РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1993

УДК 519.67 : 629.78

В. С. Киричук

(Новосибирск)

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОИСКА КОЛЬЦЕВЫХ СТРУКТУР

Описаны алгоритмы поиска кольцевых образований на стационарном гауссовском поле. Алгоритмы базируются на теории проверки гипотез и обеспечивают оптимальное обнаружение кольцевых образований при различных априорных предположениях.

I. Пусть на двумерном случайном поле d_{ij}, заданном на дискретной решетке $\{i, j\}$, могут находиться объекты, описываемые функциями $F_l\{i - i_l, j - j_l\}$, $l = 1, q$, где i_l, j_l — координаты центра объекта, q — число возможных объектов. Поле d_{ij} представляется в виде

$$d_{ij} = \sum_l A_l F_l\{i - i_l, j - j_l\} + \xi_{ij}, \quad (1)$$

где ξ_{ij} — некоррелированный гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ^2; A_l — амплитуды объектов; $F_l\{i - i_l, j - j_l\}$ — дискретная кольцевая функция:

$$F_l\{i - i_l, j - j_l\} = F_l\{[\sqrt{(i - i_l)^2 + (j - j_l)^2}]\}, \quad (2)$$

[ ] — операция округления до ближайшего целого.

Необходимо проверить гипотезу о наличии объектов ($q > 0$) на поле d_{ij} и, если она подтверждается, оценить координаты центров i_l, j_l.

II. Для проверки гипотезы о наличии таких кольцевых образований (КО) в каждой точке поля d_{ij} будем проверять гипотезу H_0 об отсутствии КО при альтернативе его наличия. Точки, в которых гипотеза H_0 отвергается, считаются подозрительными на наличие объекта. Проверка гипотезы H_0 в такой постановке сводится к

$$H_0 : A_l = 0 \text{ при альтернативе } K : A_l \neq 0. \quad (3)$$

В силу зависимости функций F только от $[R]$, где $R = \sqrt{i^2 + j^2}$ (для упрощения формул считаем, что проверяемая точка находится в центре координат, и также опускаем индекс l), функции можно представить в виде

$$AF(i, j) = A \sum_\nu f_\nu \chi_\nu(i, j) = \sum_\nu B_\nu \chi_\nu(i, j), \quad (4)$$

где $B_\nu = Af_\nu$ — значение функции $F(R)$ при $R = \nu$; $\chi_\nu(i, j)$ — характеристическая функция:

$$\chi_\nu(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } [\sqrt{i^2 + j^2}] = \nu, \\ 0, & \text{если } [\sqrt{i^2 + j^2}] \neq \nu. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, что гипотеза $H_0 : A = 0$ эквивалентна множественной гипотезе $H_B : B_\nu = 0, \nu = R_1, R_2$, где R_1, R_2 — минимально (максимально) допустимый радиус КО.

Достаточными статистиками для B_ν являются:

$$\begin{aligned} \hat{m}_\nu &= \sum d_{ij}\chi_\nu(i, j)/n_\nu \in N\left(B_\nu, \frac{\sigma^2}{n_\nu}\right), \\ D_\nu^2 &= \sum (d_{ij} - \hat{m}_\nu)^2\chi_\nu(i, j) \in \chi^2_{n_\nu - 1}\sigma^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где n_ν — число ненулевых компонент функции $\chi_\nu(i, j)$; $\chi^2_{n_\nu - 1}$ — хи-квадрат распределения с $n_\nu - 1$ степенями свободы.

III. Дальнейший анализ зависит от априорных сведениях о виде функций $F(i, j)$ и основан на достаточных статистиках m_ν и D_ν^2 (при неизвестной дисперсии).

1. Вид функций F_{ij} определен, т. е. известны f_ν, $\nu = R_1, R_2$. Равномерно наиболее мощный критерий в классе несмещенных (РНМН) основан на статистиках J_1, которые являются нормированной оценкой амплитуды объекта A*:

$$J_1 = \hat{A}\sqrt{\sum n_\nu f_\nu^2}\Big/\sqrt{s_1^2}, \tag{7}$$

где

$$\hat{A} = \sum n_\nu f_\nu \hat{m}_\nu \Big/ \sum n_\nu f_\nu^2, \quad s_1^2 = \left\{\sum D_\nu^2 + n_\nu (m_\nu - \hat{A})^2\right\}\Big/\left\{\sum n_\nu - 1\right\}.$$

Статистика J_1 подчиняется закону распределения Стьюдента, и гипотеза H_0 отвергается, если:

$$|J_1| > t_{\alpha_0/2}(\gamma_1),$$

$t_{\alpha_0/2}(\gamma_1)$ – $\alpha_0/2$-квантиль распределения Стьюдента с $\gamma_1 = \sum n_\nu - 1$ степенями свободы; α_0 — уровень значимости гипотезы H_0.

