

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5

1993

УДК 621.391 : 53.08

Ю. Ю. Мартюшев  
(Москва)

НАХОЖДЕНИЕ НОСИТЕЛЯ  
ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА  
ПО АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Рассматривается возможность нахождения по известной автокорреляции всех соответствующих ей носителей сигналов методом укороченного перебора. Для дискретных сигналов установлены пределы изменения числа ненулевых отсчетов, в которых число ненулевых отсчетов их автокорреляции равно известному. Показано, каким образом, используя особенности конкретной автокорреляционной функции и ограничения при ее формировании, резко сократить число просматриваемых вариантов носителей сигнала. Описываются алгоритм укороченного перебора и пример его использования.

**Введение.** При восстановлении двумерных сигналов по измеренному модулю спектра (или, что эквивалентно, по автокорреляционной функции) для однозначности восстановления и улучшения сходимости многих алгоритмов необходимо располагать дополнительными данными. Ими могут быть априорные сведения о сигнале, например ограничение на неотрицательность. Дополнительную информацию можно получить также по результатам наблюдений, в частности, зная размеры области, занимаемой автокорреляционной функцией, задать пространственные ограничения на область, занимаемую восстанавливаемым сигналом.

Практика восстановления дискретизированных сигналов показывает, что достичь существенного улучшения сходимости многих алгоритмов восстановления позволяет знание координат  $(m, n)$  хотя бы некоторых нулевых отсчетов сигнала  $S(m, n)$ . Если известны координаты всех нулевых (а следовательно, и ненулевых) отсчетов, считают, что известен носитель сигнала, т. е. множество точек, в которых  $S(m, n) \neq 0$ . Возможность формирования носителя сигнала на основе известной автокорреляции рассмотрена, например, в [1, 2].

Использование в качестве дополнительной информации сведений о носителе особенно эффективно при восстановлении импульсных сигналов, встречающихся, например, в астрономии. Если область, занимаемая дискретным сигналом, содержит  $M \times N$  отсчетов, то для импульсных сигналов характерно, что общее число ненулевых отсчетов  $r \ll MN$ . Автокорреляционные функции таких сигналов содержат значительное число нулей. Тем не менее, зная нули автокорреляции, нельзя точно указать нулевые отсчеты восстанавливаемого сигнала. Иными словами, нельзя гарантировать однозначное соответствие найденного носителя сигнала носителю его автокорреляции при том, что сам двумерный сигнал (практически любой) теоретически можно однозначно восстановить по его автокорреляционной функции [3].

Если выполняется условие  $r \ll MN$ , то число носителей сигнала, соответствующих носителю автокорреляции, невелико, чаще всего лишь один (не считая тривиального второго, осесимметричного данному). Непосредственно по носителю автокорреляции нельзя указать число соответствующих ему носителей сигнала так же, как не предложено пока общих приемлемых для практического использования способов их нахождения. Тривиальный способ

перебора при значительных  $M \times N$  практически не пригоден из-за больших временных затрат. Способ, описанный в [1], имеет ряд ограничений по взаимному положению ненулевых отсчетов, а предложенный в [2] ограничен сигналами, у которых точки, расположенные на внешней границе носителя, образуют выпуклое множество.

В данной работе показано, как, используя метод перебора, гарантирующий нахождение всех возможных носителей, можно резко сократить количество просматриваемых вариантов, базируясь на ряде ограничений, вытекающих из особенностей конкретной автокорреляционной функции и ограничений при ее формировании. На основе найденного носителя сигнала можно сформировать хорошее начальное приближение, которого требуют многие итерационные алгоритмы восстановления [4], а в дальнейшем использовать носитель для формирования идеальной функции пространственного ограничения восстанавливаемого сигнала. В случае, если найдено несколько носителей, выявить среди них истинный можно разными способами, например, сравнивая автокорреляцию восстановленных на базе этих носителей сигналов с исходной автокорреляцией.

