РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1993

УДК 519.218.82 : 517.518.85

В. М. Ефимов
(Новосибирск)

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ

Получена система ленточных уравнений для нахождения асимптотически оптимальных интерполяционных фильтров. При составлении уравнений использовалось разложение корреляционной функции сигнала в степенной ряд. Приведено решение системы уравнений для марковского и однократно дифференцируемого сигнала. Отмечается возможность использования предлагаемой методики при определении собственных векторов последовательности отсчетов.

В [1] изложена методика получения асимптотически оптимальных интерполяционных формул, базирующихся на методе наименьших квадратов, в предположении, что интерполируемая величина является случайной и стационарной с неизвестным (но постоянным) математическим ожиданием, влияние которого на результат интерполяции устраняется нормировкой. Практическое применение методики связано с асимптотическим решением системы линейных уравнений, ее определителем является корреляционный определитель совокупности отсчетов, по которым производится интерполяция. В [2] эта методика конкретизирована для марковского сигнала при произвольном расположении отсчетов. Ниже рассматривается случай равноотстоящих отсчетов на прямой, что позволяет при определенных условиях получить более простую систему уравнений для нахождения весовых функций интерполяционных фильтров.

Относительно сигнала будем исходить из указанных выше предположений. Последовательность отсчетов сигнала задана при значениях аргумента $t = k\Delta$ $(-(n-1) \le k \le n)$, где Δ — интервал дискретизации параметра t. Весовые функции интерполяционного фильтра (как и в [1, 2]) ищутся из условия минимума среднего квадрата ошибки интерполяции:

$$\min_{\{w_k\}} \varepsilon^2 = \langle (f(t) - f^*(t))^2 \rangle, \tag{1}$$

где

$$f^*(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n} w_k(t - k\Delta) f(k\Delta) \tag{2}$$

при условии

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n} w_k(t - k\Delta) = 1. \tag{3}$$

Конечным результатом исследований является весовая функция скользящего интерполяционного фильтра

$$w_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_{-k}(|t| - k\Delta)1[(|t| - k\Delta)((k+1)\Delta - |t|)], \tag{4}$$

где $1[y]$ — функция Хевисайда.

Эта задача сводится к решению очевидной системы линейных уравнений

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n} w_k(t - k\Delta)\rho((k - l)\Delta) = \rho(t - l\Delta) + \lambda, \tag{5}$$

где $-(n-1) \leq l \leq n$, величина λ учитывает условие (3), $\rho(t)$ — нормирован
предположений показано, что оптимальное разложение непрерывного сигнала сводится в асимптотике к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Это обстоятельство наталкивает на мысль о существовании соответствующих разностных уравнений, эквивалентных в асимптотике системе (5).

Положим (см. [1, 3]), что в асимптотике ($\rho(t) \to 1$)

$$\rho(t) = 1 + \sum_{i=1}^{2m+1} \alpha_i |t|^i, \tag{6}$$

где случай $m = 0$ ($\alpha_1 < 0$) соответствует марковскому сигналу, $m = 1$ ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 > 0$) — однократно дифференцируемому сигналу и т. д.

Используя (6) и вычисляя $(2m+2)$-ю конечную разность между уравнениями системы, для $0 \leq \tau = t/\Delta \leq 1$ получим систему ленточных уравнений

$$\sum_{l=-m}^{l=m} w_{p-(m+1)+l}(\tau)C_l = \begin{cases} C_{p-(m+1)}(\tau), & 1 \leq p \leq 2m+2, \\ 0, & -(n-2-m) < p < 1,\ 2m+2 < p < n-m-1, \end{cases} \tag{7}$$

где правая часть уравнения

$$C_{p-(m+1)}(\tau) = \sum_{i=0}^{2m+2} C_i^{2m+2}(-1)^i |2m+2-p-i+\tau|^{2m+1}, \tag{8}$$

а коэффициенты левой части уравнения

$$C_l = \sum_{i=-(m+1)}^{m+1} C_{m+1+i}^{2m+2}(-1)^{i+m+1}|i - l|^{2m+1}. \tag{9}$$

В системе уравнений (7) только $(2m+2)$ уравнения имеют отличные от нуля правые части. Система недоопределена, так как при вычислении конечных разностей пропадает $2(m+1)$ — одно крайнее уравнение. Из (8) следует, что решение системы является кусочно-полиномиальным. При этом степень полинома определяется параметром «гладкости» сигнала m. Получим далее решение системы (7) для случаев $m = 0,1$ и $n \to \infty$.