2. Если вид функций F_{ij} не определен, то РНМН критерий основан на статистиках

$$J_2(\nu) = \hat{m}_\nu\sqrt{n_\nu}\Big/\sqrt{s_2^2}, \quad s_2^2 = \sum D_\nu^2\Big/\left\{\sum n_\nu - N\right\}, \quad N = R_2 - R_1 + 1,$$

которые являются нормированной амплитудой ν-го кольца. Критерий отвергает H_0, если:

$$\begin{gathered} |J_2(\nu)| > t_{\alpha/2}(\gamma_2), \text{ или это эквивалентно, если} \\ J_2 > t_{\alpha/2}(\gamma_2), \text{ где } J_2 = \max_\nu J_2(\nu), \ \ \gamma_2 = \sum n_\nu - N. \end{gathered} \tag{8}$$

Уровень значимости α для (8) связан с α_0-уровнем значимости гипотезы H_0 следующим соотношением:

$$\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^N. \tag{9}$$

3. КО состоит из заданного числа (k) расположенных подряд колец одинаковой амплитуды в диапазоне радиусов R_1, R_2:

---

* Леман Э. Проверка статистических гипотез.—М.: Наука, 1964.

$$\hat{A}_\nu = \sum_{l=1}^{k} n_{\nu+l}\hat{m}_{\nu+l} \Big/ \sum_{l=1}^{k} n_{\nu+l}, \quad \nu = 0, R_2 - k,$$

$$s_3^2(\nu) = \left\{\sum_{l=1}^{k} D_{\nu+l}^2 + n_{\nu+l}(\hat{m}_{\nu+l} - \hat{A}_\nu)^2\right\} \Big/ \left\{\sum_{l=1}^{k} n_{\nu+l} - 1\right\}, \tag{10}$$

$$J_3(\nu) = \hat{A}_\nu \sqrt{\sum_{1}^{k} n_{\nu+l}} \Big/ s_3^2(\nu).$$

Статистика $J_3(\nu)$ подчиняется t-распределению с $\gamma_3(\nu) = \sum_{1}^{\nu} n_{\nu+l} - 1$ степенями свободы, зависящими от ν, и поэтому критерий проверки гипотезы H_0 $|J_3(\nu)| > t_{\alpha/2}(\gamma_3(\nu))$ не сводится к поиску максимума $J_3(\nu)$ по ν и сравнению найденного максимума с пороговым значением $t_{\alpha/2}$. Однако на практике $\gamma_3 \gg 10$ и t-распределения достаточно слабо зависят от ν. Поэтому упрощенный критерий можно построить следующим образом:

$$J_3 = \max_\nu |J_3(\nu)|, \text{ и } H_0 \text{ отвергается, если}$$
$$J_3 > t_{\alpha/2}(\gamma_3), \text{ где } \gamma_3 = \min_\nu \gamma_3(\nu). \tag{11}$$

Расчет точного значения α по величине α_0 также затруднен в силу зависимости статистик $J_3(\nu)$, поэтому дадим для α оценку сверху $\alpha_0 \approx 1 - (1 - \alpha)^{N-k}$.

4. Наиболее типичный на практике случай предполагает, что КО состоит из k расположенных колец, но k не определено, а определен его диапазон изменения $k_1 \le k < k_2$.

Тогда критерий принимает вид, определенный в (10), (11), при условии, что J_3 также максимизируется по $k = k_1, k_2$ и приближенное значение α уровня значимости определяется выражением

$$\alpha_{i_1} \approx 1 - (1 - \alpha)^{\frac{(2N - k_1 - k_2)(k_2 - k_1 + 1)}{2}}.$$

IV. Во всех рассмотренных случаях поиск точек, подозрительных на наличие КО, сводится к определению некоторой статистики J_i от исходного двумерного поля и поиску точек, в которых эта статистика превышает выбранное пороговое значение. Однако таких подозрительных точек в зоне истинного нахождения КО может быть несколько (особенно для «ярких» КО). Для однозначности определения координат и радиусов КО воспользуемся методом отношения правдоподобия, который с очевидностью приводит к поиску максимального отклика в зоне КО, что алгоритмически эквивалентно поиску локальных максимумов на поле откликов J_i (зона локальности определяется допустимыми размерами КО) и сравнению найденных максимумов с пороговым значением. Точки, в которых наблюдаются превышения порогового значения, принимаются за координаты центра КО, а параметры, при которых достигается данный максимум, — за параметры КО.

Поступила в редакцию 15 февраля 1993 г.