РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1993

УДК 517

О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ЛУЧЕВЫХ ДАННЫХ

Приводятся формулы для вычисления преобразования Фурье однородных обобщенных функций в трехмерном пространстве. Эти формулы позволяют строить эффективные численные алгоритмы томографической $3D$-реконструкции по лучевым данным.

Лучевыми данными называются интегралы от функции $f(x_1, ..., x_n)$ вдоль прямых линий. Если $n = 2$, то лучевые данные совпадают с преобразованием Радона; этот случай характерен для классической компьютерной рентгеновской томографии. В настоящее время интенсивно развиваются методы $3D$- [1—6] ($n = 3$) и даже $4D$-реконструкции ($n = 4$), четвертой координатой может быть время или длина волны при томографии в оптическом диапазоне. Под задачей $3D$-реконструкции понимается задача восстановления функции $f(x)$ по ее лучевым данным. Отметим, что с задачей $3D$-реконструкции тесно связана задача $3D$-представления, заключающаяся в визуализации плотности трехмерных объектов методами, отличными от проведения плоских сечений. Эта задача имеет смысл для любых видов томографии. Большинство фирм, выпускающих томографы, в настоящее время снабжают их за дополнительную плату пакетами программ $3D$-представления. Разумеется, это не означает, что все проблемы, возникающие здесь, уже решены. Отметим также, что, несмотря на их близость, проблемы $3D$-реконструкции и $3D$-представления имеют свои специфические задачи и методы их решения.

Пусть заданы функция $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ и точка $z = (z_1, z_2, z_3)$. Для интеграла от функции $f(x)$ вдоль прямой, проходящей через точку z в направлении вектора α, будем использовать обозначения из [3]: $(R_1f)(z, \alpha) = \int f(z + t\alpha)dt$. В некоторых ситуациях используется функция $(R_1^+f)(z, \alpha) = \int_0^\infty f(z + t\alpha)dt$, отличающаяся от $(R_1f)(z, \alpha)$ тем, что интегрирование ведется лишь при $t \geq 0$. Пусть задана кривая, по которой движется источник, $\Phi(\lambda) = (\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \Phi_3(\lambda))$, параметр λ пробегает некоторый интервал Λ действительной прямой. Для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\lambda \in \Lambda$ определим функции

$$g(\alpha, \lambda) = (R_1f)(\Phi(\lambda), \alpha) = \int_{\infty}^{\infty} f(\Phi(\lambda) + t\alpha)dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\Phi(\lambda) + t\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)dt,$$

$$g^+(\alpha, \lambda) = (R_1^+f)(\Phi(\lambda), \alpha) = \int_0^{\infty} f(\Phi(\lambda) + t\alpha)dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_0^{\infty} f\left(\Phi(\lambda) + t\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)dt. \quad (1)$$

Функция $g(\alpha, \lambda)$ есть интеграл от функции $f(x)$ вдоль прямой, проходящей через точку $\Phi(\lambda)$ в направлении вектора α. Для функций, имеющих финитный носитель в трехмерном пространстве, в [2] получена формула

$$f(x) = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \frac{1}{2i\pi(\Phi'(\lambda), \beta)} \frac{\partial G^+(\beta,\lambda)}{\partial\lambda} d\varphi d\Theta. \qquad (2)$$

Функция $G^+(\beta, \lambda)$ есть преобразование Фурье от функции $g^+(\alpha, \lambda)$ по переменной α, $\beta = (\cos\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)$, $\lambda = \lambda(x, \beta)$, такое что скалярное произведение (β, x) равно $(\beta, \Phi(\lambda))$ и $(\beta, \Phi'(\lambda))$ не равно нулю. Предполагается, что соответствующая λ существует для любого x, принадлежащего носителю функции $f(x)$, т. е. любая плоскость, пересекающая носитель функции, пересекает кривую $\Phi(\lambda)$ так, что знаменатель в (2) не обращается в нуль. Примером такой кривой является совокупность двух единичных окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях, если носитель лежит в единичном шаре. Построение численных алгоритмов непосредственно на основании формулы, приведенной в [2], затруднительно (см. [7, с. 201]). Дело в том, что преобразование Фурье от функции $g^+(\alpha, \lambda)$, понимаемое в обычном смысле, не существует, так как на бесконечности $g^+(\alpha, \lambda)$ имеет порядок $1/|\alpha|$. Это связано с переходом от исходных данных, определенных на поверхности $|\alpha| = 1$, к однородной функции, заданной во всем пространстве. В [2] преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций [8]. Чтобы использовать формулы типа (2) для построения алгоритмов, желательно иметь выражения для функций G^+, G и f через регулярные функции g^+ и g. В [9] дается выражение, позволяющее вычислить $G(\xi, \lambda)$, те же методы могут быть использованы для нахождения $G^+(\xi, \lambda)$. Итак, перейдем к нахождению $G^+(\xi, \lambda)$. Пусть $G^+(\xi)$ есть преобразование Фурье от $g^+(\alpha)$ (параметр λ пока опускаем):

$$G^+(\xi) = \int g^+(\alpha) e^{-2i\pi(\alpha, \xi)} d\alpha.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$G^+(\xi) = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \int_0^{\infty} \rho^2 g^+(\rho\beta) e^{-2i\pi\rho(\beta, \xi)} d\rho d\varphi d\Theta,$$