Сигнал марковского типа ($m = 0$, $\alpha_1 < 0$, $\rho(t) \cong 1 + \alpha_1 t$). В этом случае из (9) следует, что $C_l = 2$, из (8) — $C_0(\tau) = 2(1 - \tau)$, а $C_1(\tau) = 2\tau$. Следовательно,

$$w_0(\tau) = 1 - \tau, \qquad w_1 = \tau. \tag{10}$$

Весовая функция, определяемая соотношением (4),

$$w_\infty(\tau) = w_2(\tau) = w_0(|\tau|) = (1 - |t|/\Delta)1[1 - |t|/\Delta]. \tag{11}$$

Для сигнала типа марковского асимптотически оптимальный интерполяционный фильтр имеет весовую функцию конечной длительности: в интерполяции участвуют только два отсчета, между которыми находится интерполируемое значение.

Однократно дифференцируемый сигнал ($m = 1$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 > 0$, $\rho(t) \cong$ $\cong 1 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 |t|^3$). В этом случае четыре уравнения системы (7) имеют ненулевую правую часть ($0 \le \tau = t/\Delta \le 1$):

$$\begin{aligned}
w_{-2}(\tau) + 4w_{-1}(\tau) + w_0(\tau) &= 1 - 3\tau + 3\tau^2 - \tau^3,\\
w_{-1}(\tau) + 4w_0(\tau) + w_1(\tau) &= 4 - 6\tau^2 + 3\tau^3,\\
w_0(\tau) + 4w_1(\tau) + w_2(\tau) &= 1 + 3\tau + 3\tau^2 - 3\tau^3,\\
w_1(\tau) + 4w_2(\tau) + w_3(\tau) &= \tau^3.
\end{aligned} \tag{12}$$

Используем для доопределения системы (12) рекурсию* при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
w_{k-1}(\tau) &= -\alpha w_k(\tau), \quad k \le -1,\\
w_{k+1}(\tau) &= -\alpha w_k(\tau), \quad k \ge 2,
\end{aligned} \tag{13}$$

где коэффициент α является наименьшим корнем уравнения

$$\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \tag{14}$$

и равен

$$\alpha = 2 - \sqrt{3}. \tag{15}$$

В силу симметрии решения

$$\begin{aligned}
w_{-1}(\tau) &= w_{-1,1}(\tau) + w_{-1,2}(\tau),\\
w_0(\tau) &= w_{0,1}(\tau) + w_{0,2}(\tau),\\
w_1(\tau) &= w_{0,1}(\tau) - w_{0,2}(\tau),\\
w_2(\tau) &= w_{-1,1}(\tau) - w_{-1,2}(\tau),
\end{aligned} \tag{16}$$

где первые слагаемые (16) — четные функции относительно значения аргумента $\tau = 0,5$, вторые слагаемые — нечетные функции.

Использование (16), (12) и (13) дает две системы из двух уравнений:

---

* Решение (12) с рекурсией (13) совпадает с решением разностных уравнений [4] при $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
(4-\alpha)w_{-1,1}(\tau) + w_{0,1}(\tau) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\tau(\tau-1),\\
w_{-1,1}(\tau) + 5w_{0,1}(\tau) &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\tau(\tau-1),\\
(4-\alpha)w_{-1,2}(\tau) + w_{0,2}(\tau) &= \tfrac{1}{2} - \tau - \tfrac{1}{2}(2\tau-1)\tau(\tau-1),\\
w_{-1,2}(\tau) + 3w_{0,2}(\tau) &= \tfrac{3}{2} - 3\tau + \tfrac{3}{2}(2\tau-1)\tau(\tau-1).
\end{aligned} \tag{17}$$

Решение (17) с учетом (16) следующее:

$$\begin{aligned}
w_0(\tau) &= 1 - \tau - \tfrac{3}{2}\alpha\tau(\tau-1) + \frac{2-3\alpha}{2}(2\tau-1)\tau(\tau-1),\\
w_{-1}(\tau) &= \tfrac{3}{2}(5\alpha-1)\tau(\tau-1) - \tfrac{3}{2}(1-3\alpha)(2\tau-1)\tau(\tau-1).
\end{aligned} \tag{18}$$

На основании (18) и (13)

$$\begin{aligned}
w_\infty(t) = w_0(|t|)1[\Delta - |t|] + \sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha)^k w_{-1}(|t| - (k+1)\Delta) \times \\
\times 1[(|t| - (k+1)\Delta)((k+2)\Delta - |t|)],
\end{aligned} \tag{19}$$

где функции $w_0(t)$ и $w_{-1}(t)$ определяются соотношением (18) при $\tau = t/\Delta$. В отличие от (11) соотношение (19) является весовой функцией бесконечной длительности.