Особенности формирования автокорреляционной функции. Допустим, что сигнал, подлежащий восстановлению, описывается решетчатой функцией

$$S(m, n) = a_{mn}, \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Аналогично его автокорреляция

$$R(m, n) = b_{mn}, \quad -M+1 \leq m \leq M-1, \quad -N+1 \leq n \leq N-1.$$

Каждый дискретный отсчет  $R(m, n)$  может быть представлен в виде суммы

$$b_{pq} = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{m=-M+1}^{M-1} a_{mn} a^*(m+p)(n+q). \quad (1)$$

Поскольку нас интересуют не сами значения отсчетов  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$ , а лишь знание о том, нулевые они или нет, можно, не ограничивая общности, рассматривать сигналы с вещественными отсчетами. Предположим, что сигнал, занимающий область размером  $M \times N$  дискретов, содержит  $r$  ненулевых отсчетов (для двумерных сигналов  $r \geq 3$ ). Автокорреляция занимает область размером  $(2M-1) \times (2N-1)$  дискретов и содержит  $l$  ненулевых отсчетов. Дискретное представление сигналов накладывает ограничение на пределы, в которых может изменяться  $l$  (всегда нечетное) при заданном  $r$ . В рассматриваемой задаче следует установить обратное соответствие — пределы изменения  $r$ , в которых число ненулевых отсчетов автокорреляции может быть равно известному  $l$ .

Произведения (1), определяющие  $R(m, n)$ , содержат все возможные сочетания по два нулевых и ненулевых отсчета  $a_{mn}$ , причем каждое (в комплексно-сопряженном виде) встречается дважды. Ненулевые отсчеты  $b_{mn}$  образуются ненулевыми отсчетами  $a_{mn}$ , причем удвоенное число их сочетаний по два равно  $r(r-1)$ . Каждый ненулевой отсчет  $b_{pq}$  согласно (1) должен содержать, как минимум, одно ненулевое произведение  $a_{mn} a^*(m+p)(n+q)$ . Если все такие отсчеты содержат каждый только по одному ненулевому произведению, то при данном  $r$  число ненулевых  $b_{mn}$  максимально и с учетом всегда ненулевого центрального отсчета  $b_{00}$  равно

$$l_{\max} = r(r-1) + 1, \quad r = 3, 4, 5, \dots \quad (2)$$

При случайном расположении ненулевых отсчетов сигнала и выполнении условия  $r \ll MN$  рассмотренный крайний случай возможен с большой вероятностью. Соответствующие ему примеры носителей сигнала и его автокорреляции показаны на рис. 1.

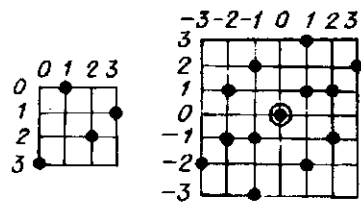


Рис. 1

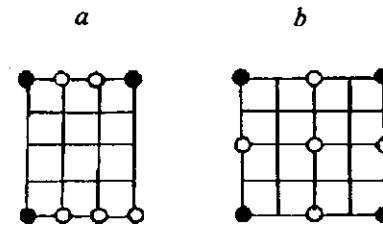


Рис. 2

Если оценка (2) справедлива, то верно и обратное утверждение: при фиксированном  $l$ , удовлетворяющем равенству (2), число ненулевых отсчетов сигнала  $r$  будет минимально возможным. Соотношение (2), разрешенное относительно  $r$ , имеет вид

$$r_{\min} = 0,5(1 + \sqrt{4l - 3}), \quad l = 7, 13, 21, \dots \quad (3a)$$

Для остальных возможных нечетных  $l$  значение  $r_{\min}$  берется равным ближайшему большему целому, т. е.

$$r_{\min} = \langle 0,5(1 + \sqrt{4l - 3}) \rangle + 1, \quad l = 9, 11, 15, \dots, \quad (3b)$$

где угловые скобки означают выделение целой части. Полученная на основе соотношений (3) зависимость  $r_{\min}$  от  $l$  отражена в табл. 2 (первые две строки). Подчеркнуты значения  $r_{\min}$ , удовлетворяющие равенству (3a). С ростом числа ненулевых отсчетов оценка (3) оказывается заниженной, так как в суммах (1) появляется все большее число ненулевых произведений.

