РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1993

УДК 517

О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ ОБРАЩЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Рассматриваются задачи трехмерной томографической реконструкции. Формулы обращения, содержащие обобщенные функции, приведены к виду, позволяющему строить эффективные численные алгоритмы. Предполагается, что траектория движения источника удовлетворяет условиям Кириллова — Туя.

Успехи компьютерной томографии хорошо известны. Существуют промышленно выпускаемые томографы различного назначения. Однако проблема снижения дозы облучения при обследованиях по-прежнему остается актуальной. В томографах обычно используется от 100 до 1000 ракурсов и примерно такое же количество отсчетов на каждом направлении. Специфика используемых сигналов и необходимость исследования объектов, меняющих свою форму, например работающего сердца, делают актуальным построение алгоритмов томографической реконструкции, обеспечивающих заданное разрешение при наименьшем числе проекций.

В классической компьютерной рентгеновской томографии трехмерный объект представляется обычно в виде набора тонких срезов. Для восстановления плотности среза решается задача обращения двумерного преобразования Радона. Таким образом, восстанавливается не трехмерная функция плотности объекта, а набор двумерных функций, соответствующих сечениям объекта плоскостями. Переход собственно к плотности объекта можно осуществить, используя некоторую аппроксимацию (обычно полагают плотность постоянной внутри одного среза). Такое сведение трехмерной задачи к набору двумерных создает ряд проблем. Источник и приемник всегда имеют конечные размеры по той оси, вдоль которой производится разбиение на слои. Это приводит к тому, что вместо двумерной плотности сечения восстанавливается некоторая смазанная по соответствующей координате функция. Если мы хотим получить разрешение по этой координате больше, чем высота слоя, необходимо либо уменьшать эту высоту, либо сканировать слои с перекрытием. Оба подхода связаны с технологическими трудностями и увеличением времени обследования. При втором подходе, кроме того, увеличивается доза облучения.

При восстановлении плотности объектов по их рентгеновским проекциям более естественна другая схема, когда источник излучения движется по некоторой пространственной кривой. Каждой точке кривой соответствует конус лучей, проходящих через эту точку. Исходными данными являются данные об ослаблении излучения при прохождении через объект. Математически задача ставится как задача восстановления функции трех переменных по интегралам вдоль прямых, проходящих через заданную кривую. Решению этой задачи для различных классов функций и типов кривых посвящены работы [1—6].

В настоящее время ведутся интенсивные исследования, направленные на создание конструктивных методов решения подобных задач и разработку соответствующих алгоритмов [7, 8].

Построение численных алгоритмов трехмерной томографической реконструкции начиналось с использования алгебраических методов [9]. В этих методах предполагается, что объект разбит на ячейки фиксированной формы, внутри каждой из которых плотность исследуемого объекта постоянна. Зная координаты некоторой прямой и координаты вершин ячеек, можно составить алгебраическое линейное уравнение, соответствующее интегралу от плотности объекта вдоль заданной прямой. Тем самым задача определения плотности внутри каждой ячейки сводится к решению линейной системы уравнений. Более общим методом построения систем алгебраических уравнений является представление искомой функции в виде разложения по некоторой системе базисных функций и получение уравнений для соответствующих коэффициентов. Если нужно получить хорошее разрешение, то приходится решать систему уравнений с большим числом неизвестных, что требует значительного времени [8].

При построении эффективных алгоритмов $3D$-реконструкции естественно использовать формулы обращения. Отметим, что в классической компьютерной рентгеновской томографии в настоящее время используются алгоритмы, основанные на различных модификациях формул обращения двумерного преобразования Радона.

В трехмерном случае возможны два подхода. Первый подход заключается в сведении задачи к известным формулам обращения трехмерного преобразования Радона, которое представляет собой интегралы по плоскостям от искомой функции [7, 8, 10], второй — в непосредственном использовании формул обращения лучевых преобразований [7, 8, 11, 12]. Выбор метода зависит от свойств носителя функции и траектории движения источника.

