УДК 621.391.1

В. Е. Фарбер

(Москва)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОШИБОК АМПЛИТУДНОГО КВАНТОВАНИЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВАНТУЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

В рамках корреляционной теории квантования по уровню исследуются числовые характеристики ошибок на выходе квантователей по уровню при округлении с использованием детерминированных корректирующих сигналов. Получаются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять закон распределения и характеристическая функция (ХФ) квантуемых процессов и при выполнении которых числовые характеристики этих ошибок не зависят от вероятностных характеристик квантуемых процессов.

1. **Введение и постановка задачи.** На выходе цифровых систем обработки информации неизбежно возникают дополнительные ошибки, обусловленные процессами квантования по уровню как значений входных процессов при преобразовании «аналог — код», так и результатов выполнения реализующих систему арифметических операций.

Процесс квантования по уровню состоит в замене текущего значения квантуемого процесса (КП) ψ некоторой величиной из набора дискретных уровней разрядной сетки цифровых устройств, равноотстоящих друг от друга на шаг квантования Δ. Ошибка квантования (ОК) ε существенно зависит от того, как производится эта замена, или, другими словами, зависит от принятого способа округления при квантовании. Зависимость ε от ψ можно представить в виде

$$\varepsilon(\psi, c) = \psi - \Delta E\{(\psi + c)\Delta^{-1}\}, \tag{1.1}$$

где $E\{*\}$ — операция взятия целой части числа; c — корректирующий сигнал (КС), значение которого определяет способ округления при квантовании. Так, если КС является случайной величиной, то такой способ округления принято называть либо вероятностным округлением [1], либо округлением с наложением интерполирующих сигналов [2], либо округлением с использованием стохастического КС [3]. Если КС является постоянной величиной, то такой способ округления принято называть округлением с использованием детерминированного (постоянного) КС [4]. В частности, если $c \equiv 0$, $c \equiv \Delta/2$ и $c \equiv \Delta$, то ошибки на выходе квантователей при округлении с использованием детерминированных КС эквивалентны рассмотренным в [5] ошибкам на выходе квантователей при округлении с недостатком, до ближайшего целого и с избытком. Ниже рассматривается случай постоянного КС.

Для обоснованного выбора шага квантования следует оценить результирующее значение ОК на выходе цифровой системы, причем для возможности проведения вероятностной оценки такого значения необходимо знать числовые характеристики (ЧХ) ОК [6].

Результаты исследования ЧХ ОК непрерывных по уровню процессов достаточно полно изложены в [5, 7, 8]. Особенности и результаты исследования

ЧХ ОК дискретных по уровню процессов приведены в [4, 9, 10]. Остановимся кратко на основных результатах, полученных в указанных работах.

Рассмотрим сначала случай, когда КП может принимать значения только из набора дискретных уровней, отстоящих друг от друга на шаг $\Delta_S = \Delta/\mu$ ($\mu = 2^S$, $S = 1, 2, \ldots$), что имеет место, например, при вычислениях в ЦВМ. При этом Δ_S имеет смысл цены младшего разряда ячейки для записи КП, Δ — цены младшего разряда для записи квантованного процесса, а S — количества отбрасываемых (усекаемых) при квантовании двоичных разрядов. Одномерный $w_{1\psi}(*)$ и двумерный $w_{2\psi}(*)$ законы распределения такого КП имеют вид

$$w_{1\psi}(\psi, t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} p(q)\delta(\psi - q\Delta_S), \tag{1.2}$$

$$w_{2\psi}(\psi_1, \psi_2, t_1, t_2) = \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} p(q_1, q_2)\delta(\psi_1 - q_1\Delta_S)\delta(\psi_2 - q_2\Delta_S), \tag{1.3}$$

где $\delta(*)$ — дельта-функция; $p(q)$ — вероятность, с которой ψ в момент времени t принимает значение $\psi = q\Delta_S$; $p(q_1, q_2)$ — вероятность, с которой ψ в моменты времени t_1 и t_2 принимает значения $\psi_1 = q_1\Delta_S$ и $\psi_2 = q_2\Delta_S$.