Рассмотрим теперь вопрос о том, для каких сигналов при фиксированном  $r$  получится минимальное число ненулевых отсчетов автокорреляции. Поскольку отсчеты функции  $R(m, n)$  содержат все возможные сочетания отсчетов сигнала по два, то при фиксированном  $r$  все  $r(r - 1)$  ненулевых сочетаний должны содержаться в минимально возможном числе отсчетов  $b_{mn}$  (1). Такому условию отвечают сигналы с определенной структурой, одной из особенностей которой является эквидистантность отсчетов (рис. 2).

Сигналы с носителями вида рис. 2, *a* содержат общее число отсчетов автокорреляции  $b_{mn}$ , равное  $(2M - 1)(2N - 1)$ , из них максимум  $3(2N - 1)$  ненулевых (когда все отсчеты, обозначенные на рис. 2, *a* кружками, ненулевые). Столько отсчетов содержит автокорреляция сигнала, занимающего область  $2 \times N$  дискретов. Носители вида рис. 2, *b* имеют упорядоченную решетку ненулевых отсчетов с возможно большим шагом при данном  $r$ , кратным шагу дискретизации. Если при этом число ненулевых отсчетов по горизонтали равно  $n$ , а по вертикали  $m$ , то их в автокорреляции  $(2m - 1)(2n - 1)$ , т. е. столько же, сколько всего отсчетов в автокорреляции сигнала, занимающего область размерами  $M = m, N = n$ . Какая из рассмотренных структур носителей соответствует минимальному  $l$ , зависит как от размеров области, занимаемой сигналом, так и от общего числа его ненулевых элементов  $r$ .

В табл. 1 в качестве примера указаны значения  $l_{\min}$ , найденные исходя из приведенных выше соображений для сигналов с  $N = M$  (для четырех значений  $N$ ) и числом ненулевых отсчетов  $r \leq 10$ .

Таблица 1

| N  | r |   |    |    |    |    |    |    |
|----|---|---|----|----|----|----|----|----|
|    | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 7  | 7 | 9 | 13 | 15 | 21 | 21 | 25 | 31 |
| 8  | 7 | 9 | 17 | 21 | 25 | 27 | 31 | 33 |
| 11 | 7 | 9 | 13 | 15 | 21 | 21 | 25 | 33 |
| 12 | 7 | 9 | 17 | 21 | 25 | 27 | 35 | 39 |

Таблица 2

| N  | l                |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|    | 7                | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |
|    | r <sub>min</sub> |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|    | 3                | 4 | 4  | 4  | 5  | 5  | 5  | 5  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 7  | 7  |
| 7  | 3                | 4 | 4  | 5  | 6  | 6  | 6  | 8  | 8  | 9  | 9  | 9  | 10 | 10 | 10 |
| 8  | 3                | 4 | 4  | 4  | 4  | 5  | 5  | 6  | 6  | 7  | 8  | 8  | 9  | 10 | 10 |
| 11 | 3                | 4 | 4  | 5  | 6  | 6  | 6  | 8  | 8  | 9  | 9  | 9  | 9  | 10 | 10 |
| 12 | 3                | 4 | 4  | 4  | 4  | 5  | 5  | 6  | 6  | 7  | 8  | 8  | 8  | 8  | 9  |

Справедливо и обратное утверждение: если число ненулевых отсчетов автокорреляции равно  $l$ , то для рассматриваемых в табл. 1 случаев соответствующее значение  $r$  является максимально возможным. Зависимость  $r_{\max}$  от  $l$ , полученная из табл. 1 и приведенная в табл. 2, позволяет для рассматриваемых случаев установить границы изменения возможных значений  $r$  по известной автокорреляции. При заданном  $l$  и  $r \ll N^2$  эти границы оказываются сравнительно узкими.

