Схема включает все узлы схемы рис. 1: блок коррекции темновых токов (БК), аналого-цифровой преобразователь (АЦП), цифровой умножитель (MUL), цифровой компаратор (КМП) и дополнительный корректор (АК1).

Коррекция чувствительности выполняется после коррекции темновой составляющей. При этом на приемники подается засветка, принимаемая за эталон.

Если на вход СОР корректора АК1 подавать высокий уровень сигнала, полученного с компаратора, когда результат умножения меньше выбранной константы K (константа должна соответствовать цифровому значению эталонной интенсивности), и низкий в противном случае, то в АК1 накопится значение, обратное значению единичной интенсивности, получаемой с приемников.

Таким образом, накопленный поправочный коэффициент g нормирует в процессе работы чувствительность датчиков.

Реализация. БИС АК разработана и изготовлена по 4-микронной nМОП-технологии. БИС содержит около 32 тысяч транзисторов, размеры кристалла 7×6 мм.

Параметры БИС: тактовая частота 100 кГц — 1,3 МГц; рассеиваемая мощность 700—800 мВт; напряжение питания 5 В.

БИС АК оформлена в виде 24-выводной микросхемы в металлокерамическом корпусе.

Использование при разработке АК таких современных средств, как система топологического проектирования ICE [2], программа проверки электрической схемы MICE [3], программа логического моделирования SimSim [4], позволило обеспечить отсутствие ошибок в проекте и получить работоспособные БИС с первой производственной итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mead C., Conway L. Introduction to VLSI System.—Addison-Wesley, 1980.
2. Титов Д. Г. Система проектирования топологии интегральных схем ICE.—Новосибирск, 1991.—(Препр. СО АН СССР. ИАиЭ; 464).
3. Рябченко А. Г. MICE2: программа экстракции электрической схемы из описания топологии МОП СБИС // Автометрия.—1991.—№ 5.
4. Лившиц С. А., Пичуев А. В. SimSim: программа логического моделирования МОП СБИС на переключательном уровне // Там же.—№ 3.

Поступила в редакцию 30 марта 1992 г.

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов

(Владивосток)

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА КОНЕЧНЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ

Рассматриваются оптимальные по среднеквадратической ошибке корреляционные и спектральные окна для ограниченной по длительности реализации стационарного случайного процесса. Показано, что условие нормировки на единицу для спектрального окна, используемое в асимптотических оценках, может стать неприемлемым по ошибке для конечных реализаций. Рассмотрены оптимальные оценки математического ожидания и дисперсии стационарного случайного процесса, непосредственно следующие из метода корреляционно-спектральных окон, показаны возможные их преимущества по точности в сравнении с традиционными оценками.

Введение. Непараметрический метод оценивания спектральной плотности стационарного случайного процесса основан на вычислении периодограммы и последующем ее сглаживании спектральными окнами. Имеется большое число публикаций, в которых исследуются спектральные окна, обеспечивающие сходимость в среднеквадратическом спектральной оценки к спектральной плотности. Видимо, первой из таких работ является статья Парзена [1], в которой результат получен при достаточно слабых ограничениях на спектральную плотность. В последующих работах с целью ускорения скорости сходимости на тип спектральной плотности накладывались более сильные ограничения. Однако решение многих прикладных проблем требует оценивать спектральную плотность по ограниченным по длительности и даже коротким реализациям. Спектральный анализ в этих условиях имеет свои особенности [2], которые не учитываются в асимптотических методах, а практические рекомендации, следующие из теории асимптотических спектральных оценок, в случае их применения для конечных реализаций имеют в основном характер нечетких условий. При этом исследователь вынужден работать на уровне интуитивных решений и, как справедливо отмечается в [3], «непараметрическое оценивание спектральных плотностей случайных процессов является большим искусством».

