

УДК 681.3.058

Е. В. Рабинович, А. А. Рубан, М. П. Цапенко, Г. С. Шефель

(Новосибирск)

## АДАПТИВНАЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Предложены два метода адаптивной кусочно-линейной аппроксимации функции одной переменной, предназначенные для сжатия измерительных данных. Приводятся результаты тестирования.

Проблема компактного представления информации возникает при получении, обработке, передаче, хранении больших объемов измерительных данных.

Пусть на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция  $f(x)$  задана  $N + 1$  отсчетами:  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$ , причем  $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N$ . Используя принцип адаптивной аппроксимации по длине участка приближения\*, укажем методы построения аппроксимирующей кусочно-линейной функции  $g(x)$ , которая однозначно задается на отрезке  $[\alpha, \beta]$  с помощью  $M$  ( $M < N$ ) числовых параметров и близка к функции  $f(x)$  в равномерной норме (т. е.  $\max_i |f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon$ , где  $\epsilon < 0$  — наперед заданное фиксированное число). Заметим, что число  $M$  зависит от  $f(x), \epsilon, N$ .

Компактность представления функции  $f(x)$ , заданной в  $N$  узлах, обеспечивается тем, что она полностью описывается  $M$  числовыми значениями. Эффективность применения методов можно характеризовать коэффициентом сжатия  $r(\epsilon) = N/M$ .

Для удобства будем считать, что система координат изменена таким образом, что  $x_k = k, k = 0, 1, \dots, N$ .

На отрезке  $[0, k_{j+1})$  строим аппроксимирующую функцию

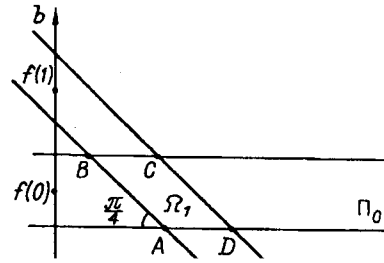
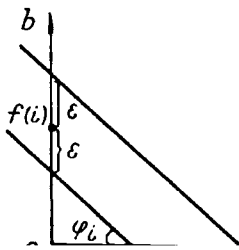
$$g(x) = \{g_j(x) = a_j x + b_j, x \in [k_j, k_{j+1}), j = 0, 1, \dots, J\},$$

такую что  $\max_{0 \leq i \leq N} |f(i) - g(i)| < \epsilon$ . Так как линейная функция  $g_j(x) = a_j x + b_j$  восстанавливается на  $[k_j, k_{j+1})$  по двум числовым параметрам  $a_j$  и  $b_j$ , то на этом отрезке коэффициент сжатия равен  $(k_{j+1} - k_j)/2$ .

На первом этапе определяется отрезок  $[0, k_1)$  максимальной длины, на котором существует линейная аппроксимирующая функция (функция  $g_0(x) = a_0 x + b_0$ , такая что  $|f(i) - g_0(i)| < \epsilon, i = 0, 1, \dots, k_1$ ).

Рассмотрим плоскость  $Oab$ . Неравенство  $|f(i) - (ai + b)| < \epsilon$  эквивалентно системе неравенств:

\* Кот М. Г., Носков Ю. В., Рабинович Е. В. и др. Методы адаптивной аппроксимации в измерительных системах // Измерительные информационные системы: Тез. докл. Всесоюз. конф. — Ульяновск: ИПК УЦМ, 1989. — Ч. 1.



$$ai + b < f(i) + \varepsilon,$$

$$ai + b > f(i) - \varepsilon,$$

решением которой в плоскости  $Oab$  будет полоса  $\Pi_i$  (рис. 1).

Для угла наклона полосы  $\Pi_i$  к отрицательной полуоси  $Ox$  имеем  $\operatorname{tg} \varphi_i = i$ . Пусть  $\Omega_k = \Pi_0 \cap \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_k$  — пересечение первых  $k + 1$  полос  $\Pi_i$ . Тогда множество точек  $(a, b) \in \Omega_k$  определяет всю совокупность прямых  $y = ax + b$ , аппроксимирующих функцию  $f(x)$ , на участке  $[0, k]$  с заданной погрешностью  $\varepsilon$ .

Пусть  $k_1$  обладает тем свойством, что пересечение первых  $k_1 - 1$  полос  $\Pi_i$  непусто, а пересечение первых  $k_1$  полос пусто. Тогда в качестве первого участка приближения выбирается отрезок максимально возможной длины  $[0, k_1)$ , для которого существует линейная аппроксимирующая функция. В качестве коэффициентов линейной аппроксимации берется любая пара  $(a, b)$  из пересечения первых  $k_1 - 1$  полос. Таким образом, построена  $g_0(x)$ -аппроксимирующая функция на первом участке  $[0, k_1)$ . Для определения  $g(x)$  на других участках  $([k_1, k_2), [k_2, k_3), \dots)$  порядок действий аналогичен.

