РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 5 1993

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 631.291.27

В. М. Ефимов
(Новосибирск)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ КВАНТОВАННОГО ПО УРОВНЮ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Для непрерывного сигнала, дискретизованного по параметру с интервалом Δ и квантованному по уровню с шагом q, получены соотношения для распределений первой и второй конечных разностей при малых значениях величин q и Δ.

Рассмотрим последовательность равноотстоящих значений стационарного случайного сигнала $\{x_k = x(k\Delta)\}$, которые квантуются аналого-цифровым преобразователем с характеристикой [1]

$$z(x) = q \sum_k k 1\,[0{,}5q - |x - kq|\,], \tag{1}$$

где q — шаг квантования по уровню; $1\,[y]$ — функция Хсвисайда.

В работе исследуются распределения первой и второй конечных разностей сигнала после аналого-цифрового преобразования

$$\eta_z(\Delta) = z(x(\theta + \Delta)) - z(x(\theta)), \tag{2}$$

$$g_z(\Delta) = -z(x(\theta)) + 2z(x(\theta + \Delta)) - z(x(\theta + 2\Delta)) \tag{3}$$

в предположении, что параметры q и Δ достаточно малы, чтобы можно было воспроизвести исходный сигнал $x(\theta)$ по данным $\{z_k\}$ с высокой точностью.

Знание асимптотических распределений конечных разностей оказывается полезным при оптимизации параметров архиваторов информации о сигнале $x(\theta)$.

Распределение первой конечной разности. Используем разложение в ряд Фурье функции $\exp itz(x)$, где величина $z(x)$ определяется соотношением (1) [1]:

$$\exp itz(x) = \sum_k \exp i\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)x\,\frac{\sin 0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)}{0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)}. \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что в силу стационарности сигнала характеристическая функция первой конечной разности $\eta_z(\Delta)$

$$\tilde{\lambda}_z(t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 f(x_1, x_2) \exp it(z(x_2) - z(x_1)) =$$

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \tilde{f}\left(t + \frac{2\pi}{q} k_1, - t + \frac{2\pi}{q} k_2\right) \frac{\sin 0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q} k_1\right) \sin 0{,}5q\left(-t + \frac{2\pi}{q} k_2\right)}{0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q} k_1\right) 0{,}5q\left(-t + \frac{2\pi}{q} k_2\right)}, \quad (5)$$

где $f(x_1, x_2)$ — двумерная плотность вероятностей значений сигнала $x(\theta)$, разделенных интервалом Δ; $\tilde{f}\left(t + \frac{2\pi}{q} k_1, -t + \frac{2\pi}{q} k_2\right)$ — двумерная характеристическая функция.

Основной вклад при малых значениях величин q и Δ вносят слагаемые при $k_2 = -k_1$. С учетом этого обстоятельства

$$\tilde{\lambda}_z(t) = \sum_k \tilde{\lambda}_x\left(t + \frac{2\pi}{q} k\right) \left(\frac{\sin 0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q} k\right)}{0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q} k\right)}\right)^2. \quad (6)$$

Здесь $\tilde{\lambda}_x\left(t + \frac{2\pi}{q} k\right)$ — характеристическая функция приращения сигнала $x(\theta)$ на интервале Δ — $\eta_x(\Delta) = x(\theta + \Delta) - x(\theta)$.

Структура формулы такова, что (6) можно трактовать как характеристическую функцию квантованного (с шагом q) сигнала с характеристической функцией $\tilde{\lambda}_x(t) \frac{\sin 0{,}5qt}{0{,}5qt}$ [1]. Таким образом, распределение первой конечной разности $\eta_z(\Delta)$ — это распределение квантованной по уровню непрерывной величины, являющейся композицией двух независимых величин: приращения сигнала $\eta_x(\Delta)$ и величины, равномерно распределенной в пределах $\pm 0{,}5q$.

К этому результату можно прийти другим путем. Вероятность $P_k = P(\eta_z(\Delta) = kq)$ может быть записана следующим образом:

$$P_k = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 f(x_1, x_2) \varphi_k(x_1, x_2), \quad (7)$$

где

$$\varphi_k(x_1, x_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} 1\left[\prod_{i=1}^{2} (0{,}5q - |x_i - k_i q|)\right]. \quad (8)$$

В (8) суммирование производится по всем k_1 и k_2, удовлетворяющим равенству $k_2 - k_1 = k$.

Сделаем в (7) замену переменных $x_2 = k_2 q + \xi$, $x_2 - x_1 = \eta$. Тогда

$$P_k = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta d\xi \varphi_k(\eta, \xi) \sum_{k_2} f(\eta, k_2 q + \xi), \quad (9)$$

где

$$\varphi_k(\eta, \xi) = 1[(0{,}5q - |\eta - \xi - kq|)(0{,}5q - |\xi|)]. \quad (10)$$

При $q \to 0$

$$q \sum_{k_2} f(\eta, k_2 q + \xi) \to \lambda_x(\eta). \quad (11)$$

Поэтому

$$P_k = \frac{1}{q}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\, d\xi\, \lambda_x(\eta)\varphi_k(\eta, \xi). \tag{12}$$

Выполняя в (12) интегрирование по η, придем к соотношению, подтверждающему (6):

$$P_k = \int d\xi \frac{1}{q}(\Lambda_x(\xi + 0{,}5q) - \Lambda_x(\xi - 0{,}5q))1[0{,}5q - |\xi|], \tag{13}$$

где $\Lambda_x(y)$ — интегральный закон распределения приращения $\eta_x(\Delta)$.