В связи с этим актуально развитие непараметрического оценивания для конечных реализаций. Ниже рассматривается задача определения спектрального окна, минимизирующего среднеквадратическую ошибку спектральной оценки для ограниченной длины реализации случайного процесса. Показано, что для спектрального окна h условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)d\omega = 1$, используемое в асимптотических оценках [3, 4], становится неприемлемым при конечных реализациях и может приводить к существенным ошибкам. Показано также, что оптимальное спектральное окно для асимптотических оценок является знакопеременным. Это согласуется с результатами работы [3]. Рассмотрены оптимальные оценки дисперсии и математического ожидания случайного процесса, которые непосредственно следуют из метода корреляционно-спектральных окон. Такие оценки на конечных реализациях могут дать значительный выигрыш по среднеквадратической ошибке в сравнении с традиционными оценками дисперсии и среднего.

Оптимальные сглаживающие окна. Пусть стационарный случайный процесс $x(t)$, наблюдаемый на интервале $[t_0, t_0 + T]$, имеет математическое ожидание $Mx(t) = 0$, ковариационную функцию $B(\tau)$ и спектральную плотность $F(\omega)$. Оценка спектральной плотности

$$f_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)h(\omega - \lambda)d\lambda, \tag{1}$$

где h — спектральное окно;

$$f(\lambda) = \frac{1}{T}\left|\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-i\lambda t}dt\right|^2 \tag{2}$$

— периодограмма. Будем выбирать оптимальное h из условия

$$M(f_c(\omega) - F(\omega))^2 \to \min_h. \tag{3}$$

Задачу нахождения оптимального сглаживающего окна удобно рассматривать с использованием преобразования Фурье. Если функции f, f_c, h имеют соответственно преобразования Фурье $\beta(\tau)$, $\beta_c(\tau)$, $H(\tau)$, тогда $\beta_c(\tau) = 2\pi H(\tau)\beta(\tau)$ и

$$\beta(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)x(t + |\tau|)dt. \qquad (4)$$

Функции β, β_*, H обычно называют несглаженной, сглаженной ковариационными оценками и корреляционным окном.

Нахождению оптимального спектрального окна (3) эквивалентна задача определения оптимального корреляционного окна из условия

$$M(2\pi H(\tau)\beta(\tau) - B(\tau))^2 \to \min_H . \qquad (5)$$

Можно сформулировать следующее более сильное утверждение относительно оптимальных окон. Если несглаженные оценки f и β — пара преобразований Фурье, то оптимальные корреляционное и спектральное окна, определяемые условиями (3) и (5), независимо от явного вида оценок f, β — пара преобразований Фурье.

Действительно, из (1), (3), используя, например, вариационное исчисление, подобно тому, как это выполнено в [4] при выводе уравнения Винера — Хопфа, получаем, что оптимальное спектральное окно h_0 должно удовлетворять уравнению

$$F(\omega)Mf(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\omega - \nu)M[f(\lambda)f(\nu)]d\nu, \quad -\infty < \lambda < \infty. \qquad (6)$$

Кроме того, из равенства нулю производной $\partial/\partial H$ левой части (5) следует, что оптимальное корреляционное окно H_0 определяется соотношением

$$2\pi H_0(\tau) = B(\tau)M\beta(\tau)/M\beta^2(\tau). \qquad (7)$$

Теперь покажем, что функции h_0 и H_0 связаны преобразованием Фурье. Для этого выполним преобразование Фурье в обеих частях уравнения (6) по переменной λ, тогда

$$F(\omega)M\beta(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\omega - \nu)M\beta(\tau)f(\nu)d\nu. \qquad (8)$$

Затем, выполняя преобразование Фурье по ω и учитывая свойство свёртки в правой части (8), находим, что преобразование Фурье функции h_0 совпадает с H_0 (7).