В [4] показано, что если при любом $m = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m) = \mu^{-1}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) = m_\psi(t)\mu^{-1}, \tag{1.5}$$

то для одномерной характеристической функции (ХФ) квантуемого процесса $\Theta_{1\psi}(*)$ справедливы соотношения:

$$\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, t\right) = 0 \quad \text{при} \quad n \neq \tau\mu \quad \text{и} \quad \Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, t\right) = 1 \quad \text{при} \quad n = \tau\mu, \tag{1.6}$$

$$\Theta'_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, t\right) = \frac{\partial}{\partial\omega} \Theta_{1\psi}(\omega, t)\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{\Delta} n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq \tau\mu, \\ jm_\psi(t) & \text{при} \quad n = \tau\mu, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $m_\psi(t)$ — математическое ожидание КП; $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Аналогично, если при любых $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$

$$\sum_{g_1=-\infty}^{\infty} \sum_{g_2=-\infty}^{\infty} p(g_1\mu + m_1, g_2\mu + m_2) = \mu^{-2}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{m_1=0}^{\mu-1} \sum_{g_1=-\infty}^{\infty} \sum_{g_2=-\infty}^{\infty} (g_1\mu + m_1)\Delta_S p(g_1\mu + m_1, g_2\mu + m_2) = m_\psi(t_1)\mu^{-1}, \tag{1.9}$$

то справедливы соотношения

$$\Theta_{2\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, \frac{2\pi}{\Delta} k, t_1, t_2\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq \tau_1\mu \quad \text{или} \quad k \neq \tau_2\mu, \\ 1 & \text{при} \quad n = \tau_1\mu \quad \text{и} \quad k = \tau_2\mu, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\Theta'_{2\psi}\left(0, \frac{2\pi}{\Delta} k, t_1, t_2\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq \tau_2\mu, \\ jm_\psi(t_1) & \text{при} \quad k = \tau_2\mu, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\tau_1, \tau_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

При выполнении условий (1.6) и (1.7), (1.10) и (1.11) математическое ожидание $m_\varepsilon(t)$, дисперсия $\sigma_\varepsilon^2(t)$ и корреляционная функция $K_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2)$ ОК, а также взаимная корреляционная функция $K_{\psi\varepsilon}(t_1, t_2)$ ОК и КП не зависят от вероятностных характеристик (ВХ) КП и равны [4]

$$m_\varepsilon(t) = \frac{\Delta}{2} - c - \frac{\Delta}{2\mu}; \qquad \sigma_\varepsilon^2(t) = \frac{\Delta^2(\mu^2 - 1)}{12\mu^2}, \tag{1.12}$$

$$K_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2)\Big|_{t_1 \neq t_2} = K_{\psi\varepsilon}(t_1, t_2) = 0. \tag{1.13}$$

Пусть теперь КП непрерывен по уровню, что соответствует случаю $\Delta_S \to 0$ или $\mu \to \infty$. Тогда, как это показано в [5], если

$$\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, t\right) = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 0, \tag{1.14}$$

то ОК имеют равномерную плотность распределения, а

$$m_\varepsilon(t) = \frac{\Delta}{2} - c, \qquad \sigma_\varepsilon^2(t) = \frac{\Delta^2}{12}. \tag{1.15}$$

Если наряду с условием (1.14) выполняются следующие условия:

$$\Theta_{1\psi}'\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, t\right) = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 0, \tag{1.16}$$

$$\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, \frac{2\pi}{\Delta} k, t_1, t_2\right) = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 0 \quad \text{или} \quad k \neq 0, \tag{1.17}$$

$$\Theta_{1\psi}'\left(0, \frac{2\pi}{\Delta} k, t_1, t_2\right) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 0, \tag{1.18}$$

то ЧХ ОК определяются соотношениями (1.13) и (1.15) [4].

В [5, 7] показано, что ЧХ ОК непрерывных по уровню процессов определяются соотношениями (1.13) и (1.15) при выполнении условия

$$\Theta_{1\psi}(\omega_1, \omega_2, t_1, t_2) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |\omega_1| \geq \omega_0 \quad \text{или} \quad |\omega_2| \geq \omega_0, \; 0 < \omega_0 < 2\pi/\Delta.$$

Нетрудно заметить, что условия (1.17) и (1.18) включают в себя это условие и, следовательно, охватывают более широкий класс КП.

