимся к простому, но достаточно эффективному критерию [8]:

$$j \in J_0, \text{ если } |\varphi_{(j)}^{(n)}| < t^{(n)};$$

$$j \notin J_0, \text{ если } |\varphi_{(j)}^{(n)}| \geq t^{(n)},$$

где $t^{(n)}$ — пороговое значение. К сожалению, рекуррентный алгоритм вычисления $t^{(n)}$, предложенный в [8], дает существенно завышенные значения. Поэтому в данной работе для нахождения $t^{(n)}$ используется следующий статистический подход.

Низкоамплитудные пульсации решения $\varphi^{(n)}$ трактуются как шум, обусловленный ошибками нахождения высокочастотных коэффициентов ДПФ $\Phi_p(l)$, $l \in L_2$. Обозначим

$$\hat{\varphi}^{(n)} = T_2 T_1 \varphi^{(n)}$$

и по значениям $\hat{\varphi}^{(n)}(j)$ вычислим выборочную дисперсию шума

$$\hat{\sigma}_{\varphi}^2 = \frac{1}{N_{\varphi}} \sum_{k=0}^{N_{\varphi}-1} (\text{med}_{m,k} \{ |\hat{\varphi}_{(i)}^{(n)} - \text{med}_{m,i} \{ \hat{\varphi}_{(i)}^{(n)} \} | \} / 0,64)^2, \quad (15)$$

где $\text{med}_{m,i} \{ \hat{\varphi}_{(i)}^{(n)} \}$ — медиана выборки $\{ \hat{\varphi}_{(i-m)}^{(n)}, \dots, \hat{\varphi}_{(i+m)}^{(n)} \}$, состоящей из $2m + 1$ элементов. После этого значение $t^{(n)}$ находится в виде

$$t^{(n)} = \max(t^{(n-1)}, k \hat{\sigma}_{\varphi}^2), \quad k = 2 + 2,5. \quad (16)$$

Ускорение итерационной процедуры и выбор момента останова. Известным недостатком метода проекций на выпуклые множества является его медленная сходимость (около сотен итераций) к предельной точке φ^* . Для ускорения сходимости используем результат работы [9], представляющий распространение алгоритма [10] на случай регуляризованных решений. В основе лежит минимизация функционала $\| \varphi^{(n+1)} - C \varphi^{(n)} \|$ градиентным методом. Не излагая детали, приведем окончательную запись итерационного алгоритма (с ускорением) построения устойчивого решения, удовлетворяющего заданным ограничениям, в виде следующих этапов:

1. Строится линейное регуляризованное решение φ_{α} и формируются множества L_1, L_2 .
2. Полагается $n = 0$, $\varphi_{\lambda}^{(0)} = \varphi^{(0)}$, где последовательность $\varphi^{(0)} = P_{\lambda} \varphi_{\alpha}$ имеет коэффициенты ДПФ, равные нулю для индексов $l \in L_2$.
3. Вычисляется $\varphi_{\lambda}^{(n+1)} = P_{\lambda}(C \varphi_{\lambda}^{(n)})$.
4. Если условия окончания процедуры выполняются, то следует переход к этапу 7, в противном случае выполняется этап 5.
- 5.

$$\varphi_{\lambda}^{(n+1)} = C \varphi_{\lambda}^{(n)} + 2s [\varphi_{\lambda}^{(n+1)} - C \varphi_{\lambda}^{(n)}]. \quad (17)$$

6. Полагается $n = n + 1$, и следует переход к этапу 3.

7. В качестве φ^* принимается элемент $C \varphi_{\lambda}^{(n)}$, и работа алгоритма завершается.

Оператор $C = T_3 T_2 T_1$ осуществляет последовательное проектирование на множества Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Величину s рекомендуется задавать $0,95 + 0,975$, при $s = 0,5$ имеем $\varphi_{\lambda}^{(n+1)} = \varphi^{(n+1)}$, т. е. ускорение отсутствует.

Важным для практической реализации алгоритма является выбор момента останова (n_0) итерационной процедуры. Для выбора n_0 можно использовать традиционные (для итерационных алгоритмов) критерии, например

$$\| \varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)} \| \leq \varepsilon_1.$$

Однако более предпочтительным представляется критерий

$$\Delta_{\Phi}^{(n)} = | \| \Phi_p^{(n)} \| - \| \Phi_p^{(n-1)} \| | \leq \varepsilon_2, \quad (18)$$

где

$$\| \Phi_p^{(n)} \| = \left(\sum_{l \in L_2} | \Phi_p^{(n)}(l) |^2 \right)^{1/2}.$$

Критерий означает, что коэффициенты ДПФ из множества L_2 практически не меняются (т. е. произошло их «полное доопределение» на основе заданных априорных ограничений) и дальше продолжать итерационную про-

