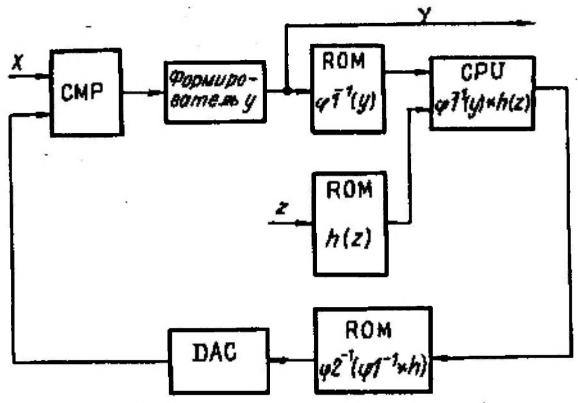

Рис. 3

ное использование таблиц обратных функций $\varphi 2^{-1}(\varphi 1^{-1}(y) * h(z))$, $\varphi 1^{-1}(y)$ и $h(z)$. Здесь символ * обозначает бинарную операцию, обратную к !*, а блок CPU — устройство, ее реализующее. Алгоритм функционирования структуры (см. рис. 3) аналогичен предыдущим. Отличие заключается в более сложном формировании уравновешивающего напряжения.

В заключение следует отметить, что табличные устройства φ-преобразования и аналого-цифровые процессоры, построенные на их основе, обеспечивают алгоритмическое, временное и аппаратное совмещения процессов измерения и вычисления. Их можно рекомендовать для системного использования в условиях работ в реальном времени, а также для совершенствования структур измерительных средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович В. И. Функциональное аналого-цифровое преобразование, основанное на формировании обратной функции // Измерение, контроль, автоматизация.—1983.—№ 2.
2. Смолов В. Б. Функциональные преобразователи информации.—Л.: Энергоатомиздат, 1981.
3. Рабинович В. И. Алгоритмы поразрядного вычисления и измерения функций одного аргумента // Автометрия.—1982.—№ 2.
4. Рабинович В. И., Фихман М. И. Аналого-цифровой процессор для выполнения мультипликативных операций // Измерительно-вычислительные системы и их элементы (алгоритмы и структуры).—Новосибирск, 1987.
5. Рабинович Е. В. Использование табличного представления функций для аналого-цифрового преобразования функций двух переменных // Цифровая информационно-измерительная техника.—Пенза, 1989.

Поступила в редакцию 22 сентября 1992 г.

УДК 681.3.058

Е. В. Рабинович

(Новосибирск)

КОМПАКТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ДЛЯ ТАБУЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ (МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ)

Рассматривается конструктивный и универсальный метод представления наиболее сложных для табулирования функций, позволяющий осуществлять таблично-операционное воспроизведение таких функций.

На пути реализации таблично-операционного воспроизведения функций нескольких переменных и функций высокоразрядных переменных стоит чрезмерно большая емкость памяти, необходимая для табулирования этих функций [1, 2].

Емкость памяти, необходимая для табулирования функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, зависит от разрядности значений функции $S(f)$ и адресного пространства (количества ячеек) таблицы $A(f)$. $S(f)$ выбирается, исходя из заданной точности представления функции, а $A(f)$ определяется количеством всех возможных значений аргументов функции f. При табулировании функции с помощью запоминающих устройств аргументы представляются двоично-позиционными числами с запятой, фиксированной перед старшим разрядом, т. е.

$$x_i \in R_S = \left\{x \in R: |x| = \sum_{j=1}^{S(x)} w_{xj} 2^{-j},\ w_{xj} \in \{0, 1\}\right\}, \quad i = 1, ..., n,$$

где R — множество действительных чисел. Коды x_i являются адресами ячеек в таблице.

Адресное пространство таблицы функции f равно произведению чисел, которые обозначают количество кодов каждого аргумента

$$A_t(f) = 2^{\sum_{i=1}^{n} S(x_i)}. \tag{1}$$

Соотношение (1) показывает, что наибольшую трудность для табулирования представляют функции нескольких высокоразрядных аргументов.