Соотношения (6), (7), определяющие оптимальные окна h_0, H_0, получены без привлечения явного вида (2), (4) несглаженных оценок f, β, поэтому f и β в (6), (7) могут быть любыми функциями, свойства которых таковы, что позволяют рассматривать их как спектральную и ковариационную оценки. Например, при сравнительно слабых ограничениях на детерминированную функцию $\varphi(\tau)$ вместо оценки $\beta(\tau)$ вида (4) можно взять оценку $\varphi(\tau)\beta(\tau)$. При этом, как следует из (7), оптимальное корреляционное окно зависит от $\varphi(\tau)$, но оптимальная ковариационная оценка и, следовательно, средняя квадратическая ошибка уже не зависят от $\varphi(\tau)$. Для частного случая подобное свойство инвариантности оптимальных оценок отмечалось в [5].

Свойства оптимальных окон. Рассмотрим оптимальные окна h_0, H_0 для случая, когда несглаженные оценки определяются соотношениями (2), (4). В знаменателе (7)

$$M\beta^2(\tau) = \mathrm{var}\beta(\tau) + (M\beta(\tau))^2,$$

где $\mathrm{var}\beta(\tau)$ — дисперсия оценки $\beta(\tau)$. Известно [4], что без учета малого члена, содержащего четвертый кумулянт,

$$\operatorname{var}\beta(\tau) = \frac{1}{T}\int\limits_{-(T-|\tau|)}^{T-|\tau|}\left(1 - \frac{|\tau| + |t|}{T}\right)[B^2(t) + B(t - |\tau|)B(t + |\tau|)]dt, \tag{9}$$

а $M\beta(\tau) = (1 - |\tau|/T)B(\tau)$. Из (9) следует, что $\operatorname{var}\beta(0) = 4\tau_0 B^2(0)/T$, где

$$\tau_0 = \int\limits_0^T (1 - t/T)B^2(t)dt/B^2(0) \tag{10}$$

— величина, имеющая смысл интервала корреляции случайного процесса $x(t)$. Используя эти соотношения, получаем из (7), что оптимальное корреляционное окно для нулевого аргумента

$$2\pi H_0(0) = 1/(4\tau_0/T + 1). \tag{11}$$

Отсюда при T/τ_0, равном 5, 10, 100, получаем соответственно 0,55; 0,71; 0,96. Таким образом, значения величины $2\pi H_0(0)$ существенно отличаются от 1,0 для реализаций, длительность которых не более $100\tau_0$. Из равенства $2\pi H(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\omega)d\omega$ следует, что для конечных реализаций может оказаться неприемлемым требование нормировки на единицу интеграла от спектрального окна [3, 4].

Рассмотрим оптимальное корреляционное окно при больших T. Пусть $T >> \tau_0$, тогда $M\beta(\tau) = B(\tau)$, а дисперсию (9) ковариационной оценки можно представить в виде $\operatorname{var}\beta(\tau) = \gamma_0 + \gamma(\tau)$, где

$$\gamma_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B^2(t)dt, \qquad \gamma(\tau) = \frac{1}{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(t - \tau)B(t + \tau)dt.$$

Таким образом,

$$2\pi H_0(\tau) = B^2(\tau)/[\gamma_0 + \gamma(\tau) + B^2(\tau)]. \tag{12}$$

Пусть $B(\tau)$ — монотонная функция. Поскольку $\lim\limits_{|\tau| \to \infty} B(\tau) = 0$, то можно найти такое $\tau_1 > 0$, что $|B(\tau)| < \delta$ для любого $|\tau| > \tau_1$ и заданного δ. Если выбрать $\delta << B(0)$, то с необходимой точностью $B(\tau) = 0$ для $|\tau| > \tau_1$. Принимая это условие, из (12) получаем

$$\lim_{T \to \infty} 2\pi H_0(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| \le \tau_1, \\ 0, & |\tau| > \tau_1. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, предельное оптимальное корреляционное окно является прямоугольным, а соответствующее спектральное окно относится к типу окон, названных в [3] знакопеременными. Действительно, взяв преобразование Фурье от (13), получаем

$$\lim_{T \to \infty} h_0(\omega) = \sin\omega\tau_1/(\omega\pi).$$

Если ковариационная функция немонотонна, как, например, у квазигармонического процесса, то предельное корреляционное окно (13) может иметь нулевые значения, совпадающие с нулями ковариационной функции.