На практике точно решить задачу о пересечении  $k$  полос затруднительно, поэтому она решается приближенно.

Рассмотрим  $\Omega_1$  — пересечение полос  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$  (рис. 2). Точку  $(a, b)$ , определяющую искомую аппроксимирующую прямую, будем искать не в множестве  $\Omega_1$ , а в множестве  $\Omega_1^*$ , составленном из  $2s + 1$  горизонтальных отрезков  $(C_l, D_l)$  с вертикальным шагом  $\varepsilon/s$  (рис. 3).

Координаты по  $a$  и  $b$  левых концов отрезков с номером  $l$  находятся по формулам:

$$a(C_l) = f(1) - f(0) - l\varepsilon/s,$$

$$b(C_l) = f(0) + \varepsilon(l/s - 1).$$

Координаты правых концов — по формулам:

$$a(D_l) = f(1) - f(0) + \varepsilon(2 - l/s),$$

$$b(D_l) = f(0) + \varepsilon(l/s - 1).$$

Отметим, что для любой прямой, определяемой точкой  $(a, b)$  из области  $\Omega_1$ , существует прямая, определяемая точкой  $(a, b^*)$  из  $\Omega_1^*$ , такая что  $|b - b^*| < \varepsilon/s$ . Поэтому в любой точке  $x$  значения

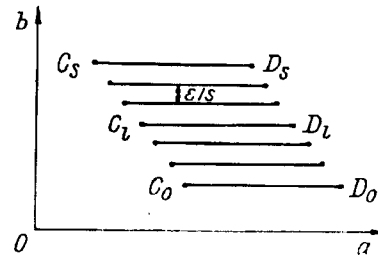


Рис. 3

функций  $ax + b$  и  $ax + b^*$  различаются не более чем на  $\epsilon/s$ . При приближенном решении задачи не ищется прямая  $y = ax + b$ , аппроксимирующая заданную функцию на максимально длинном отрезке, а строится прямая  $y^* = ax + b^*$ , такая что  $|y(i) - y^*(i)| < \epsilon/s$  для всех  $i$ . Если на отрезке  $[0, k_1)$  существует решение  $y = ax + b$  задачи с погрешностью  $\epsilon_1 = \epsilon - \epsilon/s$ , то на этом же отрезке имеется решение  $y^*$  задачи с погрешностью  $\epsilon$ . Это решение можно найти предложенным методом. С целью минимизации вычислительных затрат следует выбирать  $3 < s < 10$ .

На шаге  $i$  находится пересечение отрезков  $(C_i D_i)$  с полосой  $\Pi_i$  (пересечение этих отрезков с предыдущими полосами, имеющими номера 2, 3, ...,  $i - 1$ , считается определенным ранее). Для этого определяются координаты точек пересечения прямых  $C_i D_i$  с границами  $i$ -й полосы. Левую точку пересечения обозначим  $L_i$ , правую —  $R_i$  (рис. 4). Координаты по  $a$  и  $b$  точек  $L_i$  и  $R_i$  находятся по формулам:

$$a(L_i) = (f(i) - f(0) - \epsilon l/s)/i,$$

$$b(L_i) = f(0) + \epsilon(l/s - 1),$$

$$a(R_i) = (f(i) - f(0) + \epsilon(2 - l/s))/i,$$

$$b(R_i) = f(0) + \epsilon(l/s - 1).$$

В качестве нового отрезка берется пересечение старого отрезка  $(C_i D_i)$  с  $\Pi_i$  (на рис. 4 он представляется отрезком  $(L_i D_i)$ ). Обозначим этот отрезок снова  $(C_i D_i)$ . Процесс продолжается до тех пор, пока пересечение очередной полосы с множеством отрезков  $(C_i D_i)$ ,  $l = 0, 1, \dots, 2s$ , не станет пустым.

Координаты точки  $C_i$  из последнего непустого множества  $\Omega_{k_1}^*$  являются параметрами искомой аппроксимирующей прямой  $y = a_0 x + b_0$  на  $[0, k_1)$ . На остальных участках  $[k_j, k_{j+1})$  аппроксимирующая линейная функция  $g_j(x) = a_j x + b_j$  находится аналогично.

Таким образом, осуществлено построение аппроксимирующей кусочно-линейной функции  $g(x)$ . При переходе от функции  $f(x)$  к  $g(x)$  коэффициент сжатия  $r(\epsilon) = N/3(J + 1)$ . Такой знаменатель определяется тем, что  $g(x)$  однозначно восстанавливается на  $[\alpha, \beta]$  при помощи  $2(J + 1)$  параметров  $a_j, b_j$  линейных аппроксимирующих функций  $g_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ , и длинами «кусков» аппроксимации.

Заметим, что в описанном методе представления линейных функций на соседних участках аппроксимации  $[k_j, k_{j+1})$  и  $[k_{j+1}, k_{j+2})$  никак не связаны между собой.