Суть метода расщепления заключается в представлении частичной суммы кратного степенного ряда, аппроксимирующей функцию нескольких переменных, в виде суммы вспомогательных многочленов одной переменной. Возможность такого представления опирается на известную теорему Колмогорова — Арнольда, утверждающую, что всякая непрерывная функция n переменных (а следовательно, и всякая аналитическая функция) может быть представлена в виде суперпозиции непрерывных функций одной переменной и операции сложения. Данное представление обеспечивает сокращение адресного пространства таблицы функции нескольких переменных, так как в этом случае оно образуется из суммы адресных пространств таблиц вспомогательных многочленов.

Метод расщепления обладает высокой степенью универсальности, так как он применим для широкого класса функций, описываемых степенным рядом, приближающим функцию с заданной точностью некоторой своей частичной суммой. Даже для экспериментально полученных функций, имеющих только табличное представление в дискретно заданных точках, можно подобрать соответствующий интерполяционный многочлен, также являющийся степенным рядом. Указанный класс функций даже шире, чем класс аналитических функций, так как сходимость аппроксимирующего степенного ряда не является обязательной; достаточно того, чтобы соответствующая частичная сумма ряда приближала функцию с заданной точностью на интервале аппроксимации.

Отметим, что сложность вычисления коэффициентов такой частичной суммы ряда при таблично-операционном воспроизведении аппроксимируемой функции практически не имеет значения, так как вычисления производятся заранее с привлечением производительных и обладающих должной точностью средств вычислительной техники.

Единственным требованием, предъявляемым к степенному ряду, выбранному для таблично-операционного воспроизведения, является обеспечение заданной точности приближения минимальным количеством членов, так как, согласно методу расщепления функций, меньшему числу коэффициентов соответствует меньшая емкость таблиц.

Рассматриваемый метод является конструктивным в силу того, что для всех функций определенного выше класса дает конкретный алгоритм расщепления.

Обратимся к математическим аспектам метода расщепления функции двух переменных $f(x_1, x_2)$.

Пусть (L, M)-я частичная сумма ряда

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=0}^{M} a_{lm} x_1^l x_2^m \tag{2}$$

аппроксимирует функцию $f(x_1, x_2)$ с погрешностью, не превышающей ε. Адресное пространство таблицы $T(f, \varepsilon)$ функции f равно $A_t(f) = 2^{2S(x)}$, где $S(x)$ — разрядность переменных x_1, x_2.

Трудности табулирования частичной суммы степенного ряда, приближающей с заданной точностью функцию f, связаны в основном с размером адресного пространства $A_t(f)$ таблицы функции. В данном случае адресное пространство таблицы тесно связано с множеством значений переменных, на котором определена функция f. Это множество $D_x(f)$ является областью определения ряда, аппроксимирующего функцию f. Поэтому способ представления частичной суммы степенного ряда в виде, обеспечивающем сужение области определения, обеспечивает и сокращение адресного пространства таблицы функции f. Область определения функции $D_x(f)$ можно представить в виде множества точек (рис. 1, *a*), лежащих в узлах квадратной сетки единичной площади. Так как переменные $x_1, x_2 \in R_S$, то длина стороны ячейки сетки равна $2^{-S(x)}$. Количество элементов данного множества равно $2^{2S(x)}$, что совпадает с $A_t(f)$.

Покажем, что, представив сумму (1) в виде суммы вспомогательных многочленов $p_j(z_j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, каждый из которых образован собственной переменной z_j, можно сузить исходную область определения $D_x(f)$ и сократить адресное пространство $A_t(f)$.

