оптимальных соотношениях между точностью решения и количеством изме-

3. Гельфанд И. М., Гончаров А. Б. Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // ДАН СССР.—1986.—290, № 5.
4. Орлов С. С. Теория трехмерной реконструкции. Оператор восстановления // Кристаллография.—1975.—20, № 4.
5. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1978.
6. Благовещенский А. С. О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. заметки.—1986.—39, № 6.
7. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.
8. Трофимов О. Е. К задаче восстановления функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Автометрия.—1991.—№ 5.
9. Finch D. V. Cone beam reconstruction with sources on a curve // SIAM. J. Appl. Math.—1985.—45, N 4.—P. 665.
10. Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. Алгоритмы решения обратной задачи рентгеновской томографии // 4-й Всесоюз. симп. по вычислительной томографии: Тез. докл.—Ташкент; Новосибирск, 1989.
11. Трофимов О. Е. Численное восстановление интегралов от функции трех переменных вдоль прямых, проходящих через круг, по интегралам от той же функции вдоль прямых, проходящих через окружность // Там же.
12. Трофимов О. Е. Численное восстановление интегралов от функции трех переменных вдоль прямых, проходящих через круг, по интегралам от той же функции вдоль прямых, проходящих через окружность.—Новосибирск, 1989.—(Препр. ИАиЭ СО АН СССР; 427).
13. Жирнов В. Т., Смирнов К. К., Трофимов О. Е. О численных методах решения задач томографии // Методы и средства обработки изображений.—Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1982.
14. Трофимов О. Е., Тюренкова Л. В. Об одном способе численного восстановления изображения по многоракурсной томограмме.—Новосибирск, 1989.—(Препр. ИАиЭ СО АН СССР; 440).
15. Трофимов О. Е. Соотношение между дискретным и непрерывным преобразованиями Фурье // Там же; 424.
16. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции.—М.: Физматгиз, 1962.—Вып. 5: Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.
17. Хелгасон С. Преобразование Радона.—М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 10 августа 1991 г.

УДК 616.07

М. И. Троицкая, А. Ю. Харитонов

(Москва)

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО ПАРАМЕТРА ЭМИССИОННОЙ РЕКОНСТРУКТИВНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Для однофотонного метода исследуется интегральное среднеквадратическое отклонение восстанавливаемого изображения от истинного. Приводятся математические соотношения, позволяющие определить значение регуляризирующего параметра.

Постановка задачи. В различных задачах технической и медицинской диагностик часто используются методы эмиссионной реконструктивной вычислительной томографии. Область их применения чрезвычайно широка:

от анализа структуры плазменных образований до диагностики злокачественных опухолей. Одна из важнейших задач, возникающих в процессе подготовки и проведения эмиссионной томографии, — определение количества вводимых в исследуемую область радиоизотопов и выбор оптимального значения регуляризирующего параметра. Оба эти фактора тесно связаны между собой: чем меньше число изотопов, тем больше флуктуации в восстановленном томографическом изображении и, следовательно, тем большую роль должна играть регуляризация. Рассмотреть взаимоотношения этих факторов можно путем анализа того или иного критерия качества восстанавливаемого изображения, подобно тому, как это сделано в [1] для трансмиссионной томографии.

Цель настоящей статьи — провести подобный анализ для случая однофотонной эмиссионной томографии и конкретно, ориентируясь на интегральное среднеквадратическое отклонение восстановленного изображения от истинного, получить математические соотношения, позволяющие определить оптимальное значение регуляризирующего параметра в зависимости от числа изотопов, участвующих в однофотонной эмиссионной томографии.

Статистическое описание совокупности радиационных изотопов. Эмиссионная томография основывается на том, что вне зависимости от используемых изотопов распределение плотности их расположения в изучаемой области непосредственно связано с ее структурой. Именно этот факт позволяет свести задачу о получении изображения структуры интересующей экспериментатора области Ω к восстановлению изображения плотности введенных в данную область радиоизотопов.

Однако плотность изотопов в исследуемой области Ω есть некоторая усредненная характеристика их расположения. Реально же в томографическом эксперименте присутствует некоторая совокупность отдельных изотопов. Каждый изотоп можно рассматривать как отдельный источник со своими координатами и интенсивностью.

Введем в плоскости анализируемого сечения некоторую прямоугольную систему координат $\{x; y\}$ и обозначим: (x_i, y_i) — координаты i-го изотопа, a_i — его интенсивность. Пусть n — суммарное число всех изотопов, находящихся в исследуемом сечении, $f(x, y)$ — их искомая плотность.