В установленных пределах изменения  $r$  нет необходимости проверять все возможные варианты носителей. Часть из них можно отбросить, приняв во внимание, что заранее известно, какие сочетания отсчетов  $a_{mn}$  в (1) определяют соответствующие отсчеты в  $b_{mn}$ . Задавая при переборе очередной набор ненулевых отсчетов  $a_{mn}$ , следует иметь в виду, что все возможные попарные их сочетания, дающие ненулевые произведения в (1), должны принадлежать только ненулевым отсчетам  $b_{mn}$ . Если в очередном тестируемом наборе обнаружено хотя бы одно сочетание, принадлежащее нулевым отсчетам  $b_{mn}$ , весь набор без проверки на соответствие носителю автокорреляции может быть опущен. Поскольку в сигналах с малым  $r$  большая часть сочетаний относится к нулевым отсчетам  $b_{mn}$ , это позволяет существенно ускорить поиск носителей.

Алгоритм укороченного перебора. Рассматриваемый алгоритм позволяет ускорить проверку допустимости сочетаний отсчетов, соответствующих тестируемому носителю сигнала.

Информацию о допустимости всех возможных сочетаний  $a_{mn}a_{ij}$  можно занести в бинарную матрицу, номера строк и столбцов которой соответствуют номерам отсчетов последовательного построения сигнала (рис. 3). Зная ненулевые отсчеты  $b_{mn}$  автокорреляции, а также, какие сочетания отсчетов  $a_{mn}a_{ij}$  их образуют, можно соответствующим элементам матрицы присвоить единичное значение как указание, что данное сочетание ненулевых  $a_{mn}$  и  $a_{ij}$  допустимо, так как соответствует ненулевому отсчету известной  $R(m, n)$ . Остальные элементы матрицы (нулевые) соответствуют недопустимым сочетаниям, т. е. нулевым отсчетам  $R(m, n)$ .

Нетрудно убедиться, что матрица обладает осевой симметрией. Она полностью отражает автокорреляционную функцию: каждому допустимому сочетанию соответствуют два единичных элемента, как и в  $R(m, n)$ , а элементам главной диагонали — центральный отсчет  $R(0, 0)$ .

Перебор можно начать с проверки на соответствие носителю  $R(m, n)$  носителей сигналов, содержащих ненулевой отсчет  $a_{00}$ . Все эти сигналы ограничиваются допустимыми комбинациями

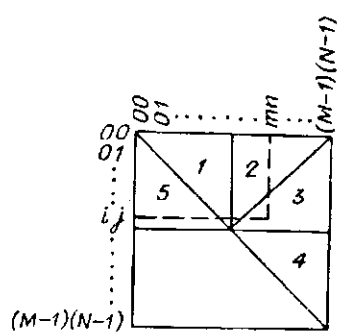


Рис. 3

отсчета  $a_{00}$  с отсчетами, номера которых соответствуют номерам столбцов единичных элементов первой строки матрицы. Общее число варьируемых ненулевых отсчетов  $a_{mn}$  ограничено пределами от  $r_{\min}$  до  $r_{\max}$ .

Число тестируемых носителей сигналов с отсчетом  $a_{00} \neq 0$  можно дополнительно уменьшить, если учесть, что все отсчеты, с которыми  $a_{00}$  образует допустимые сочетания, должны, в свою очередь, образовывать допустимые попарные сочетания между собой. Такая проверка производится по значениям (0 или 1) элементов матрицы, соответствующим данным сочетаниям, и значительно сужает круг поиска носителей.

Изложенное позволяет сделать вывод, что если  $a_{00} \neq 0$ , то, по крайней мере, один носитель будет найден. Если не найдено ни одного носителя, это означает, что все допустимые сочетания первой строки нулевые, т. е.  $a_{00} = 0$ .

Перейдя ко второй строке, не имеет смысла принимать во внимание первый ее элемент, так как все допустимые сочетания с  $a_{00}$  уже проверены. То же касается последующих строк: в каждой из них принимаются во внимание только элементы, расположенные правее главной диагонали.

Если начать поиск носителей с нижней строки, т. е. по элементам, расположенным левее главной диагонали, то, учитывая симметрию матрицы, нетрудно убедиться, что будут найдены тривиальные носители, такие же как при поиске с первой строки, только развернутые на  $180^\circ$  относительно оси симметрии.