Приведенные выше условия того, что ЧХ ОК определяются соотношениями (1.12), (1.13) и (1.15), являются достаточными условиями. Настоящая работа посвящена доказательству необходимости условий (1.10) и (1.11), (1.17) и (1.18) того, что ЧХ ОК не зависят от вероятностных характеристик КП. Кроме того, в ней доказывается достаточность условий (1.6) и (1.7), (1.10) и (1.11) для выполнения соотношений (1.4) и (1.5), (1.8) и (1.9) соответственно.

2. Одномерные закон распределения и числовые характеристики ОК. Исходя из (1.1) и (1.2), для определения ВХ ОК имеем

$$w_{1\varepsilon}(\varepsilon, t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} p(q)\delta\{\varepsilon - \varepsilon(q\Delta_S, c)\}, \tag{2.1}$$

$$m_\varepsilon(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \varepsilon(q\Delta_S, c)p(q), \tag{2.2}$$

$$\sigma_\varepsilon^2(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(q\Delta_S, c)p(q) - m_\varepsilon^2(t), \tag{2.3}$$

$$K_{\psi\varepsilon}(t, t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} q\Delta_S\varepsilon(q\Delta_S, c)p(q) - m_\psi(t)m_\varepsilon(t), \tag{2.4}$$

$$m_\psi(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} q\Delta_S p(q). \tag{2.5}$$

Учитывая периодичность $\varepsilon(\psi, c)$, перепишем (2.1)—(2.5) в виде

$$w_{1\varepsilon}(\varepsilon, t) = \sum_{m=0}^{\mu-1} \delta\{\varepsilon - \varepsilon(m\Delta_S, c)\} \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(q\mu + m), \tag{2.6}$$

$$m_\varepsilon(t) = \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, c) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m), \tag{2.7}$$

$$\sigma_\varepsilon^2(t) = \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon^2(m\Delta_S, c) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m) - m_\varepsilon^2(t), \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} K_{\psi\varepsilon}(t, t) &= \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, c) \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) - \\ &- m_\psi(t) \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, c) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m) = \\ &= \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, c) \left[\sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) - m_\psi(t) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m) \right], \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$m_\psi(t) = \sum_{m=0}^{\mu-1} \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m). \tag{2.10}$$

Анализ (2.6)—(2.10), а также результатов [4] дает возможность сформулировать и доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы ОК имели равномерно-дискретный закон распределения, т. е. для любого $i = 0, 1, ..., \mu - 1$ с вероятностью $P = \mu^{-1}$ принимали значения $(i\mu^{-1}\Delta - c)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m = 0, 1, ..., \mu - 1$ выполнялось условие (1.4).

Теорема 2. Для того чтобы при заданном значении КС ОК были не коррелированы с КП $K_{\psi\varepsilon}(t, t) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, c) \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) = m_\psi(t) \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, c) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m). \tag{2.11}$$

Теорема 3. Для того чтобы при любом значении КС ОК были не коррелированы с КП $K_{\psi\varepsilon}(t, t) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m = 0, 1, ..., \mu - 1$

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty}(g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) = m_\psi(t)\sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m). \tag{2.12}$$

Следствие 1. При выполнении условий теорем 1 и 3 ОК имеют равномерно-дискретный закон распределения и являются некоррелированными с КП, а $m_\varepsilon(t)$ и $\sigma_\varepsilon^2(t)$ определяются (1.12).

Теорема 4. Для того чтобы при любом $m = 0, 1, ..., \mu - 1$ были справедливы соотношения (1.4) и (1.5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соответственно условия (1.6) и (1.7).

Справедливость первых двух теорем непосредственно следует из анализа соотношений (2.6) и (2.9) соответственно. Достаточность теоремы 3 непосредственно следует из (2.9). Необходимость теоремы 4 следует из результатов [4]. Доказательство необходимости теоремы 3 и достаточности теоремы 4 дано в приложении.

