РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.218.82 : 517.518.85

В. М. Ефимов

(Новосибирск)

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Описывается способ получения интерполяционных формул из асимптотических соотношений, найденных на основе метода наименьших квадратов, в предположении случайности и стационарности интерполируемого сигнала.

Рассматривается метод получения асимптотически оптимальных интерполяционных формул. Реализация метода состоит из двух этапов. На первом этапе в предположении о том, что интерполируемый сигнал $f(x, y, z)$ случаен, стационарен и изотропен, находится его оптимальная линейная оценка по совокупности отсчетов $f_k = f(x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, ..., n)$ из уравнения

$$\min_{\{w\}}\left\langle \left(f - \sum_{k=1}^{n} w_k f_k\right)^2 \right\rangle \tag{1}$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1, \tag{2}$$

несколько увеличивающем средний квадрат ошибки оценивания, позволяющем исключить из рассмотрения неизвестное математическое ожидание.

На втором этапе в полученных значениях w_k осуществляется предельный переход при синхронном стремлении к нулю эвклидовых расстояний между отсчетами (с сохранением геометрии). Этот переход позволяет избавиться от подробных сведений о нормированной корреляционной функции сигнала, разложимой в ряд:

$$\rho(l) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i |l|^i, \tag{3}$$

где l — расстояние между отсчетами сигнала, кроме утверждений типа: сигнал однократно дифференцируем в среднеквадратичном ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 > 0$).

Поясним изложенное выше на примере, когда $n = 2$. В этом случае система (1) при условии (2) принимает вид:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2\rho(l) &= \rho(l_1) + \lambda, \\ w_1\rho(l) + w_2 &= \rho(l_2) + \lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

где расстояния

$$l = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{1/2},$$
$$l_1 = ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{1/2},$$
$$l_2 = ((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2)^{1/2};$$

λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Решение системы (4) очевидно:

$$w_1 = 1/2 + (\rho(l_1) - \rho(l_2))/2(1 - \rho(l)),$$
$$w_2 = 1/2 + (\rho(l_2) - \rho(l_1))/2(1 - \rho(l)). \qquad (5)$$

При $l \to 0$ для сигнала, не имеющего среднеквадратичной производной ($\alpha_1 < 0$),

$$w_1 = 1/2 + (r_2 - r_1)/2,$$
$$w_2 = 1/2 + (r_1 - r_2)/2, \qquad (6)$$

где $r_1 = l_1/l$, $r_2 = l_2/l$.

Если сигнал хотя бы один раз дифференцируем в среднеквадратичном ($\alpha_1 = 0$), то

$$w_1 = 1/2 + (r_2^2 - r_1^2)/2,$$
$$w_2 = 1/2 + (r_1^2 - r_2^2)/2. \qquad (7)$$

Интерполяция одномерного сигнала. Положим $f = f(x)$. Тогда из (6) и (7) следует, что для любого сигнала с корреляционной функцией (3) в формуле для восстановления сигнала по последовательности равноотстоящих отсчетов (в (8) число слагаемых $N \gg n$ из (1))

$$f = \sum_k f(kl)w(x - kl) \qquad (8)$$

весовая функция

$$w(x) = (1 - |x|/l)1[1 - |x|/l], \qquad (9)$$

где $1[\eta]$ — функция Хевисайда.

Если в (3) величина $\alpha_1 < 0$, то при увеличении числа отсчетов, используемых в системе уравнений (1) для построения $w(x)$, последняя остается неизменной и определяется соотношением (9).

При $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_3 > 0$ в (3) и $n = 4$ в системе уравнений (1) весовая функция

$$w(x) = [1 - |x|/l - (3/10)h_1(|x|) - (1/2)h_2(|x|)]1[l - |x|] +$$
$$+ [(3/10)h_1(|x| - l) + (1/6)h_2(|x| - l)]1[(|x| - l)(2l - |x|)], \qquad (10)$$

где

$$h_1(|x|) = (|x|/l)(|x|/l - 1),$$
$$h_2(|x|) = (1 - 2|x|/l)(|x|/l)(|x|/l - 1). \qquad (11)$$

Использование (10) вместо (9) для сигнала с такими параметрами уменьшает максимум среднего квадрата ошибки примерно в 1,8 раза.