В общем случае вид оптимального корреляционного окна зависит от ковариационной функции. Рассмотрим для примера дискретный процесс $x(t)$ авторегрессии первого порядка, определяемый рекуррентным соотношением

$$x(t) = \alpha x(t - 1) + n(t) \text{ для } \alpha = 0{,}8,$$

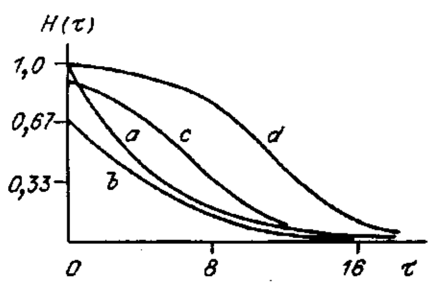

Рис. 1

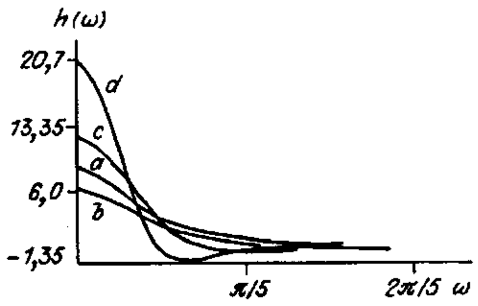

Рис. 2

где $h(t)$ — дискретный белый процесс с нулевым средним и дисперсией N_0. При этом ковариационная функция $B(\tau) = N_0\alpha^{|\tau|}/(1 - \alpha^2)$, а интервал корреляции $\tau_0 = 2{,}77$. На рис. 1 представлены результаты вычислений: a — график коэффициента корреляции $\alpha^{|\tau|}$, b — d — оптимальные корреляционные окна соответственно для $T = 15, 75, 495$. Наблюдается тенденция увеличения T к прямоугольному окну. На рис. 2 представлены соответствующие преобразования Фурье: a — спектральная плотность, b — d — оптимальные спектральные окна для $T = 15, 75, 495$. Для коротких реализаций оптимальное спектральное окно монотонно убывает от максимальных значений при $\omega = 0$ до нуля при больших ω. С увеличением T оптимальное спектральное окно становится знакопеременным.

Случай неизвестного математического ожидания. При вычислении оптимального корреляционного окна по формулам (4), (7) предполагалось, что $Mx(t) = 0$. Если математическое ожидание случайного процесса неизвестно, то несглаженная ковариационная оценка

$$\beta_a(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} (x(t) - a_0)(x(t + |\tau|) - a_0)dt, \tag{14}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt \tag{15}$$

— оценка математического ожидания. В этом случае статистические характеристики $M\beta_a$, $\mathrm{var}\beta_a$ отличаются от аналогичных характеристик оценки $\beta(\tau)$, и, следовательно, другой вид будет иметь оптимальное окно (7).

Пусть $Mx(t) = a$. Преобразуем (14) к выражению

$$\beta_a(\tau) = \beta(\tau) + (a - a_0)\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} (x(t) - a)dt +$$

$$+ (a - a_0)\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} (x(t + |\tau|) - a)dt + (a - a_0)^2\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), \tag{16}$$

где $\beta(\tau)$ — ковариационная оценка для известного математического ожидания. Найдем $M\beta_a(\tau)$. Математические ожидания первого слагаемого $M\beta(\tau) = (1 - |\tau|/T)B(\tau)$ и соответственно четвертого определяются через дисперсию оценки a_0 [4]. Подробнее рассмотрим второе слагаемое (16). Его математическое ожидание можно представить в виде

$$-\frac{1}{T^2}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|}dt\int_{t_0}^{t_0+T}d\text{v}B(t-\text{v}). \tag{17}$$