где $\beta = \beta(\varphi, \Theta) = (\cos\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\Theta \in$ $\in [0, \pi]$. Учитывая, что $g^+(\rho\beta) = (1/\rho) g^+(\beta)$, а также то, что интегрирование по углам φ и Θ соответствует интегрированию по единичной сфере, получим

$$G^+(\xi) = \int_{|\beta|=1} g^+(\beta) \left[\int_0^{\infty} \rho e^{-2i\pi\rho(\beta, \xi)} d\rho \right] d^2\beta.$$

Интеграл по ρ есть преобразование Фурье от ρ_+. Используя таблицы для преобразования Фурье обобщенных функций [8, с. 447], получим

$$G^+(\xi) = (-1/4\pi^2) \int_{|\beta|=1} g^+(\beta) [(\beta, \xi)^{-2} - i\pi\delta'(\beta, \xi)] d^2\beta. \qquad (3)$$

Для действительных функций $f(x)$ в формуле (2) нужна мнимая часть $G^+(\xi)$:

$$\mathrm{Im} G^+(\xi) = (1/4\pi) \int_{|\beta|=1} g^+(\beta) \delta'(\beta, \xi) d^2\beta.$$

Используя обобщенные функции, сосредоточенные на поверхности [8, с. 259], приходим к выражению

$$\mathrm{Im} G^+(\xi) = (1/4\pi) \int_{S(\xi)} L(\xi, D) g^+(\gamma) d\gamma.$$

Здесь $S(\xi) = (\gamma \in S^2 \mid (\xi, \gamma) = 0)$, $L(\xi, D) = \sum_{k=1}^{3} \xi_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}$ — производная по направлению ξ. Подставляя в (2) функции $g^+(\xi, \lambda)$ и $G^+(\xi, \lambda)$, зависящие от параметра λ, получаем формулы обращения, пригодные для построения численных алгоритмов.

З а м е ч а н и е. Денисюк получил формулы обращения лучевого преобразования (функции $g^{\perp}$) в R^n [9]. В его выводе и формулах нет явного использования преобразования Фурье обобщенных функций. При $n = 3$ формулы Денисюка и формулы, получаемые изложенным способом из формулы Туя, совпадают. Приведенные выше формулы позволяют вычислять преобразование Фурье лучевых данных по их значениям на единичной сфере. Представляет также интерес связь функций $G(\xi, \lambda)$ и $G^+(\xi, \lambda)$ с исходной функцией $f(x)$ и ее преобразованием Радона. В [10] получены соответствующие выражения для $G(\xi, \lambda)$. Используя те же приемы, можно показать, что

$$\mathrm{Re}(G^+(\xi, \lambda)) = C \int \frac{\check{f}(\xi, r)}{(r - (\Psi(\lambda), \xi))^2}\, dr.$$

В [3] доказано равенство

$$(S_x f)(\xi) = \int_{|a|=1} \frac{(R_1 f)(x, a)}{(a, \xi)^2}\, d^2 a,$$

здесь $d^2 a$ — усреднение по всем единичным векторам. Таким образом, получаем

$$\mathrm{Re}(G^+(\xi, \lambda)) = C \int_{|a|=1} \frac{(R_1 f)(\Phi(\lambda), a)}{(a, \xi)^2}\, d^2 a = C \int_{|a|=1} \frac{g(a, \lambda)}{(a, \xi)^2}\, d^2 a. \qquad (4)$$

Отметим, что знаменатель в (4) понимается в смысле обобщенных функций. В [10] изложены приемы использования подобных формул при построении численных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов А. А. Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР.—1961.—137, № 2.
2. Tuy H. K. An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math.—1983.—43, N 3.—P. 546.
3. Гельфанд И. М., Гончаров А. Б. Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов, по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // ДАН СССР.—1986.—290, № 5.
4. Орлов С. С. Теория трехмерной реконструкции. Оператор восстановления // Кристаллография.—1975.—20, № 4.
5. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1978.
6. Благовещенский А. С. О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. заметки.—1986.—39, № 6.
7. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции.—М.: Физматгиз, 1959.—Вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними.
9. Денисюк А. С. Исследование по интегральной геометрии в вещественном пространстве: Дис. канд. физ.-мат. наук /МГУ им. М. В. Ломоносова. Мех.-мат. фак.—М., 1991.
10. Трофимов О. Е. К задаче восстановления функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Автометрия.—1991.—№ 5.

Поступило в редакцию 14 января 1992 г.