Построение для такого же сигнала интерполяционной формулы по шести уравнениям ($n = 6$ в (1)) уменьшает максимум среднего квадрата ошибки по сравнению с (10) примерно в 1,05 раза. При этом степень полинома остается прежней. Такая же закономерность наблюдается и для более гладких сигналов, что делает не слишком эффективным использование для построения соответствующей формулы числа уравнений, превышающего $n = 2(m + 1)$, если $\alpha_1 = \alpha_3 = ... = \alpha_{2m-1} = 0$, $|\alpha_{2m+1}| > 0$ в соотношении (3).

Очень близкой к оптимальным интерполяционным соотношениям (расхождение в максимуме среднего квадрата ошибки составляет единицы процентов) оказывается весовая функция, построенная на основе скользящего интерполирования полиномом Лагранжа:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{m} h_{m-k}(|x| + (m-k)l) 1 [(|x| - (k-1)l)(kl - |x|)], \qquad (12)$$

где $h_{m-k}(|x|)$ — весовой коэффициент полинома Лагранжа при $(m-k)$-м отсчете при интерполировании на отрезке $0 \le x \le (2m-1)l$. Эта функция при $m \to \infty$ сходится в весовой функции фильтра нижних частот с круговой частотой среза $\omega_{max} = \pi / l$*.

Отметим, что в соотношении (8) условие (2) при конечной последовательности отсчетов на краях общего интервала интерполяции нарушается при более длинных, чем (9), весовых функциях. Достаточно простым представляется применение (2) к ранее полученным весовым функциям, что не слишком существенно усложняет процедуру интерполирования на краях общего интервала интерполяции.

Интерполяция на плоскости. Приведем формулы для случая, когда отсчеты, по которым производится интерполяция, расположены равномерно на окружности и образуют фигуры, которые могут быть плотно упакованы на плоскости (три, четыре и шесть отсчетов):

$$w_1 = (1/3)[1 + (2\rho(l_1) - \rho(l_2) - \rho(l_3))/(1 - \rho(l))], \qquad (13)$$

$$w_1 = (1/4)[1 + (\rho(l_1) + \rho(l_3) - \rho(l_2) - \rho(l_4))/(1 - 2\rho(l) + \rho(\sqrt{2}l)) + 2(\rho(l_1) - \rho(l_3))/(1 - \rho(\sqrt{2}l))], \qquad (14)$$

$$w_1 = (1/6)[1 + (2\rho(l_1) + 2\rho(l_4) - \rho(l_2) - \rho(l_5) - \rho(l_6) - \rho(l_3))/(1 - \rho(l) - \rho(\sqrt{3}l) + \rho(2l)) + (\rho(l_1) - \rho(l_4) - \rho(l_2) + \rho(l_5) - \rho(l_6) + \rho(l_3))/(1 - 2\rho(l) + 2\rho(\sqrt{3}l) - \rho(2l)) + (2\rho(l_1) - 2\rho(l_4) + \rho(l_2) - \rho(l_5) + \rho(l_6) - \rho(l_3))/(1 + \rho(l) - \rho(\sqrt{3}l) - \rho(2l))]. \qquad (15)$$

В формулах (13)—(15) нумерация отсчетов производится против часовой стрелки, l — длина хорды между ближайшими точками. Осуществляя в этих соотношениях предельный переход для случая $\alpha_1 < 0$, получим асимптотически оптимальные формулы:

$$w_1 = (1/3)(1 - 2r_1 + r_2 + r_3), \qquad (13a)$$

$$w_1 = (1/4)[1 - (r_1 + r_3 - r_2 - r_4)/(2 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(r_1 - r_3)], \qquad (14a)$$

$$w_1 = (1/6)[1 - ((2 + 5\sqrt{3})/2)r_1 + ((4 + \sqrt{3})/2) \times (r_2 + r_6) + (\sqrt{3} - 2)(r_3 + r_4 + r_5)/2]. \qquad (15a)$$

Отметим, что если при $n = 4$ стороны квадрата ориентированы по осям x и y, а $x_1 = y_1 = 0$, то на практике обычно используется соотношение

$$w_1 = (1 - |x|/l)(1 - |y|/l) 1 [1 - |x|/l] 1 [1 - |y|/l], \qquad (16)$$

которое получается из (9) путем факторизации. Отличие (14а) от (16) объясняется тем, что при выводе (14а) сигнал предполагался изотропным. Если исходить из предположения анизотропности сигнала $\rho(r) = \varphi(x)g(y)$, то (16) получается из (14) после очевидных преобразований.