Перейдем от переменных t, v к переменным u, v, причем $u = t - \text{v}$. Область интегрирования в новых переменных определяется неравенствами $t_0 - \text{v} \le u \le t_0 + T - |\tau| - \text{v}$, $t_0 \le \text{v} \le t_0 + T$. Выберем следующий порядок интегрирования: внешний интеграл по переменной u и внутренний — по v, тогда выражение (17) сводится к одномерному интегралу. Аналогично преобразуется математическое ожидание третьего слагаемого выражения (16). В результате несложных преобразований с учетом четности подынтегральных функций получаем

$$M\beta_a(\tau) = \left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)B(\tau) - \frac{2}{T^2}\left[\int_{|\tau|}^{T}B(u)(T-u)du + (T-|\tau|)\int_0^{|\tau|}B(u)du + \right.$$

$$\left. + \int_0^{T-|\tau|}B(u)(T-|\tau|-u)du\right] + \left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}B(u)\left(1-\frac{|u|}{T}\right)du. \tag{18}$$

Отсюда следует равенство

$$M\beta_a(0) = B(0) - \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}B(u)\left(1-\frac{|u|}{T}\right)du. \tag{19}$$

Дисперсия ковариационной оценки $\beta_a(\tau)$ (14) может быть представлена в виде

$$\text{var}\beta_a(\tau) = \frac{1}{T^2}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|}dt\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|}d\text{v}\,\text{cov}[(x(t)-a_0)(x(t+|\tau|)-a_0),$$

$$(x(\text{v})-a_0)(x(\text{v}+|\tau|)-a_0)]. \tag{20}$$

Для случайных величин x_j с нулевым средним без учета четвертого кумулянта справедливо равенство [4]

$$\text{cov}(x_1x_2, x_3x_4) = Mx_1x_3Mx_2x_4 + Mx_1x_4Mx_2x_3.$$

Поэтому подынтегральное выражение в (20) имеет вид

$$M(x(t)-a_0)(x(\text{v})-a_0)M(x(t+|\tau|)-a_0)(x(\text{v}+|\tau|)-a_0) +$$

$$+ M(x(t)-a_0)(x(\text{v}+|\tau|)-a_0)M(x(t+|\tau|)-a_0)(x(\text{v})-a_0). \tag{21}$$

Рассмотрим выражение

$$M(x(t)-a_0)(x(\text{v})-a_0) = B(t-\text{v}) + M(a-a_0)(x(\text{v})-a) +$$

$$+ M(a-a_0)(x(t)-a) + M(a_0-a)^2. \tag{22}$$

Введем функции $\psi(\text{v})$ и $c(t, \text{v})$:

$$\psi(\text{v}) = M(a_0-a)(x(\text{v})-a) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}B(t-\text{v})dt, \tag{23}$$

$$c(t,\text{v}) = B(t,\text{v}) - \psi(t) - \psi(\text{v}) + \text{var}a_0. \tag{24}$$

Тогда из (20)—(24) следует, что

$$\operatorname{var}\beta_a(\tau) = \frac{1}{T^2} \int\limits_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} dt \int\limits_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} d\nu [c(t, \nu)c(t + |\tau|, \nu + |\tau|) +$$

$$+ c(t, \nu + |\tau|)c(t + |\tau|, \nu)]. \qquad (25)$$

Соотношения (18), (25) определяют оптимальное корреляционное окно (7) для случая неизвестного математического ожидания.

Оценивание дисперсии и математического ожидания. Выше получено, что для конечных реализаций в случае известного математического ожидания значение $2\pi H_0(0)$ может быть существенно меньше единицы. Это означает, что оценка $g\beta(0)$ дисперсии случайного процесса $x(t)$ имеет минимальную среднеквадратическую ошибку при $g < 1$ в отличие от традиционной оценки дисперсии вида $\beta(0)$. Представляет также интерес аналогичная оценка $g\beta_a(0)$ для неизвестного математического ожидания. Для процесса авторегрессии первого порядка ($\alpha = 0{,}8$) были вычислены зависимости $g(T)$ — оптимального множителя как функции длины реализации. Результаты вычислений представлены на рис. 3: *a* — функция $g(T)$ для известного математического ожидания, *b* — для неизвестного математического ожидания. В последнем случае для вычисления были использованы соотношения (7), (19), (25).