В трехмерной томографии при выводе формул обращения существенную роль играет ограниченность носителя искомой функции. Применительно к рентгеновскому просвечиванию ограниченность носителя является естественной. Здесь следует, однако, отметить принципиальную разницу с двумерным случаем. В двумерном случае при построении численных алгоритмов восстановления объектов, имеющих конечные размеры, используются формулы обращения преобразования Радона, которые справедливы и для функций, имеющих неограниченный носитель. В трехмерном случае используется не только обратное преобразование Радона, но и формулы обращения ряда лучевых преобразований, для справедливости этих формул ограниченность носителя — необходимое условие. Существенное использование ограниченности носителя расширяет круг используемых формул обращения, но может являться и дополнительной причиной неустойчивости при больших размерах объектов.

Другая существенная характеристика ситуации в трехмерном случае — соотношение между исследуемым объектом и кривой, по которой движется источник. Определяющими здесь являются условия Кириллова — Туя [1, 2]. Основное требование этих условий заключается в том, что любая плоскость, пересекающая объект, пересекает кривую движения источника. Если объект расположен внутри единичного шара, то условиям Кириллова — Туя удовлетворяет кривая, состоящая из двух окружностей, лежащих в пересечении единичной сферы и плоскостей $z = 0$ и $x = 0$. Для трехмерного объекта этим условиям не удовлетворяет одна такая окружность. Если объект расположен внутри цилиндра, то условиям Кириллова — Туя удовлетворяет винтовая линия, охватывающая этот цилиндр. Отметим, что условия Кириллова — Туя не являются необходимыми для восстановления функции [5, 6].

Рассмотрим возможные способы построения численных алгоритмов восстановления функции, имеющей финитный носитель по интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую, при условии, что кривая удовлетворяет условиям Кириллова — Туя.

1. *Использование формулы обращения Туя и формул для преобразования Фурье однородных функций.* Для функции $f(x)$ определим ее лучевое преобразование

$$(R_1^+ f)(z, \alpha) = \int_0^\infty f(z + t\alpha)dt,$$

здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Пусть задана кривая, по которой движется источник:

$$\Phi(\lambda) = (\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \Phi_3(\lambda)),$$

параметр λ пробегает некоторый интервал Λ действительной прямой. Для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\lambda \in \Lambda$ определим функцию

$$g^+(\alpha, \lambda) = (R_1^+ f)(\Phi(\lambda), \alpha) = \int_0^\infty f(\Phi(\lambda) + t\alpha)dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_0^\infty f\left(\Phi(\lambda) + t\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)dt.$$

Функция $g^+(\alpha, \lambda)$ есть интеграл от функции $f(x)$ вдоль полупрямой, проходящей через точку $\Phi(\lambda)$ в направлении вектора α.

Для функций, имеющих финитный носитель в трехмерном пространстве, в [2] получена формула

$$f(x) = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \frac{1}{2i\pi(\Phi'(\lambda), \beta)} \frac{\partial G^+(\beta, \lambda)}{\partial \lambda} d\varphi d\Theta. \qquad (1)$$

Функция $G^+(\beta, \lambda)$ есть преобразование Фурье от функции $g^+(\alpha, \lambda)$ по переменной α, $\beta = \beta(\Theta, \varphi) = (\cos\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)$, $\lambda = \lambda(x, \beta) = \lambda(x, \Theta, \varphi)$, такое что скалярное произведение (β, x) равно $(\beta, \Phi(\lambda))$ и $(\beta, \Phi'(\lambda))$ не равно нулю. Предполагается, что такое λ существует для любого x, принадлежащего носителю функции $f(x)$, т. е. любая плоскость, пересекающая носитель функции, пересекает кривую $\Phi(\lambda)$ так, что знаменатель в (1) не обращается в нуль. В ряде работ утверждается, что формула обращения Туя не может быть использована при построении численных алгоритмов [7, 12]. Это не совсем так. Формула (1) может быть приведена к виду, позволяющему строить численные алгоритмы [11, 13].