3. Двумерные закон распределения и числовые характеристики ОК. Исходя из (1.1) и (1.3) с учетом периодичности функции $\varepsilon(\psi, c)$, запишем выражения для определения ВХ ОК в виде

$$w_{2\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, t_1, t_2) = \sum_{m_1=0}^{\mu-1}\sum_{m_2=0}^{\mu-1}\delta\{\varepsilon_1 - \varepsilon(m_1\Delta_S, c)\} \times$$

$$\times\, \delta\{\varepsilon_2 - \varepsilon(m_2\Delta_S, c)\}\sum_{g_1=-\infty}^{\infty}\sum_{g_2=-\infty}^{\infty} p(g_1\mu + m_1, g_2\mu + m_2), \tag{3.1}$$

$$K_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2)\Big|_{t_1 \neq t_2} = \sum_{m_1=0}^{\mu-1}\sum_{m_2=0}^{\mu-1}\varepsilon(m_1\Delta_S, c)\varepsilon(m_2\Delta_S, c) \times$$

$$\times \sum_{g_1=-\infty}^{\infty}\sum_{g_2=-\infty}^{\infty} p(g_1\mu + m_1, g_2\mu + m_2) - m_\varepsilon(t_1)m_\varepsilon(t_2), \tag{3.2}$$

$$K_{\psi\varepsilon}(t_1, t_2) = \sum_{m_2=0}^{\mu-1}\varepsilon(m_2\Delta_S, c)\sum_{m_1=0}^{\mu-1}\sum_{g_1=-\infty}^{\infty}\sum_{g_2=-\infty}^{\infty}(g_1\mu + m_1)\Delta_S p(g_1\mu + m_1, g_2\mu + m_2) -$$

$$- m_\psi(t_1)\sum_{m_2=0}^{\mu-1}\varepsilon(m_2\Delta_S, c)\sum_{g_2=-\infty}^{\infty} p(g_2\mu + m_2) = \sum_{m_2=0}^{\mu-1}\varepsilon(m_2\Delta_S, c) \times$$

$$\times \left[\sum_{m_1=0}^{\mu-1}\sum_{g_1=-\infty}^{\infty}\sum_{g_2=-\infty}^{\infty}(g_1\mu + m_1)\Delta_S p(g_1\mu + m_1, g_2\mu + m_2) - m_\psi(t_1)\sum_{g_2=-\infty}^{\infty} p(g_2\mu + m_2)\right]. \tag{3.3}$$

Анализ (3.1)—(3.3), а также результатов [4] позволяет сформулировать и доказать следующие теоремы.

Теорема 5. Для того чтобы ОК имели двумерный равномерно-дискретный закон распределения, т. е. для любых $i_1, i_2 = 0, 1, ..., \mu - 1$ с вероятностью $P = \mu^{-2}$ принимали дискретные значения $(i_1\Delta_S - c, i_2\Delta_S - c)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $m_1, m_2 = 0, 1, ..., \mu - 1$ выполнялось условие (1.8).

Теорема 6. Для того чтобы при любом значении КС ОК были не коррелированы с квантуемым процессом $K_{\psi\varepsilon}(t_1, t_2) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы при любых $m_1, m_2 = 0, 1, ..., \mu - 1$

$$\sum_{m_1=0}^{\mu-1} \sum_{g_1=-\infty}^{\infty} \sum_{g_2=-\infty}^{\infty} (g_1\mu + m_1)\Delta_S p(g_1\mu + m_1, g_2\mu + m_2) = m_\psi(t_1) \sum_{g_2=-\infty}^{\infty} p(g_2\mu + m_2). \tag{3.4}$$

Следствие 2. При одновременном выполнении условий теорем 5 и 6 ОК имеют двумерный равномерно-дискретный закон распределения и являются некоррелированными как с КП, так и между собой (1.13), а $m_\epsilon(t)$ и $\sigma_\epsilon^2(t)$ определяются соотношением (1.12).

Теорема 7. Для того чтобы при любых $m_1, m_2 = 0, 1, ..., \mu - 1$ были справедливы соотношения (1.8) и (1.9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соответственно условия (1.10) и (1.11).

Справедливость теоремы 5 непосредственно следует из анализа соотношения (3.1). Достаточность теоремы 6 непосредственно следует из (3.3) с учетом того, что выполнение условия (1.8) для одномерного случая эквивалентно выполнению условия (1.4). Необходимость теоремы 7 следует из результатов [4]. Доказательство необходимости теоремы 6 и достаточности теоремы 7 аналогично приведенным в приложении доказательствам теорем 3 и 4.