В [1] отмечалось, что для однократно дифференцируемого сигнала потенциальная точность воспроизведения практически достигается, когда интерполирование проводится по четырем отсчетам. При этом

$$\begin{aligned}
w_0(\tau) &= 1 - \tau - (3/10)\tau(\tau-1),\\
w_{-1}(\tau) &= (3/10)\tau(\tau-1) - (1/6)(2\tau-1)\tau(\tau-1).
\end{aligned} \tag{20}$$

Построенная на основании (20) весовая функция $w_4(t)$ проигрывает $w_\infty(t)$ (определяемой (19)) около 5 % в значении максимума среднего квадрата ошибки интерполяции.

Построенная на основании полинома Лагранжа весовая функция [1]

$$\begin{aligned}
w_0(\tau) &= 1 - \tau - (1/4)\tau(\tau-1),\\
w_1(\tau) &= (1/4)\tau(\tau-1) - (1/12)(2\tau-1)\tau(\tau-1)
\end{aligned} \tag{21}$$

проигрывает предыдущей около 2 % в значении максимума среднего квадрата ошибки.

В заключение отметим, что приведенная выше процедура составления разностных уравнений может оказаться полезной при нахождении собственных векторов последовательности равноотстоящих отсчетов сигнала. В этом случае соответствующая система разностных уравнений принимает вид ($n \to \infty$)

$$\alpha_{2m+1}\Delta^{2m+1}\sum_{l=-m}^{l=m} w_{k+l}C_l = \lambda \sum_{l=-(m+1)}^{l=(m+1)} w_{k+l}(-1)^{l+m+1}C^{2(m+1)}_{l+(m+1)}, \tag{22}$$

где k — номер уравнения, коэффициент C_l определяется соотношением (9), λ — собственное число, w_{k+l} — координата собственного вектора.

Например, для марковского сигнала уравнение для собственных векторов принимает вид

$$2\alpha_1 \Delta w_k = \lambda(w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}). \tag{23}$$

Подвергая (23) z-преобразованию (по индексу переменной), получим уравнение второго порядка:

$$2\alpha_1 \Delta z = \lambda(1 - z)^2, \tag{24}$$

решением которого является дискретное косинусное преобразование (см. также [5]).

Из (24) вытекает формула для собственных чисел λ:

$$\lambda_m = - \alpha_1 \Delta \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 m\frac{\pi}{n}} \Big/ \left(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 m\frac{\pi}{n}} - 1\right), \tag{25}$$

где m — индекс собственного вектора ($m > 0$), n — число отсчетов последовательности.

Для однократно дифференцируемого в среднеквадратичном с гнала соотношение (22) после z-преобразования сводится к возвратному уравнению (четвертого порядка):

$$2\alpha_3 \Delta^3(2z + 8z^2 + 2z^3) = \lambda(1 - z)^4. \tag{26}$$

Структура решения этого уравнения аналогична рассмотренной в [4] структуре решения уравнения для непрерывного случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов В. М. Асимптотически оптимальные интерполяционные соотношения // Автометрия.—1992.—№ 4.
2. Ефимов В. М., Колесников А. Н. Асимптотически оптимальная интерполяция марковского сигнала и ее применение при дискретном синусном преобразовании // Автометрия.— 1993.—№ 5.
3. Ефимов В. М. Асимптотически оптимальное разложение стационарного случайного сигнала на конечном интервале // Автометрия.—1992.—№ 6.
4. Ефимов В. М., Полосьмак В. Г., Резник А. Л. Аналитические и компьютерные алгоритмы обращения ленточных матриц // Автометрия.—1985.—№ 6.
5. Ефимов В. М., Золотухин Ю. Н., Резник А. Л. Асимптотически оптимальная декорреляция стационарной последовательности равноотстоящих отсчетов сигнала // Автометрия.— 1991.—№ 5.

Поступило в редакцию 14 июля 1993 г.