Дело в том, что преобразование Фурье от функции $g^+(\alpha, \lambda)$, понимаемое в обычном смысле:

$$G^+(\xi, \lambda) = \int_{R^3} g^+(\alpha, \lambda) e^{2i\pi(\alpha, \xi)} d\alpha,$$

не существует, так как на бесконечности $g^+(\alpha, \lambda)$ имеет порядок $1/|\alpha|$. Это связано с переходом от исходных данных, заданных на поверхности $|\alpha| = 1$, к однородной функции, заданной во всем пространстве. Преобразование Фурье понимается здесь в смысле обобщенных функций [14]. Чтобы использовать формулы типа (1) для построения алгоритмов, желательно иметь выражения для функций G^+ и f через регулярную функцию g^+. В [11, 12] показано, что

$$G^+(\xi, \lambda) = (-1/4\pi^2) \int_{|\beta|=1} g^+(\beta, \lambda) [(\beta, \xi)^{-2} - i\pi\delta'(\beta, \xi)] d^2\beta. \qquad (2)$$

Для действительных функций $f(x)$ в формуле (1) нужна мнимая часть $G^+(\xi)$:

$$\mathrm{Im} G^+(\xi) = (i/4\pi) \int_{|\beta|=1} g^+(\beta) \delta'(\beta, \xi) d^2\beta.$$

Используя обобщенные функции, сосредоточенные на поверхности [14, с. 259], приходим к выражению

$$\mathrm{Im}G^{+}(\xi) = (i/4\pi)\int\limits_{S(\xi)} L(\xi, D)g^{+}(\gamma)d\gamma.$$

Здесь $S(\xi) = (\gamma \in S^2 \mid (\xi, \gamma) = 0)$, $L(\xi, D) = \sum\limits_{k=1}^{3} \xi_k \frac{\partial}{\partial\gamma} k$ — производная по направлению ξ. Подставляя в (1) функции $g^{+}(\xi, \lambda)$ и $G^{+}(\xi, \lambda)$, зависящие от параметра λ, получаем формулу обращения, пригодную для построения численных алгоритмов:

$$f(x) = (1/8\pi^2)\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \frac{1}{(\Phi(\lambda)', \beta)} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\int\limits_{S(\beta)} L(\beta, D)g^{+}(\gamma, \lambda)d\gamma\right] d\varphi d\Theta. \qquad (3)$$

Напомним, что $S(\beta) = (\gamma \in S^2 \mid (\beta, \gamma) = 0)$, $L(\beta, D) = \sum\limits_{k=1}^{3} \beta_k \frac{\partial}{\partial\gamma} k$ — производная по направлению β, $\beta = (\cos\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)$, $\lambda = \lambda(x, \beta)$ такое, что скалярное произведение (β, x) равно $(\beta, \Phi(\lambda))$. В формуле (3) используются интегралы по сферам от производной регулярной функции $g^{+}(\gamma, \lambda)$, по предположению для любых x и β существует $\lambda(x, \beta)$ такое, что знаменатель не обращается в нуль (две взаимно перпендикулярные окружности удовлетворяют этому условию). Таким образом, в формуле (3) используются стандартные операции с регулярными функциями, и эта формула может быть использована для построения численных алгоритмов.

Сделаем несколько замечаний. Формула (3) другим способом, без явного использования обобщенных функций, получена в [15] для n-мерного пространства. Другие методы построения численных алгоритмов в условиях, когда выполняются условия Кириллова — Туя, могут основываться на результатах работ [10] или [16]. Отметим также, что эквивалентность формул обращения означает их совпадение в пределе. На дискретных сетках различные формулы могут давать существенно различное разрешение. Поэтому весьма желательно иметь структуру возможных формул обращения и библиотеки соответствующих программ. Это позволит использовать математическое моделирование для подбора метода, в наибольшей степени учитывающего специфику конкретной задачи.

Выше обобщенные функции использовались лишь на этапе приведения формулы обращения к виду, позволяющему строить численные алгоритмы. Возможно и непосредственное использование формул, содержащих обобщенные функции при построении численных алгоритмов. Для двумерного случая соответствующие приемы изложены в [17, 18], ниже будет рассмотрен случай $3D$-реконструкции.

2. *Восстановление интегралов по всем прямым, пересекающим объект, с последующим использованием формул обращения для преобразования Радона.* Приведенные выше формулы позволяют непосредственно вычислить значения искомой функции. В рассматриваемой задаче естественным является и несколько другой подход. По интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую, можно найти значения интегралов вдоль произвольных прямых, пересекающих объект. После этого можно либо «насобирать» интегралы по плоскостям и использовать формулы обращения в R^3, являющиеся локальными, либо рассмотреть все прямые, лежащие в некоторой плоскости, и решить задачу обращения двумерного преобразования Радона для этой плоскости. В последнем случае можно использовать имеющиеся алгоритмы и программы.