Положим для всех $l = 0, 1, \ldots, N$, $m = 0, 1, \ldots, N$, $N = L + M$

$$b_{km} = \begin{cases} a_{l+m,m} & \text{при } l + m \le L, \\ 0 & \text{при } l + m > L \end{cases}$$

и преобразуем (2):

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{k} b_{mk} x_1^{k-m} x_2^m. \tag{3}$$

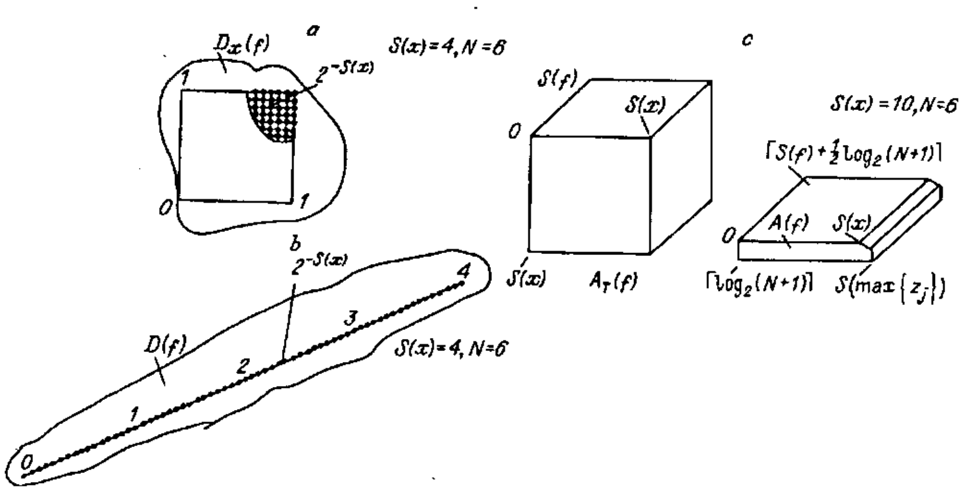

Рис. 1

Выражение (3) представляет собой сумму однородных многочленов двух переменных степеней от нулевой до N-й. Каждый из однородных многочленов можно представить суммой биномов соответствующей степени:

$$\sum_{m=0}^{k} b_{km} x_1^{k-m} x_2^{m} = \sum_{j=0}^{k} c_{kj} (\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2)^k, \tag{4}$$

где α_{j1} и α_{j2} — константы, вид которых будет уточнен ниже. Выражение (4) справедливо вследствие существования единственного решения системы уравнений:

$$\sum_{m=0}^{k} c_{kj} \alpha_{j1}^{k-m} \alpha_{j2}^{m} \binom{k}{m} = b_{km}, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Единственность решения обеспечивается выполнением условия

$$\alpha_{m2}\alpha_{j1} \le \alpha_{m1}\alpha_{j2}, \quad j \le m, \quad j, m = 0, 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Для того чтобы получить все коэффициенты c_{kj}, необходимо найти для всех $k = 0, 1, \ldots, N$ решения систем уравнений, аналогичных вышеприведенной.

Подставим (4) в (3), получим

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} c_{kj} (\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2)^k = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=j}^{N} c_{kj} (\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2)^k = \sum_{j=0}^{N} p_j(z_j).$$

Итак,

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=0}^{M} a_{lm} x_1^l x_2^m = \sum_{j=0}^{N} p_j(z_j). \tag{6}$$

Область определения каждого многочлена

$$p_j(z_j) = \sum_{k=j}^{N} c_{kj} (\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2)^k, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \tag{7}$$

можно представить в виде совокупности точек, лежащих в интервале $[0, (\alpha_{j1} + \alpha_{j2})(1 - 2^{-S(x)})]$. Следовательно, область определения суммы (6) может быть представлена в виде множества точек, лежащих на отрезке прямой, длина которого численно равна $\max\limits_{0 \le j \le N} \{\alpha_{j1} + \alpha_{j2}\}$.

Для большей наглядности сравнения с $D_x(f)$ сохраним дискретность, равную $2^{-S(x)}$. Это возможно, если значения α_{j1} и α_{j2} выбрать с учетом условия (5) из ряда наименьших положительных целых чисел.