4. Обобщение на случай непрерывного распределения КП. Полученные выше результаты легко обобщаются на случай квантования непрерывных по уровню процессов ($\Delta_S \to 0, \mu \to \infty$). Так, условия (1.4), (2.12), (1.8) и (3.4) вырождаются в условия

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} w_{1\psi}(g\Delta + x, t) = \Delta^{-1}, \tag{4.1}$$

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\Delta + x) w_{1\psi}(g\Delta + x, t) = m_\psi(t) \sum_{g=-\infty}^{\infty} w_{1\psi}(g\Delta + x, t), \tag{4.2}$$

$$\sum_{g_1=-\infty}^{\infty} \sum_{g_2=-\infty}^{\infty} w_{2\psi}(g_1\Delta + x_1, g_2\Delta + x_2, t_1, t_2) = \Delta^{-2}, \tag{4.3}$$

$$\int_0^\Delta \sum_{g_1=-\infty}^{\infty} \sum_{g_2=-\infty}^{\infty} (g_1\Delta + x_1) w_{2\psi}(g_1\Delta + x_1, g_2\Delta + x_2, t_1, t_2) dx_1 =$$

$$= m_\psi(t_1) \sum_{g_2=-\infty}^{\infty} w_{1\psi}(g_2\Delta + x_2, t_2), \tag{4.4}$$

где $w_{1\psi}(*)$ и $w_{2\psi}(*)$ — одномерная и двумерная плотности распределения КП, и должны выполняться для любых значений непрерывных по уровню величин x, x_1 и x_2 из диапазона их изменения от 0 до Δ.

Далее, условия (1.6), (1.7), (1.10) и (1.11) вырождаются в условия (1.14), (1.16), (1.17), (1.18) соответственно, в условиях теорем 1, 3, 5, 6 и следствий 1, 2 ОК имеют равномерную на интервале от $-c$ до $\Delta - c$ плотность распределения, а для ЧХ ОК из (1.12) имеем (1.15).

Справедливость приведенных соотношений доказана в приложении.

Заключение. Итак, в работе на основе анализа результатов исследования ВХ ОК [1—7] приведены условия, которым должен удовлетворять закон распределения и ХФ дискретных и непрерывных по уровню КП и при выполнении которых ОК имеют равномерно-дискретный или равномерный закон распределения и являются некоррелированными как с КП, так и между собой, и дано доказательство их необходимости и достаточности. Приведенные условия включают в себя известное из теории квантования по уровню достаточное условие, связанное с требованием финитности ХФ КП, и, следовательно, охватывают более широкий класс КП.

Полученные результаты в каждом конкретном случае позволяют обоснованно решать вопрос о том, насколько правомерно при оценке результирующего значения ОК на выходе цифровых систем считать, что ЧХ ОК, возникающих как при преобразовании «аналог — код», так и при выполнении арифметических операций на ЦВМ, определяются соотношениями (1.12), (1.13) и (1.15).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство необходимости теоремы 3. Пусть $K_{\psi\varepsilon}(t, t) = 0$ при $c = 0$ и $c = \Delta_S$, т. е. пусть для указанных значений КС выполняются условия (2.11):

$$\sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, 0) \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) = m_\psi(t) \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, 0) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m), \tag{П1}$$

$$\sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, \Delta_S) \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) = m_\psi(t) \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, \Delta_S) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m). \tag{П2}$$

Исходя из (1.1), имеем

$$\varepsilon(m\Delta_S, \Delta_S) = \begin{cases} \varepsilon(m\Delta_S, 0) & \text{при } m = 0, 1, ..., \mu - 2, \\ \varepsilon(m\Delta_S, 0) - \Delta & \text{при } m = \mu - 1. \end{cases} \tag{П3}$$

При этом условие (П2) с учетом (П3) можно переписать в виде

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + \mu - 1)\Delta_S p(g\mu + \mu - 1) = m_\psi(t) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + \mu - 1). \tag{П4}$$

Таким образом, выполнение условий (П1) и (П2) равносильно выполнению условий (П1) и (П4).