Рассмотрим адаптивную аппроксимацию линейными функциями с использованием условия сопряжения. Строится непрерывная аппроксимирующая функция

$$g(x) = \{g_j(x) = a_j(x - k_j) + b_j, x \in [k_j, k_{j+1}), j = 0, 1, \dots, J\},$$

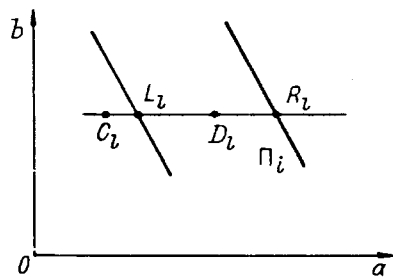


Рис. 4

такая что  $f(0) = g(0)$  и  $\max_{1 \leq i \leq N} |f(i) - g(i)| < \epsilon$ .

Непрерывность функции  $g(x)$  обеспечивается условием сопряжения  $g_j(k_{j+1}) = g_{j+1}(k_{j+1})$ , которое дает возможность восстановить  $g_j(x)$  по одному параметру  $a_j$ .

Рассмотрим первый отрезок аппроксимации. Совокупность условий  $f(0) = g(0)$  и  $|f(l) - g_0(l)| < \epsilon$  эквивалентна тому, что угловой коэффициент  $a_0$  ап-

проксимирующей прямой  $g_0(x) = a_0x + f(0)$  лежит в интервале  $[L_l, R_l]$ , где  $L_l = (f(l) - f(0) - \epsilon)/l$ ,  $R_l = (f(0) - f(0) + \epsilon)/\epsilon$ . Соответствующий пучок прямых изображен на рис. 5. Пусть  $k_1$  — наибольшее из натуральных чисел  $l = 2, 3, \dots$ , для которых множество  $\Lambda_l = [L_1, R_1] \cap [L_2, R_2] \cap \dots \cap [L_l, R_l]$  непусто. Тогда  $[0, k_1]$  — отрезок максимальной целочисленной длины, на котором существует линейная аппроксимирующая функция  $g_0(x) = a_0x + f(0)$ , такая что  $|f(i) - g(i)| < \epsilon, i = 1, 2, \dots, k_1$ .

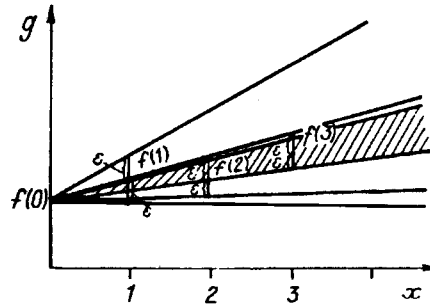


Рис. 5

В качестве коэффициента  $a_0$  можно взять любое число из множества  $\Lambda_{k_1}$ . На следующем этапе построения  $g(x)$  определяется отрезок  $[k_1, k_2]$  максимальной длины, для которого существует функция  $g_1(x) = a_1(x - k_1) + f(k_1)$ , такая что  $|f(i) - g_1(i)| < \epsilon, i = k_1 + 1, \dots, k_2$ , и т. д.

Отметим, что полученная аппроксимирующая функция  $g(x)$  однозначно восстанавливается по значениям  $f(0), a_0, a_1, a_2, \dots, a_j, k_1, k_2, \dots, k_{j+1}$ , следовательно, при переходе от функции  $f(x)$  к  $g(x)$  коэффициент сжатия  $r(\epsilon) = N/(2(J + 1) + 1)$ .

В качестве тестовых рассматривались функции  $\sin(ax^2), \sin(ax^3), e^{-\lambda x} \sin(ax)$  (параметры  $a$  и  $\lambda$  подбирались таким образом, чтобы функции на отрезке  $[0, 500]$  делали 15 колебаний и у затухающей синусоиды  $e^{-\lambda x} \sin(ax)$  амплитуда уменьшалась в  $e$  раз за четыре колебания). При заданной погрешности  $\epsilon = 0,05$  получены следующие результаты. Тестирование первого метода с помощью функций  $\sin(ax^2), \sin(ax^3)$ , показало, что коэффициент сжатия  $r(\epsilon) \approx 4$ , при этом потребовалось построить около 40 отрезков аппроксимации, для второго алгоритма —  $r(\epsilon) \approx 5,5$  и 45 отрезков аппроксимации. Для затухающей синусоиды  $e^{-\lambda x} \sin(ax)$  тестирование показало, что коэффициенты сжатия соответственно приблизительно равны 6 и 8; получено 28 и 30 участков аппроксимации.

Предложенные методы адаптивной кусочно-линейной аппроксимации функций одной переменной обеспечивают достаточно большой коэффициент сжатия для широкого класса функций.

Поступила в редакцию 30 октября 1992 г.