В этом случае всю реально существующую совокупность точечных источников (изотопов) можно описать функцией

$$\tau(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \delta(x - x_i, y - y_i), \tag{1}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

Входящие в (1) величины n, x_i, y_i, a_i $(i = 1, ..., n)$ случайные. Когда величина n не слишком большая, проникновение одного изотопа в анализируемую область не влияет на процесс проникновения других изотопов (именно такая ситуация и реализуется на практике). Следовательно, все упомянутые величины можно считать статистически независимыми. При этом плотность вероятности $\varphi(x, y)$ есть не что иное, как искомая отнормированная плотность, так что

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y)}{\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy} \tag{2}$$

(Ω — анализируемая область).

Таким образом, если $P(n)$ — распределение числа n, а $P_0(a)$ — плотность вероятности значения a, то совместное распределение всех случайных величин, входящих в (1), имеет вид

$$P(x_1, y_1, ..., x_n, y_n, a_1, ..., a_n, n) = P(n)\prod_{i=1}^{n} P_0(a_i)\varphi(x_i, y_i). \tag{3}$$

Статистическое описание проекционных данных. В случае однофотонной томографии изотоп непосредственно испускает γ-кванты, которые для данного направления выделяются с помощью соответствующих коллиматоров. Томографический эксперимент ставится так, что радиационное излучение регистрируется под разными углами β $(0 \le \beta \le \pi)$ (рис. 1). При этом связь между усредненной регистрируемой информацией, описываемой функцией $R(s,\beta)$, и внутренней структурой объекта, отождествленной в данном случае с $f(x, y)$, задается интегральным уравнением [2]

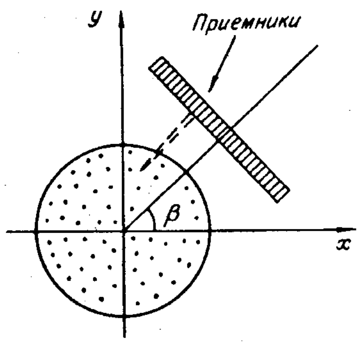

Рис. 1

$$R(s,\beta) = \iint_{\Omega} f(x, y)\delta(x\cos\beta + y\sin\beta - s)dxdy, \tag{4}$$

где s — координата, фиксирующая положение приемников, регистрирующих приходящее излучение.

Так как в реальном эксперименте мы имеем дело не с $f(x, y)$, а со случайной совокупностью изотопов $\tau(x, y)$ (1), то и регистрируемая в процессе томографирования информация (так называемые «проекционные данные») тоже будет случайной.

В зависимости от используемых изотопов статистическое описание проекционных данных может оказаться различным. В рассматриваемом нами случае однофотонной эмиссионной томографии проекционные данные описываются уравнением, которое получается в результате подстановки (1) в (4). Тогда после интегрирования по x, y получаем

$$R_0(s,\beta) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \delta(x_i\cos\beta + y_i\sin\beta - s). \tag{5}$$

Статистическое описание восстановленных эмиссионных изображений. Для определенности будем предполагать, что область восстановления совпадает со всей плоскостью $\{x, y\}$. Тогда в соответствии с алгоритмом восстановления по формулам обращения, имеющим вид интегральных преобразований и рассмотренным в [2] как интегральный алгоритм реконструкции, восстановленное томографическое изображение описывается формулой

$$f_{\text{в}}(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} R(s,\beta)q_\alpha(x\cos\beta + y\sin\beta - s)ds, \tag{6}$$

где $q_\alpha(\cdot) = \pi\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|\, W_\alpha(|\omega|)\exp(i2\pi\omega(x\cos\beta + y\sin\beta - s))d\omega$, а W_α — регуляризирующая функция с параметром α [1].

Подставляя в (6) соотношение (5), получим

$$f_{\text{в}0}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_\alpha(x - x_i, y - y_i), \tag{7}$$

где

$$h_\alpha(u, \text{v}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q_\alpha(u\cos\beta + \text{v}\sin\beta)d\beta, \tag{8}$$

которая согласно [1] может быть представлена в виде

$$h_\alpha(u, \text{v}) = \iint_{\Omega} W_\alpha(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})e^{i2\pi(u\omega_1 + \text{v}\omega_2)}d\omega_1 d\omega_2. \tag{9}$$

Усредняя (7) по закону (3), найдем

$$\overline{f_{\text{в}0}(x, y)} = \bar{a}\,\bar{n}\iint_{\Omega} h_{\alpha}(x - x', y - y')\varphi(x', y')dx'dy'. \qquad (10)$$