Рассмотрим, какой выигрыш по среднеквадратической ошибке достигается для оценок дисперсии вида gd_0 по сравнению с традиционной оценкой d_0, где $d_0 - \beta(0)$ или $d_0 = \beta_a(0) = d_a$ соответственно при известном или неизвестном математическом ожидании. Из условия оптимальности параметра g: $M(gd_0 - d)^2 \to \min\limits_g$, $d = B(0)$, следует, что оптимальное $g_0 = dMd_0/Md_0^2$. При этом минимальная среднеквадратическая ошибка $\varepsilon_g^2 = M(gd_0 - d)^2\big|_{g=g_0} = (g_0 d \operatorname{var} d_0)/Md_0$. Последнее выражение несложно преобразовать к виду

$$\varepsilon_g^2 = g_0 d(\varepsilon_1^2 - (Md_0 - d)^2)/Md_0, \qquad (26)$$

где $\varepsilon_1^2 = \operatorname{var} d_0 + (Md_0 - d)^2$. Для известного математического ожидания $Md_0 = d$, поэтому (26) принимает вид

$$\varepsilon_g^2 = g_0 \varepsilon_1^2. \qquad (27)$$

При этом оптимальное $g_0 = d^2/(\operatorname{var} d_0 + d^2)$. Поскольку на конечных реализациях $\operatorname{var} d_0$ может иметь порядок d^2, то выигрыш по среднеквадратической ошибке согласно (27) может быть значительным.

Для случая неизвестного математического ожидания оптимальное

$$g_0 = \frac{d}{Md_a} \frac{(Md_a)^2}{\operatorname{var} d_a + (Md_a)^2}. \qquad (28)$$

При уменьшении длины реализации T в соответствии с (19) уменьшается величина Md_a, что обеспечивает значение $g_0 > 1$, полученное в примере для процесса авторегрессии.

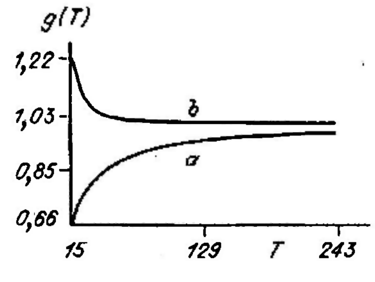

Рис. 3

Отметим, что аналогичная ситуация имеется и для оценок математического ожидания. Пусть традиционная оценка a_0 определяется соотношением (15). Рассмотрим оценку ga_0. Из условия

$M(ga_0 - a)^2 \to \min_g$ получаем, что оптимальное $g_0 = a^2/(\mathrm{var}a_0 + a^2)$. Минимальное значение среднего квадрата ошибки $\epsilon_g^2 = M(ga_0 - a)^2\big|_{g=g_0} = g_0\epsilon_1^2$, где $\epsilon_1^2 = M(a_0 - a)^2$. Если $a^2 << \mathrm{var}a_0$, то $g_0 \approx 0$ и относительный выигрыш в точности значительный; если же $a^2 >> \mathrm{var}a_0$, то оптимальное $g_0 \approx 1$ и выигрыша в точности практически нет.

В заключение автор благодарит В. К. Фищенко за участие в обсуждении полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parzen E. On consistent estimates spectrum of stationary time series // Annals Math. Statistics.—1957.—28, N 2.

2. Кулешов Е. Л. Непараметрические спектральные оценки с высоким разрешением // Автометрия.—1984.—№ 2.

3. Алексеев В. Г. К вопросу о построении сверхразрешающих спектральных оценок // Автометрия.—1986.—№ 4.

4. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.—М.: Мир, 1971.

5. Кулешов Е. Л. Некорректные задачи в спектральном анализе стационарных случайных процессов // Автометрия.—1985.—№ 3.

Поступила в редакцию 20 мая 1991 г.