На рис. 1, *б* изображено множество $D(f)$ для иллюстративного количества вспомогательных многочленов $N = 6$, при этом $\max\limits_{0 \le j \le N} \{\alpha_{j1} + \alpha_{j2}\} = 4$. Значения α_{j1} и α_{j2} представлены в таблице.

j	α_{j1}	α_{j2}
0	0	1
1	1	0
2	1	1
3	1	2
4	1	3
5	2	1
6	3	1

Таким образом, формула (6) дает возможность сузить область определения функции $f(x_1, x_2)$ в $2^{S(x)} / \max\limits_{0 \le j \le N} \{\alpha_{j1} + \alpha_{j2}\}$ раз.

Указанное сужение тем больше, чем выше разрядность переменных x_1, x_2 и лучше сходимость суммы (2). Сходимость суммы характеризуется количеством слагаемых, необходимых для заданного приближения. Чем меньше слагаемых, тем меньше величины N и $\max\limits_{0 \le j \le N} \{\alpha_{j1} + \alpha_{j2}\}$.

Суммарное адресное пространство таблиц многочленов p_j, необходимых для расщепления функции $f(x_1, x_2)$ согласно (6), равно

$$A(f) = \sum_{j=0}^{N} 2^{S(x) + \Delta S_j},$$

где $\Delta S_j = \lceil |\log_2(\alpha_{j1} + \alpha_{j2})| \rceil$, а $\lceil x \rceil$ обозначает целое, большее или равное действительному числу x.

Очевидно, что выбор значений констант α_{j1} и α_{j2} влияет на величину $A(f)$. Выбирая с учетом условия (5) значения α_{j1} и α_{j2} из ряда наименьших положительных целых чисел, удается минимизировать ΔS_j.

Выигрыш в адресном пространстве таблиц при табулировании расщепленной функции $f(x_1, x_2)$ по сравнению с непосредственным табулированием этой функции равен

$$G(S(x), N) = 2^{S(x)} \Big/ \sum_{j=0}^{N} 2^{\Delta S_j}.$$

Таким образом, применение расщепления функции $f(x_1, x_2)$ позволяет значительно (так как обычно $S(x) \gg \Delta S_j$) сократить адресное пространство таблиц для воспроизведения данной функции и тем самым уменьшить емкость запоминающего устройства $C(f)$.

На рис. 1, c условно изображены таблицы, необходимые для табличного и таблично-операционного воспроизведения функции $f(x_1, x_2)$. Емкость таблиц представляется на рисунке объемом, заключенным внутри приведенных в логарифмическом масштабе пространственных фигур.

Формула (5) легко обобщается на случай воспроизведения функции n переменных. Если найден кратный ряд, определенная частичная сумма которого приближает с заданной точностью функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то можно осуществить расщепление функции f. При этом вспомогательные многочлены, расщепляющие f, примут вид

$$p_j(z_j) = \sum_{k=j}^{N} c_{kj} z_j^k, \quad j = 0, 1, ..., N2 - 1,$$

где N — максимальная степень однородного многочлена n переменных, участвующего в представлении (аналогичном (3)) функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$N2 = \prod_{i=1}^{n-1} (N + i)/i, \quad z_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_1.$$

Коэффициенты c_{kj} находятся при решении соответствующей системы уравнений с учетом ограничений (аналогичных (5)), накладываемых на значения констант α_{ji}. В данной ситуации выигрыш в адресном пространстве, по сравнению с непосредственно табличным воспроизведением функции n переменных, становится весьма значительным:

$$G(S(x), N, n) = 2^{(n-1)S(x)} \Big/ \sum_{j=0}^{N2-1} 2^{\Delta S_j},$$

где

$$\Delta S_j = \left\lceil \left| \log_2 \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji} \right| \right\rceil,$$

может достигать больших размеров уже при $n > 3$ и слабой сходимости частичной суммы, аппроксимирующей воспроизводимую функцию. Например, при $N = 6$, $n = 3$, $S(x) = 12$ выигрыш $G(12, 6, 3) = 138654{,}6$, а $A(f) = 495616$ слов.

