РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1993

УДК 621.391 : 510.53

В. П. Бакалов

(Москва)

УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ ПО АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Получены уравнения оценок многомерных пространственно-ограниченных сигналов при восстановлении по автокорреляции, искаженной аддитивной помехой, когда сигнал и помеха представляются пространственно-ограниченными реализациями комплексных гауссовских полей. Уравнения получены для оценок по максимуму правдоподобия и максимуму апостериорной вероятности.

Известно, что для широкого класса пространственно-ограниченных многомерных сигналов (например, полей, изображений) возможно их восстановление (с точностью до постоянного фазового множителя, сдвига и центрально-симметричного преобразования с комплексным сопряжением) по автокорреляционной функции или амплитудному спектру, которые определяются для восстанавливаемой реализации сигнала [1—3]. Известно также, что задача восстановления является устойчивой для определенных алгоритмов [3], т. е. малые искажения при регистрации автокорреляции приводят к малым искажениям сигнала. Поэтому правомерна рассматриваемая ниже статистическая постановка задачи отыскания оптимальной оценки. При этом возможны два варианта постановки задачи для случаев, когда восстанавливаемый сигнал является реализацией случайного поля или статистическое описание восстанавливаемого сигнала нецелесообразно (например, в случае восстановления изображений астрономических объектов).

Статистическая постановка задачи восстановления многомерных сигналов по автокорреляции может рассматриваться как развитие результатов [4], относящихся к восстановлению сигнала по свертке с неизвестной искажающей функцией. Пусть $g(x)$ — восстанавливаемый пространственно-ограниченный сигнал, в общем случае комплексный. При этом $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $k \geq 2$, k — «размерность» сигнала (для изображений $k = 2$), а пространственное ограничение означает, что известен, например, носитель η, за пределами которого для любых реализаций сигнала

$$g(x) \equiv 0, \qquad x \not\subset \eta. \tag{1}$$

Восстановление $g(x)$ по точно известной автокорреляции $a(x)$ соответствует решению при выполнении (1) интегрального уравнения

$$a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\overset{*}{g}(y + x)dy, \tag{2}$$

где $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$; $dy = dy_1, dy_2, ..., dy_k$; $y + x = ((y_1 + x_1), (y_2 + x_2), ...$ $..., (y_k + x_k))$. Носитель η сигнала (1) не всегда априорно точно известен. В этом случае можно, например, определить носитель ξ как ограниченную область в пространстве x, включающую η. Восстановление по (2) может производиться с учетом как (1), так и

$$g(x) = 0, \qquad x \not\subset \xi, \quad \xi \supset \eta. \tag{3}$$

В предположении, что восстанавливаемый сигнал имеет спектр, уравнение (2) может быть представлено в эквивалентной форме:

$$|\sigma(\omega)|^2 = A(\omega), \tag{4}$$

где $\sigma(\omega)$ — спектр $g(x)$, $A(\omega)$ — спектр $a(x)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$. При точно известных автокорреляции или ее спектре статистическая постановка задачи не имеет смысла, так как решение (2) или (4) с учетом (1) или (3) предполагается единственным в указанном выше смысле.

Рассмотрим статистическую постановку задачи восстановления. Пусть регистрируется аддитивная смесь автокорреляции $a(x)$ и комплексного гауссовского шума (поля) $n(x)$: $S(x) = a(x) + n(x)$. Известны корреляционные функции полей $g(x)$ и $n(x)$, характеризующие их статистические свойства*:

$$\begin{aligned} R_c(x, y) &= E[g(x)\overset{*}{g}(y)], \\ R_n(x, y) &= E[n(x)\overset{*}{n}(y)], \end{aligned} \tag{5}$$

где E — символ математического ожидания. Будем предполагать, что $g(x)$ и $n(x)$ имеют нулевые средние, $R_c(x, y)$ неотрицательно определена, а $R_n(x, y)$ определена положительно; положительная определенность $R_n(x, y)$ может быть обусловлена наличием в $n(x)$ некоррелированной составляющей, как это часто бывает при регистрации изображений.

Используя ту же последовательность действий, что и для получения уравнений оптимальной оценки в [4], можно получить уравнение оптимальной оценки для $\hat{g}_{\text{МАВ}}(x)$ по максимуму апостериорной вероятности (МАВ) многомерного пространственно-ограниченного сигнала $g(x)$:

$$\hat{g}_{\text{МАВ}}(x) = \int_{\Omega} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz [R_c(x, y)\hat{g}_{\text{МАВ}}(y + z) + R_c(y + z, x)\hat{\overset{*}{g}}_{\text{МАВ}}(y)D(z)], \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} D(z) &= \int_{\Omega} dv(S(v) - \hat{a}_{\text{МАВ}}(v))Q(z, v), \\ \hat{a}_{\text{МАВ}}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} dw \hat{g}_{\text{МАВ}}(w)\hat{\overset{*}{g}}_{\text{МАВ}}(w + v), \end{aligned} \tag{7}$$