Отметим также, что в случае $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ (сигнал дважды дифференцируем в среднеквадратичном) и упомянутой выше ориентации квадрата предельный переход в (14) также приводит к соотношению (16). Если же поле изотропно и $\alpha_1 < 0$, то расхождение в величине среднего квадрата ошибки

* Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле.—М.: Энергия, 1969.

между (14а) и (16) незначительно (например, на середине стороны квадрата оно составляет ~1 %).

Приведем еще одно соотношение, вытекающее из (14) в случае, когда $\alpha_1 = 0, \alpha_3 > 0$ при $l \to 0$:

$$w_1 = (1/4)[1 - (r_1^2 - r_3^2) + (r_1^3 + r_3^3 - r_2^3 - r_4^3)/2(\sqrt{2} - 1)]. \tag{14б}$$

$$- \rho(l_3) - 3\rho(l_7) + \rho(l_2) - \rho(l_6) + \rho(l_4) - \rho(l_8))/(1 + \rho(l) -$$
$$- \rho(\sqrt{2}l) - \rho(\sqrt{3}l)) + (\rho(l_1) - \rho(l_5) + \rho(l_3) - \rho(l_7) - \rho(l_2) +$$
$$+ \rho(l_6) - \rho(l_4) + \rho(l_8))/(1 - 3\rho(l) + 3\rho(\sqrt{2}l) - \rho(\sqrt{3}l))]. \tag{17}$$

Нумерация вершин куба проведена против часовой стрелки в двух противолежащих основаниях (1—4 и 5—8).

Когда $\alpha < 0$, осуществляя предельный переход в (17), получим асимптотически оптимальную интерполяционную формулу:

$$w_1 = (1/8)[1 - ((3 + 21\sqrt{2} + \sqrt{3})/6(\sqrt{3} - 1))r_1 -$$
$$- ((3 - 3\sqrt{2} - 7\sqrt{3})/6(\sqrt{3} - 1))(r_2 + r_4 + r_5) -$$
$$- ((3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3})/6(\sqrt{3} - 1))(r_3 + r_6 + r_8) +$$
$$+ ((21 + 3\sqrt{2} - 17\sqrt{3})/6(\sqrt{3} - 1))r_7]. \tag{17а}$$

Расхождение в среднем квадрате ошибки интерполяции между (17а) и трехмерным аналогом (9)

$$w_1 = (1 - |x|/l)(1 - |y|/l)(1 - |z|/l)1[1 - |x|/l]1[1 - |y|/l]1[1 - |z|/l] \tag{18}$$

невелико. На середине ребра куба оно составляет ~2 %.

В заключение отметим, что соотношения типа (13а)—(15а), (17а) могут быть получены и без использования формул (13)—(15), (17) путем составления очевидных систем уравнений для весовой функции, представленной в виде линейной комбинации расстояний.

Автор благодарен И. Н. Сворковой за помощь в работе.

Поступила в редакцию 28 февраля 1992 г.

УДК 681.3.06 : 528.288

Н. И. Королев, А. А. Короткин

(Ярославль)

ОБ ОДНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ СХЕМЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АЛГОРИТМА СОВМЕЩЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассматривается один из корреляционных алгоритмов совмещения двух зашумленных снимков точечных изображений (звездных узоров) с целью приведения этих снимков к одной системе координат. Исследуются с точки зрения вычислительной эффективности две схемы реализации этого алгоритма. Показано, что схема, использующая специальную структуру данных, дает значительный выигрыш во времени по сравнению со схемой, основанной на представлении данных в виде линейных массивов. Приводятся соответствующие оценки эффективности.