Сегментация высокоразрядного аргумента x функции $f(x)$ позволяет применить метод расщепления для сокращения адресного пространства таблиц, необходимых для таблично-операционного воспроизведения данной функции.

Представим высокоразрядный аргумент $x \in R_S$ в виде

$$x = x_1 + 2^{-\lceil S(x)/2 \rceil} x_2, \quad x_1, x_2 \in R_{S/2}, \tag{8}$$

где x_1 и x_2 — сегменты.

Пусть функция $f(x)$ аппроксимируется с заданной точностью N-й частичной суммой степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k. \tag{9}$$

Подставим (8) в (9) и, используя определение бинома, запишем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} 2^{-\lceil mS(x)/2 \rceil} x_1^{k-m} x_2^m.$$

Обозначим

$$b_{km} = \binom{k}{m} 2^{-\lceil mS(x)/2 \rceil} a_k, \tag{10}$$

получим выражение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{k} b_{km} x_1^{k-m} x_2,$$

правая часть которого совпадает с (3). Поэтому все выкладки условия и рассуждения, которые были проведены выше, при рассмотрении расщепления функции двух переменных справедливы и для функции одной, но высокоразрядной переменной x, подвергнутой сегментации. Это означает, что для функции $f(x)$ существует соотношение, аналогичное (6):

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} p_j(z_j),$$

где многочлены p_j определяются формулой (7), а коэффициенты этих многочленов вычисляются в соответствии с (10), (3)—(5).

Графически расщепление функции $f(x)$ можно проиллюстрировать рис. 2. Область определения $D_x(f)$ (рис. 2, *a*) функции (4) представляется совокупностью точек, лежащих на интервале $[0, 1 - 2^{-S(x)}]$, расстояние между которыми $\Delta x = 2^{-S(x)}$. Сегментация аргумента x приводит к трансформации $D_x(f)$ в $D1_x(f)$ (рис. 2, *b*), представляющей собой множество точек, лежащих в узлах квадратной сетки, сторона которой равна $2^{\lceil -S(x)/2 \rceil}$, а сторона ячейки —

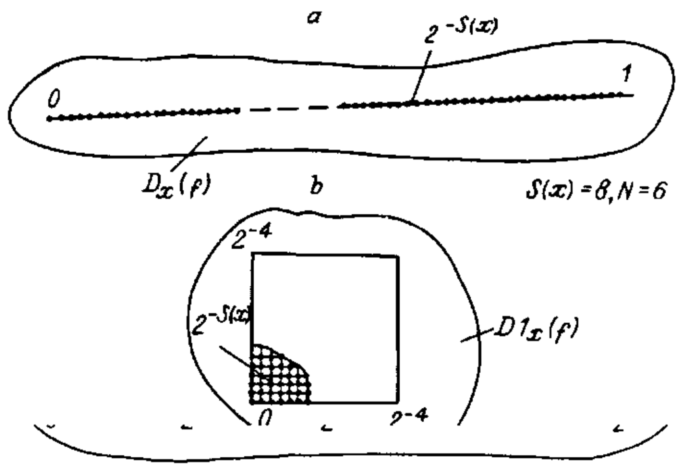

Рис. 2

$\Delta x = 2^{-S(x)}$. На рис. 2, *b* изображена область $D(f)$, полученная в результате расщепления функции (3) ($N = 6$).

В тех случаях, когда двухсегментного представления высокоразрядного аргумента функции $f(x)$ недостаточно для получения практически достижимых размеров запоминающего устройства, прибегают к n-сегментному представлению.

Пусть $x \in R_S$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} 2^{-\lceil (i-1)S(x)/2 \rceil} x_i, \; x_i \in R_{S/n}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в выражение для $f(x)$, получим функцию n переменных, расщепление которой можно использовать для дальнейшего сокращения адресного пространства таблиц функции $f(x)$.

Таким образом, сегментация высокоразрядного аргумента функции $f(x)$ позволяет представить ее в виде функции нескольких переменных. Подвергнув последнюю расщеплению, можно осуществить экономное табулирование исходной функции.