Если изменить порядок интегрирования в (12), то

$$P_k = \frac{1}{q}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\, \lambda_x(\eta)(q - |\eta - kq|)1[q - |\eta - kq|]. \tag{14}$$

При фиксированном q и стремлении интервала дискретизации Δ к нулю

$$P_0 \cong 1 - \langle|\eta|\rangle/q, \quad P_{+1} = P_{-1} = \langle|\eta|\rangle/2q, \tag{15}$$

где $\langle|\eta|\rangle$ — первый абсолютный момент приращения $\eta_x(\Delta)$.

Частный случай приведенных выше соотношений использовался для оптимизации систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой [2].

Распределение второй конечной разности. По аналогии с (5) характеристическая функция второй конечной разности $q_z(\Delta)$

$$\widetilde{\mu}_z(t) = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3}\widetilde{f}\left(-t + \frac{2\pi}{q}k_1, 2t + \frac{2\pi}{q}k_2, -t + \frac{2\pi}{q}k_3\right) \times$$

$$\times \frac{\sin 0{,}5q\left(-t + \frac{2\pi}{q}k_1\right)\sin 0{,}5q\left(2t + \frac{2\pi}{q}k_2\right)\sin 0{,}5q\left(-t + \frac{2\pi}{q}k_3\right)}{0{,}5q\left(-t + \frac{2\pi}{q}k_1\right)0{,}5q\left(2t + \frac{2\pi}{q}k_2\right)0{,}5q\left(-t + \frac{2\pi}{q}k_3\right)}. \tag{16}$$

Если положить в (16) $k_1 = k_3 = -k_2 = -k$, то

$$\widetilde{\mu}_z(t) \cong \sum_k \widetilde{\mu}_x\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)\frac{\sin 0{,}5q\left(2t + \frac{2\pi}{q}k\right)}{0{,}5q\left(2t + \frac{2\pi}{q}k\right)}\left(\frac{\sin 0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)}{0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)}\right)^2. \tag{17}$$

Из (17) следует, что распределение второй конечной разности $g_z(\Delta)$ можно трактовать как результат квантования по уровню суммы трех независимых случайных величин: второй конечной разности непрерывного сигнала $g_z(\Delta) = -x(\theta) + 2x(\theta + \Delta) - x(\theta + 2\Delta)$, величины, распределенной равномерно внутри интервала $\pm q$, и величины, распределенной равномерно в пределах $\pm 0{,}5q$.

Однако это утверждение оказывается справедливым лишь при выполнении определенных условий, которые могут быть выяснены при использовании второго из рассмотренных выше подходов к определению искомого асимптотического распределения $g_z(\Delta)$.

По аналогии с (7) вероятность второй конечной разности $g_z(\Delta)$ быть равной k:

$$P_k = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, x_2, x_3)\varphi_k(x_1, x_2, x_3), \tag{18}$$

где

$$\varphi_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3} 1\left[\prod_{i=1}^{3}(0{,}5q - |x_i - k_i q|)\right]. \tag{19}$$

Суммирование в (19) проводится по всем индексам суммирования, удовлетворяющим равенству $k = -k_1 + 2k_2 - k_3$. После замены переменных $x_2 = k_2 q + \xi$, $x_3 - x_1 = \eta$, $x_1 - 2x_2 + x_3 = g$ с учетом того, что при $q \to 0$

$$q\sum_{k_2} f(g, \eta, k_2 q + \xi) \to f(\eta, g), \tag{20}$$

проинтегрировав по ξ, получим

$$P_k = \frac{1}{q}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dg d\eta f(g, \eta)\varphi_k(g, \eta), \tag{21}$$

где $f(g, \eta)$ — плотность вероятности второй и первой конечных разностей сигнала $x(\theta)$;

$$\varphi_k(g, \eta) = \sum_r \Big\{(q - |\eta - rq|)1[(|\eta - rq| - |g - kq|)(q - |\eta - rq|)] +$$

$$+ \left(q - \frac{1}{2}|g - kq| - \frac{1}{2}|\eta - rq|\right) \times$$

$$\times 1[(|g - kq| - |\eta - rq|)(2q - |g - kq| - |\eta - rq|)]\Big\}. \tag{22}$$

В (22) при четных значениях индекса k индекс суммирования r пробегает четные значения, а при нечетных — нечетные.

Если далее предположить, что выполняется условие

$$2q\sum_r f(g, rq + \varepsilon) \cong \mu_x(g), \tag{23}$$

то после соответствующей замены переменной и интегрирования по ε

$$P_k = \frac{1}{2q^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dg\, \mu_x(g)\varphi_k(g), \tag{24}$$

где

$$\varphi_k(g) = \left(q^2 - \frac{1}{2}|g - kq|^2\right)1[q - |g - kq|] +$$

$$+ \frac{1}{2}(2q - |g - kq|)^2 1[(|g - kq| - q)(2q - |g - kq|)]. \tag{25}$$

Формула (25) эквивалентна соотношению (17). Следовательно, при выполнении условия (23) справедливо приведенное выше утверждение о распределении второй конечной разности $g_2(\Delta)$.

Отметим, что условие (23) нарушается при малом, но фиксированном значении шага квантования по уровню q и неограниченном уменьшении интервала дискретизации Δ.

Изложенный выше подход может быть использован для определения асимптотических распределений конечных разностей более высокого порядка.

Однако это, по-видимому, имеет смысл при соответствующей дифферен-цируемости сигнала $x(\theta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М.** Квантование по времени при измерении и контроле.—М.: Энергия, 1969.
2. **Ефимов В. М., Лившиц З. А.** Оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой // Автометрия.—1972.—№ 4.

Поступила в редакцию 5 июня 1993 г.