Пусть теперь (2.11) выполняется для $c = k\Delta_S$, $k = 0, 1, 2$, т. е., наряду с (П1) и (П2), выполняется условие

$$\sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, 2\Delta_S) \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)\Delta_S p(g\mu + m) = m_\psi(t) \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon(m\Delta_S, 2\Delta_S) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m). \tag{П5}$$

Исходя из (1.1), имеем

$$\varepsilon(m\Delta_S, 2\Delta_S) = \begin{cases} \varepsilon(m\Delta_S, 0) & \text{при } m = 0, 1, 2, ..., \mu - 3, \\ \varepsilon(m\Delta_S, 0) - \Delta & \text{при } m = \mu - 2, \\ \varepsilon(m\Delta_S, 0) - \Delta + \Delta_S & \text{при } m = \mu - 1. \end{cases} \tag{П6}$$

При этом (П5) с учетом (П4) и (П6) можно переписать в виде

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + \mu - 2)\Delta_S p(g\mu + \mu - 2) = m_\psi(t) \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + \mu - 2). \tag{П7}$$

Таким образом, выполнение условий (П1), (П2) и (П5) равносильно выполнению условий (П1), (П4) и (П7).

Аналогичным образом можно показать, что выполнение условий $K_{\psi\varepsilon}(t, t) = 0$ при $c = k\Delta_S$, $k = 0, 1, ..., \mu - 1$ эквивалентно выполнению условий (П1) и (2.12) для $m = \mu - 1, \mu - 2, ..., 1$. Выполнение условий (2.12) при $m = \mu - 1, \mu - 2, ..., 1$, согласно (2.10), приводит к выполнению (2.12) и при $m = 0$. Таким образом, выполнение условия $K_{\psi\varepsilon}(t, t) = 0$ при любом значении КС требует выполнения условия (2.12) для любого $m = 0, 1, 2, ..., \mu - 1$, что доказывает необходимость теоремы 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о   д о с т а т о ч н о с т и   т е о р е м ы   4. Обобщая результаты, полученные в [9] для случая $m = \mu/2$, на случай $m = 1, 2, \ldots, \mu - 1$, имеем

$$F_n(m) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)^n \Delta_S^n p(g\mu + m) = \frac{2\pi}{\Delta} M\{\psi^n\} + \frac{1}{\pi j^n} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\sin \frac{2\pi}{\Delta} hk\right) \left[\cos \frac{\pi}{\mu} (\mu - 2m)k\right] \Theta_{1\psi}^{(n)}\left(\frac{2\pi}{\Delta} k, t\right) - \frac{1}{\pi j^{n+1}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\sin \frac{2\pi}{\Delta} hk\right) \left[\sin \frac{\pi}{\mu} (\mu - 2m)k\right] \Theta_{1\psi}^{(n)}\left(\frac{2\pi}{\Delta} k, t\right), \tag{П8}$$

где $M\{*\}$ — символ математического ожидания; $0 < h < \Delta_S/2$. Пусть

$$\Theta_{1\psi}^{(n)}\left(\frac{2\pi}{\Delta} k, t\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq \tau\mu, \\ j^n M\{\psi^n\} & \text{при} \quad k = \tau\mu. \end{cases} \tag{П9}$$

Тогда (П8) после проведения суммирования с учетом [11] принимает вид

$$F_n(m) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} (g\mu + m)^n \Delta_S^n p(g\mu + m) = M\{\psi^n\}\mu^{-1}. \tag{П10}$$

Нетрудно заметить, что (1.6), (1.7) и (1.4), (1.5) являются частным случаем (П9) и (П10) при $n = 0$ и $n = 1$ соответственно. Таким образом, выполнение условий (1.6) и (1.7) приводит к справедливости соотношений (1.4) и (1.5), что доказывает достаточность теоремы 4.

О б о б щ е н и е   н а   с л у ч а й   н е п р е р ы в н о г о   р а с п р е д е л е н и я   КП. Пусть дискретный по уровню процесс

$$\psi = q\Delta_S = (g\mu + m)\Delta_S = g\Delta + x; \qquad x = m\Delta_S = m\Delta\mu^{-1}, \tag{П11}$$

где $m = 0, 1, \ldots, \mu - 1$, а процесс x изменяется в пределах от 0 до $\Delta - \Delta_S$. В случае $\Delta_S \to 0$ ($\mu \to \infty$) дискретные по уровню процессы ψ и x вырождаются в непрерывные. При этом x изменяется в пределах от 0 до Δ, а плотность распределения КП ψ определяется следующим образом:

$$w_{1\psi}(g\Delta + x, t) = \lim p(g\mu + m)/\Delta_S \quad \text{при} \quad \Delta_S \to 0. \tag{П12}$$

Разделив обе части равенства (1.4) на Δ_S и приняв во внимание, что $\mu\Delta_S = \Delta$, после перехода к пределу при $\Delta_S \to 0$ с учетом (П12) получим (4.1). Аналогично, разделив обе части равенства (2.12) на Δ_S и перейдя к пределу при $\Delta_S \to 0$, получим (4.2).