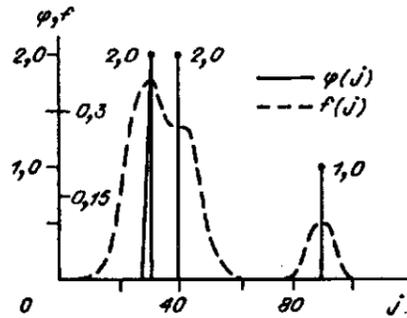


Рис. 1

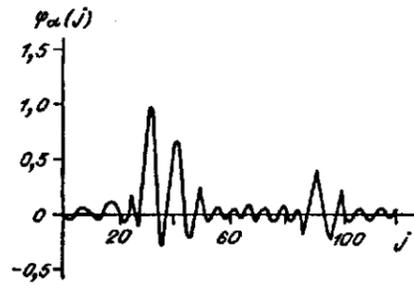


Рис. 2

цедуру не имеет смысла. Вычислительный эксперимент показал эффективность этого критерия.

Результаты вычислительного эксперимента. Программная реализация описанного алгоритма включена в функциональное наполнение пакета прикладных программ DECONV.

Приведем некоторые результаты восстановления импульсного сигнала (рис. 1) с использованием этого алгоритма. Выходной сигнал $f(x)$, существенно отличающийся от $\varphi(y)$, искажался нормально распределенным шумом с относительным уровнем 5%. На рис. 2 показано линейное регуляризованное решение φ_α (параметр α выбирался по критерию оптимальности), существенно отличающееся от точного решения. На рис. 3 приведено решение φ^* (26 итераций, $s = 0,975$, $\varepsilon_2 = 0,001$). На рис. 4 показана зависимость относительной ошибки решения

$$\Delta_2^{(n)} = \left[\frac{\sum_{j=0}^{N_\varphi-1} (\varphi^{(n)}(j) - \varphi(j))^2}{\sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \varphi^2(j)} \right]^{1/2}$$

и величины $\Delta_\varphi^{(n)}$ от номера итераций. Видно, что номер n_0 , удовлетворяющий условию (18) при $\varepsilon_2 = 0,001$ ($n_0 = 26$), находится в области минимума $\Delta_2^{(n)}$. Следовательно, правило (18) позволяет достаточно просто вычислить момент останова итерационной процедуры. Сравнивая φ_α и φ^* , видим существенное повышение точности решения задачи восстановления импульсных сигналов с

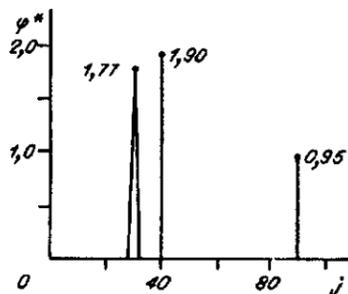


Рис. 3

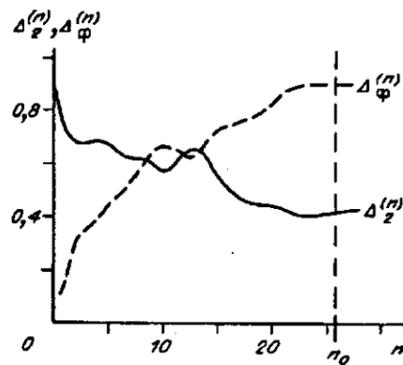


Рис. 4

использованием предложенного алгоритма. Заметим, что в вычислительных экспериментах с другими k , φ решение φ^* достигалось за 7—12 итераций.

Предложенный алгоритм легко модифицируется для восстановления импульсных изображений путем использования двумерного дискретного преобразования Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.
2. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация.—М.: Наука, 1985.
3. Воскобойникова Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике.—Новосибирск: Наука, 1984.
4. Вронников А. В., Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г. Нелинейный регуляризирующий алгоритм редукции к идеальному прибору // Оптика и спектроскопия.—1988.—64, вып. 4.
5. Воскобойников Ю. Е. Решение обратных измерительных задач на выпуклых множествах функции // Автометрия.—1990.—№ 1.
6. Воскобойников Ю. Е. Решение обратных измерительных задач с заданными точностными характеристиками // Автометрия.—1988.—№ 2.
7. Гурин Л. Г., Полак Б. Т., Райк Э. В. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств // Журн. вычислит. математики и мат. физики.—1967.—№ 6.
8. Figueiras-Vidal A. B. Adaptive iterative algorithms for spiky deconvolution // IEEE Trans. on Acoust. Sp. Sign. Proc.—1990.—ASSP-38, N 8.
9. Воскобойников Ю. Е. Выбор параметров итерационных алгоритмов восстановления изображений с априорными ограничениями // Тез. докл. Пятого Всесоюз. симп. по вычислит. томографии.—Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1991.
10. Podilchuk S. I., Mammone R. J. Step size for general iterative image recovery algorithm // Opt. Eng.—1988.—27, N 9.

Поступила в редакцию 24 марта 1993 г.