В некоторых ситуациях при определении лучевого преобразования используется функция

$$(R_1f)(z,\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z+t\alpha)dt,$$

в отличие от $R_1^+ f(z,\alpha)$ здесь интегрирование ведется по всей прямой.

Пусть $\widetilde{R}_1 f(z,\eta)$ — преобразование Фурье от $R_1 f(z,\alpha)$ по переменной α при фиксированном z. В [19] показано, что если функция f имеет ограниченный носитель и непрерывную вторую производную и $R_1 f(z,\alpha)$ известна для всех $\alpha \in S^2$ и для всех точек z, находящихся на некоторой кривой C, лежащей вне носителя функции f, то $R_1 f(z,\alpha)$ может быть найдена для всех точек x, принадлежащих выпуклой оболочке кривой C по формуле

$$R_1 f(x,\alpha) = \pi(2\pi)^{-3/2} \int\limits_{S^2\cap\alpha^{\perp}} \widetilde{R}_1 f(B(x,\eta),\eta)d\eta, \tag{4}$$

здесь $B(x,\eta)$ — точка пересечения кривой C с плоскостью, проходящей через точку x и перпендикулярной вектору η. Напомним, что $R_1 f(z,\alpha)$ однородна по α, следовательно, при фиксированном z определяется своими значениями в точках α, принадлежащих единичной сфере S^2. Если кривая и объект удовлетворяют условиям Кириллова — Туя, т. е. любая плоскость, пересекающая объект, пересекает кривую движения источника, и если объект содержится в выпуклой оболочке кривой C, то по формуле (4) можно найти интеграл вдоль любой прямой, пересекающей объект. Напомним, что выпуклая оболочка кривой C состоит из всех точек всех отрезков, оба конца которых лежат на кривой C. Если, например, кривая C состоит из двух единичных окружностей, лежащих в плоскостях $x = 0$ и $z = 0$, то выпуклой оболочкой является единичный шар. В формуле (4) преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций. Для того чтобы сделать эту формулу пригодной для построения численных алгоритмов, желательно свести формулу (4) к операциям с регулярными функциями. Справедливо следующее равенство [11, 20]:

$$\widetilde{R}_1 f(z,\eta) = (-1/4\pi^2) \int\limits_{|\beta|=1} R_1 f(z,\beta)(\beta,\eta)^{-2} d^2\beta, \tag{5}$$

здесь $(\beta,\eta)^{-2}$ — обобщенная функция, для построения численных алгоритмов нужно использовать ее регуляризацию. Формулу (5) удобно переписать в виде

$$\widetilde{R}_1 f(z,\eta) = -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \frac{R_1 f(z,\beta)}{(\beta,\eta)^2} d\varphi d\Theta, \tag{6}$$

где $\beta = \beta(\varphi,\Theta) = (\cos\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)$. Формула (6) приобретает наиболее простой вид при $\eta = (0, 0,1)$.

При произвольном η нужно перейти к сферической системе координат, в которой полюсом является точка η. Через $q(\eta,\varphi,\Theta,z)$ будем обозначать функцию $R_1 f(z,\varphi,\Theta)$ в такой системе координат, а через $-2\pi Q(\eta,\varphi,z)$ ее интеграл по Θ, т. е. интеграл от функции $R_1 f(z,\varphi,\Theta)$ по окружности, лежащей на единичной сфере и в плоскости, перпендикулярной вектору η и отстоящей от начала координат на расстояние $\sin\varphi$. В указанных обозначениях формула (6) приводится к виду

$$\widetilde{R}_1 f(z,\eta) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi Q(\eta,\varphi,z)}{(\sin\varphi)^2} d\varphi. \tag{7}$$

Каноническая регуляризация функции $1/(\sin\varphi)^2$ построена в [14, с. 90]:

$$\left(\frac{1}{(\sin\varphi)^2}\alpha(\varphi)\right) = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\alpha(\varphi)+\alpha(-\varphi)}{(\sin\varphi)^2} - \frac{2\alpha(0)}{\varphi^2}\right)d\varphi. \tag{8}$$