Таким образом, для перебора носителей нужна лишь половина матрицы. Чтобы более эффективно использовать память ЭВМ, можно принять во внимание, что матрица обладает также зеркальной симметрией относительно второй диагонали. Это позволяет исключить из записи в массив элементы, расположенные в секторах 3 и 4 (см. рис. 3). Учитывая аналогию в размещении элементов в матрице и памяти ЭВМ, из рис. 3 ясно, что в ячейках, соответствующих сектору 5, следует расположить элементы матрицы из сектора 2. Это позволит вчетверо уменьшить необходимый объем памяти, однако приведет к некоторому усложнению в адресации.

Заметим также, что при переборе носителей сигнала для получения носителя автокорреляции нет необходимости рассчитывать  $R(m, n)$  в соответствии с (1) либо иными методами. При малом  $r$  носитель  $R(m, n)$  проще получить путем смещения носителя сигнала параллельно координатным осям и поочередного совмещения каждой его ненулевой точки с центром автокорреляции. Совокупность проекций ненулевых точек носителя сигнала на плоскость, полученных при каждом таком совмещении, и даст носитель автокорреляции.

Рассмотрим работу алгоритма на примере сигнала, занимающего область размером  $4 \times 4$  дискрета,  $r = 4$ , носитель которого, а также носитель автокорреляции показаны на рис. 1. Матрица допустимых сочетаний для данной функции  $R(m, n)$  приведена на рис. 4. Для наглядности показано соответствие нумерации строк и столбцов индексам отсчетов при построчном разложении сигнала. Единичные элементы правее главной диагонали для наглядности заштрихованы, что позволяет просто установить их соответствие, а следовательно, и соответствие допустимых сочетаний ненулевым отсчетам автокорреляции, номера которых указаны на рис. 4.

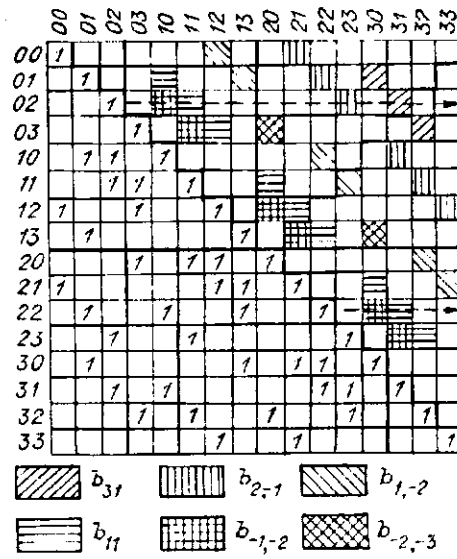


Рис. 4

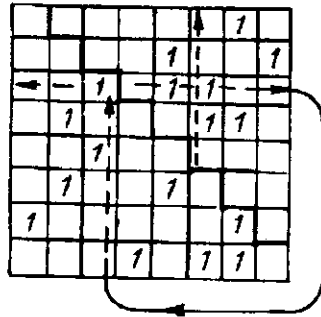


Рис. 5

однако найденный носитель для данного примера является единственным. Носитель, осесимметричный данному, можно получить из другой половины матрицы. Он образован элементами предпоследней строки, соответствующими отсчетам  $a_{32}, a_{03}, a_{11}, a_{20}$ .

Для уменьшения требуемой памяти ЭВМ запись матрицы в массив (рис. 5) проводится в соответствии с приведенными ранее соображениями (деление матрицы рис. 4 на сектора аналогично рис. 3 указано утолщенными линиями). На рис. 5 штриховой линией и пунктиром показано, как организуется движение в памяти вдоль элементов, соответствующих третьей и одиннадцатой строкам матрицы рис. 4.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fienup J. R., Crimmins T. R., Holsztynski W. Reconstruction of the support of an object from the support of its autocorrelation // J. Opt. Soc. Am.—1982.—72, N 5.
2. Brames V. J. Efficient method of support reduction // Opt. Commun.—1987.—64, N 4.
3. Бакалов В. П. О возможности восстановления многомерных дискретных сигналов по амплитудному спектру // Радиотехника.—1982.—37, № 11.
4. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений.—М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 12 июля 1990 г.