На основании вышеизложенного можно заключить, что метод расщепления функций вследствие универсального характера степенного разложения может применяться для таблично-операционного воспроизведения очень широкого класса функций. Использование данного метода дает значительный выигрыш в размере адресного пространства таблиц, необходимых для воспроизведения заданной функции. Рассмотренный метод является регулярным и конструктивным, так как указывает общий алгоритм построения вспомогательных степенных многочленов для таблично-операционного воспроизведения произвольной функции, имеющей степенное разложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович Е. В. Применение метода расщепления для высокоточного таблично-операционного воспроизведения функций.—Новосибирск, 1987.—Деп. в ВИНИТИ 03.03.87, № 154д-В87.

2. Рабинович Е. В. Применение метода расщепления для таблично-операционного воспроизведения функций нескольких переменных.—Новосибирск, 1987.—Деп. в ВИНИТИ 27.04.87, № 2390-В87.

Поступила в редакцию 28 сентября 1992 г.

УДК 621.317.36

Э. К. Скворцов, М. П. Цапенко

(Новосибирск)

ФАЗОЧАСТОТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДВОИЧНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотрены способы измерения фазового сдвига, суммарной и разностной частот и частостей двоичных импульсных последовательностей. Эти способы основаны на использовании предложенного фазочастотного преобразования. Показаны особенности измерения с их помощью перемещений.

Двоичными импульсными сигналами, широко используемыми в информационной технике, называются сигналы, принимающие значения 1 или 0 и имеющие информативные параметры, связанные с длительностью импульсов и с их расположением во времени или в пространстве.

Периодические двоичные импульсные сигналы $v(t)$ (рис. 1) обладают постоянным периодом T, могут быть меандром (рис. 1, *a*) со скважностью 1/2 или иметь иное соотношение между длительностью импульса и периодом (рис. 1, *b*). Непериодические двоичные импульсные сигналы содержат различное количество импульсов (пауз) в единице времени или пространства (рис. 1, *c*). Такие сигналы характеризуются обобщенной частотой — частостью, которая определяется как половина фронтов и срезов сигнала за единицу времени (в единице пространства).

Двоичные импульсные сигналы (рис. 2, *a*) после дискретизации по времени или пространству могут быть представлены в виде двоичных импульсных последовательностей (ДИП) (рис. 2, *b*). Наиболее часто дискретизация осуществляется равномерно, когда значения сигнала фиксируются через постоянный интервал времени. При этом продолжительность выделенных дискрет-импульсов с единичной амплитудой выбирается достаточной для уверенного их восприятия. Совокупность последовательно расположенных дискрет относится к импульсу, имеющему один фронт (переход от 0 к 1) и один срез (переход от 1 к 0). Количество фронтов и срезов и их расположение во времени (пространстве) полностью описывает ДИП.

Частота дискретизации $f_д$ должна быть такой, чтобы в ДИП были представлены наименьшие по длительности импульсы двоичного импульсного сигнала. Если длительность таких импульсов не меньше T_{min} и, следовательно, частость сигнала ограничена величиной $\frac{1}{T_{min}} \le \frac{1}{2} f_д$, то в ДИП могут быть сохранены все

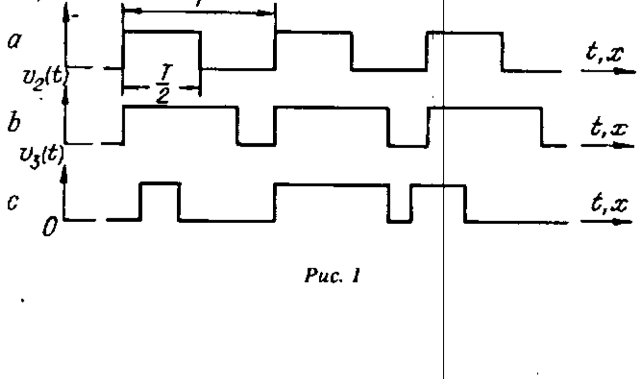

Рис. 1