Так как $Q(\eta, \varphi, z) = Q(\eta, -\varphi, \zeta)$, равенство (7) можно записать в виде

$$\widetilde{R}_1 f(z, \eta) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\varphi Q(\eta, \varphi, z)}{(\sin\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Используя (8), получаем

$$\widetilde{R}_1 f(z, \eta) = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos\varphi Q(\eta, \varphi, z)}{(\sin\varphi)^2} - \frac{Q(\eta, 0, z)}{\varphi^2}\right]d\varphi. \tag{9}$$

Различие между равенствами (7) и (9) заключается в том, что в (7) интеграл понимается в смысле обобщенных функций, а интеграл в (9) для достаточно гладких функций Q сходится в обычном смысле, что позволяет его вычислять по дискретным данным, используя соответствующую аппроксимацию. Итак, формула (9) позволяет строить численные алгоритмы для вычисления функции, используемой в формуле (4), для нахождения интегралов вдоль прямых, проходящих через точки, принадлежащие выпуклой оболочке кривой, по которой движется источник. Если кривая и объект удовлетворяют условиям Кириллова — Туя, то можно найти интегралы вдоль всех прямых, пересекающих объект, а затем либо «насобирать» интегралы по плоскостям и использовать обратное преобразование Радона в R^3, либо восстановить плотность объекта в сечении его фиксированной плоскостью, используя обратное преобразование Радона в R^2.

Вопросы построения численных алгоритмов $3D$-реконструкции для траекторий источника, не удовлетворяющих условиям Кириллова — Туя, рассмотрены в [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кириллов А. А.** Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР.—1961.—137, № 2.
2. **Tuy H. K.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math.—1983.—43, N 3.—P. 546.
3. **Гельфанд И. М., Гончаров А. Б.** Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // ДАН СССР.—1986.—290, № 5.
4. **Орлов С. С.** Теория трехмерной реконструкции. Оператор восстановления // Кристаллография.—1975.—20, № 4.
5. **Аниконов Ю. Е.** Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1978.
6. **Благовещенский А. С.** О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. заметки.—1986.—39, № 6.
7. **Smith B. D.** Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review // Opt. Eng.—1990.—29, N 5.—P. 524.
8. **Rizo P., Grangeat P., Sire P. et al.** Comparison of two three-dimensional x-ray cone-beam-reconstruction algorithms with circular source trajectories // JOSA. Ser. A.—1991.—8, N 10.—P. 1639.
9. **Хермен Г.** Восстановление изображений по проекциям.—М.: Мир, 1983.
10. **Grangeat P.** Analyse d'une systéme d'imagerie $3D$ par reconstruction á partir de radiographies X en géométrie conique: These de doctorat.—Grenoble, 1987.
11. **Трофимов О. Е.** К задаче восстановления функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Автометрия.—1991.—№ 5.
12. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.
13. **Трофимов О. Е.** К задаче восстановления функции по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Методы решения условно-корректных задач.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1991.

14. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции.—М.: Физматгиз, 1959.—Вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними.
15. Денисюк А. С. Исследования по интегральной геометрии в вещественном пространстве: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ им. М. В. Ломоносова. Мех.-мат. фак., 1991.
16. Гельфанд И. М., Гончаров А. Б. Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов, по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // ДАН СССР.—1986.—290, № 5.
17. Жирнов В. Т., Смирнов К. К., Трофимов О. Е. О численных методах решения задач томографии // Методы и средства обработки изображений.—Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1982.
18. Трофимов О. Е., Тюренкова Л. В. Об одном способе численного восстановления изображения по многоракурсной томограмме.—Новосибирск, 1989.—(Препр. ИАиЭ СО АН СССР; 440).
19. Finch D. V. Cone-beam reconstruction with sources on a curve // SIAM J. Appl. Math.—1985.—45, N 4.—P. 665.
20. Семянистый В. И. Однородные функции и некоторые задачи интегральной геометрии в пространствах постоянной кривизны // ДАН СССР.—1961.—136, № 2.
21. Трофимов О. Е. О численных алгоритмах трехмерной томографической реконструкции // Автометрия.—1992.—№ 3.

Поступила в редакцию 7 декабря 1992 г.