Одномерная ХФ $\Theta_{1\psi}(\omega, t)$ дискретного по уровню процесса ψ, закон распределения которого описывается соотношением (1.2), определяется выражением

$$\Theta_{1\psi}(\omega, t) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(q)\exp\{j\omega q\Delta_S\}, \tag{П13}$$

откуда при значении аргумента $\omega = 2\pi n/\Delta$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) [5]

$$\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta} n, t\right) = \sum_{m=0}^{\mu-1} \exp\left\{j \frac{2\pi n}{\Delta} m\Delta_S\right\} \sum_{g=-\infty}^{\infty} p(g\mu + m), \tag{П14}$$

$$\Theta_{1\psi}'\left(\frac{2\pi}{\Delta}n,\, t\right) = \sum_{m=0}^{\mu-1} \exp\left\{j\frac{2\pi n}{\Delta}m\Delta_s\right\} \sum_{g=-\infty}^{\infty} j\left\{(g\mu + m)\Delta_s\right\} p(g\mu + m). \qquad (\text{П15})$$

Из (П14) и (П15) следует, что при выполнении условий (1.4) и (1.5) справедливы соотношения (1.6) и (1.7).

Разделив и умножив правые части выражений (П14) и (П15) на Δ_s и перейдя к пределу при $\Delta_s \to 0$, нетрудно получить, что

$$\Theta_{1\psi}\left(\frac{2\pi}{\Delta}n,\, t\right) = \int^{\Delta} \exp\left\{j\frac{2\pi n}{\Delta}x\right\} \sum^{\infty} w_{1\psi}(g\Delta + x,\, t)\,dx, \qquad (\text{П16})$$

откуда следует, что если для любого $0 \le x \le \Delta$ выполняются условия (4.1) и (4.2), то справедливы соотношения (4.5) и (4.6). Соотношения (4.5) и (4.6) также следуют из (1.6) и (1.7) при $\mu \to \infty$.

Аналогичным образом можно показать справедливость проведенного обобщения полученных результатов на случай квантования непрерывных по уровню процессов при рассмотрении двумерных ВХ ОК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гладкий В. С. Вероятностные вычислительные модели.—М.: Наука, 1973.
2. Веселова Г. П. Об амплитудном квантовании с наложением интерполирующих сигналов // АиТ.—1975.—№ 5.
3. Фарбер В. Е. О моментах распределения амплитудно-квантованных процессов при округлении с использованием корректирующих сигналов // АиТ.—1992.—№ 8.
4. Лившиц Н. А., Фарбер В. Е. Числовые характеристики ошибок амплитудного квантования // АиТ.—1978.—№ 12.
5. Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле.—М.: Энергия, 1969.
6. Верешкин А. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации.—М.: Сов. радио, 1973.
7. Косякин А. А. Статистическая теория квантования по уровню // АиТ.—1966.—№ 6.
8. Баранов Л. А. Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления.—М.: Энергоатомиздат, 1990.
9. Лившиц Н. А., Фарбер В. Е. Об учете корреляции ошибок счета и квантуемых процессов при оценке точности вычислений в ЦВУ // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ.—1980.—Вып. 9.
10. Фарбер В. Е. Об одном подходе к определению числовых характеристик ошибок амплитудного квантования произвольно распределенных случайных процессов // Автометрия.—1991.—№ 2.
11. Градштейн П. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 8 июля 1992 г.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ!

Валютный гонорар за публикацию статей в журнале «Автометрия» в 1992 г. можно получить в редакции журнала по адресу:

630090 г. Новосибирск, Университетский пр., 1, тел. 35-45-67.

Получение авторского гонорара иногородними авторами возможно по доверенности или перечислением на валютный счет.