где Ω — носитель зарегистрированной искаженной автокорреляции. При выводе предполагалось, что на носителях η и Ω справедливы гипотезы о гауссовости полей $g(x)$ и $n(x)$ соответственно. Выражение (7) соответствует реализации многомерного фильтра с импульсной характеристикой $Q(z, v)$, удовлетворяющей уравнению

$$\int_{\Omega} R_n(t, z)Q(z, v)dz = \delta(t - v),$$

где $\delta(t)$ — δ-функция. В частном случае, когда и сигнал, и помеха — ограниченные в пространстве реализации белых гауссовских полей со спектральными плотностями мощности N_c и N_n соответственно, легко получить, что, например, в спектральной области (6) приводит к уравнению

* В литературе принят один термин «корреляционная» (автокорреляционная) для функции (2), определяемой без усреднения, и (5). В статье для функции (2), используемой при восстановлении пространственно-ограниченной реализации случайного поля, принято наименование «автокорреляционная», а функция (5) называется «корреляционной».

$$|\hat{\sigma}_{\text{МАВ}}(\omega)|^2 = \text{Re}S(\omega) - \frac{N_n}{2N_c} \tag{8}$$

($\hat{\sigma}_{\text{МАВ}}(\omega)$ — спектр оценки $\hat{g}_{\text{МАВ}}(x)$; $S(\omega)$ — спектр зарегистрированных данных $S(x)$) при $\hat{g}_{\text{МАВ}}(x)$, которое удовлетворяет условию (1). Для решения этого уравнения можно использовать те же известные итерационные или градиентные методы [3], что и при восстановлении по (4). В случае, когда статистическое описание восстанавливаемого сигнала не имеет смысла, целесообразно использование критерия максимального правдоподобия (МП). Тогда оптимальная оценка $\hat{g}_{\text{МП}}(x)$ определяется из условия равенства нулю вариации функционала, представляющего функцию правдоподобия. Формируя функцию правдоподобия так же, как и в [4], получим, что $g_{\text{МП}}(x)$ должна определяться из уравнения

$$\int_{\Omega} dz [\hat{g}^*_{\text{МП}}(z + x) + \hat{g}_{\text{МП}}(z - x)] \int_{\Omega} d\nu [S^*(z) - \hat{a}^*_{\text{МП}}(z)] Q(\nu, z) = 0$$

(Ω — носитель зарегистрированного сигнала $S(x)$) при $\hat{g}_{\text{МП}}(x)$, которое удовлетворяет условию (3). Легко показать, что ядра $g_{\text{МП}}(x)$ и $\hat{g}^*_{\text{МП}}(x)$ положительно определены в силу пространственной ограниченности, т. е. это уравнение с учетом положительной определенности $Q_n(x, y)$ эквивалентно

$$\hat{a}_{\text{МП}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_{\text{МП}}(y) \hat{g}^*_{\text{МП}}(y + x) dy, \tag{9}$$

где $\hat{a}_{\text{МП}}(x) = S(x)$, и оценка $\hat{g}_{\text{МП}}(x)$ ограничена любым носителем (например, (3)), для которого (1) является подмножеством. Из сравнения (9) и (2) следует, что оценка по максимуму правдоподобия может быть определена с помощью известных итерационных или градиентных алгоритмов, применяемых для решения (2) или (4) [3]. Уравнения (6)—(9) могут не иметь точного решения в силу свойств многомерных пространственно-ограниченных сигналов. Если все же в этом случае использовать эти уравнения для получения квазиоптимальных оценок восстанавливаемого сигнала, рассматривая их как приближенные, то свойства этих оценок зависят от конкретных алгоритмов.

Таким образом, уравнения оптимальной оценки есть интегральные уравнения. Оценки по максимуму апостериорной вероятности могут быть получены с помощью известных итерационных и градиентных алгоритмов лишь в случае, если сигнал и помеха — пространственно-ограниченные реализации белых гауссовских полей. В общем случае, которому соответствует уравнение (6), необходима разработка специальных алгоритмов. Для оценки по максимуму правдоподобия могут быть использованы известные алгоритмы и при нестационарной гауссовской аддитивной помехе. Когда точного решения соответствующих уравнений не существует, свойства оценок зависят от используемых алгоритмов решения уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bruck Yu. M., Sodin L. G. On the ambiguity of the image reconstruction problem // Opt. Commun.—1979.—N 3.
2. Бакалов В. П. Двумерные пространственно-ограниченные непрерывные сигналы, восстанавливаемые по амплитудному спектру // Автометрия.—1985.—№ 2.
3. Fienup J. R. Phase retrieval algorithms: a comparision // Appl. Opt.—1982.—N 15.
4. Бакалов В. П. Уравнения оптимальной оценки пространственно-ограниченных многомерных сигналов при совместном действии мультипликативных и аддитивных помех // Автометрия.—1990.—№ 3.

Поступило в редакцию 27 июля 1990 г.