Аналогичным образом вычисляется дисперсия

$$\sigma^2(x, y) = \overline{f^2_{\text{в}0}(x, y)} - (\overline{f_{\text{в}0}(x, y)})^2,$$

где $f_{\text{в}0}(x, y)$ определяется равенством (7), так что получаем

$$\sigma^2(x, y) = \bar{n}\,\overline{a^2}\iint_{\Omega} h^2_{\alpha}(x - x', y - y')\varphi(x', y')dx'dy' + \frac{\sigma^2_n - \bar{n}}{\bar{n}^2}(\overline{f_{\text{в}0}(x, y)})^2. \qquad (11)$$

Интегральное среднеквадратическое отклонение. Интегральные среднеквадратические отклонения восстановленной плотности от истинной определяем равенством

$$A = \iint_{\Omega}\overline{(f_{\text{вн}}(x, y) - f(x, y))^2}dxdy, \qquad (12)$$

где $f_{\text{вн}}(x, y) = \dfrac{1}{\bar{a}W_{\alpha}(0)}f_{\text{в}}(x, y)$.

Легко видеть, что

$$A = \frac{1}{\bar{a}^2W^2_{\alpha}(0)}\iint_{\Omega}\sigma^2(x, y)dxdy + \iint_{\Omega}(\overline{f_{\text{вн}}(x, y)} - f(x, y))^2dxdy = A_1 + A_2, \qquad (13)$$

где $\sigma^2(x, y)$ определяется равенством (11). Таким образом, A представляется в виде суммы двух интегралов, которые обозначим A_1 и A_2 соответственно.

Воспользовавшись (9) и (11), получаем для A_1 и A_2:

$$A_1 = \left(\frac{\sigma^2_a}{\bar{a}^2} + 1\right)\frac{1}{\bar{n}W^2_{\alpha}(0)}\iint_{\Omega}W^2_{\alpha}(\sqrt{\omega^2_1 + \omega^2_2})d\omega_1 d\omega_2 + \frac{\sigma^2_n - \bar{n}}{\bar{n}^2W^2_{\alpha}(0)} \times$$
$$\times \iint_{\Omega}W^2_{\alpha}(\sqrt{\omega^2_1 + \omega^2_2})|f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2,$$

$$A_2 = \iint_{\Omega}\left[1 - \frac{1}{W_{\alpha}(0)}W_{\alpha}(\sqrt{\omega^2_1 + \omega^2_2})\right]^2|f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2,$$

где $\sigma^2_a = \overline{a^2} - \bar{a}^2$, $\sigma^2_n = \overline{n^2} - \bar{n}^2$, а $f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{\Omega}f(x, y)e^{i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)}dxdy$.

Полученные выражения позволяют, задавшись конкретным видом функции, проанализировать точность ее восстановления в зависимости от самого вида этой функции, параметра регуляризации α, среднего числа радиационных изотопов и дисперсии их интенсивности.

В качестве иллюстрации приведем следующий пример:

Пусть функция $f(x, y)$ имеет «колоколообразную» форму, так что

$$f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) = e^{(-1/2l^2 4\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2))},$$

где l характеризует линейный размер области, в которой сосредоточена эта функция. В качестве регуляризирующей функции возьмем функцию вида

$$W_{\alpha}(\sqrt{\omega^2_1 + \omega^2_2}) = \exp\left\{\frac{\alpha^2}{2}(\omega^2_1 + \omega^2_2)\right\}.$$

Для этих функций

$$A_1 = \left(\frac{\sigma^2_a}{\bar{a}^2} + 1\right)\frac{1}{\bar{n}}\frac{\pi}{\alpha^2} + \left(\frac{\sigma^2_n}{\bar{n}^2} - \frac{1}{\bar{n}}\right)\frac{\pi}{\alpha^2 + 4\pi^2 l^2},$$

$$A_2 = \frac{1}{4\pi l^2} - \frac{2\pi}{\frac{\alpha^2}{2} + 4\pi^2 l^2} + \frac{\pi}{\alpha^2 + 4\pi^2 l^2}.$$

Таблица 1

$\bar{n}$	Al^2
40	0,0250
50	0,0195
60	0,0171
70	0,0140
80	0,0134
90	0,0125

Таблица 2

$\bar{n}$	$(\alpha/l)_{opt}$
30	2,95
50	2,41
70	2,09
90	2,01
100	1,98
120	1,97

Таблица 3

$\bar{n}$	$(\alpha/l)_{opt}$	Al^2
100	3	0,1
150	2,8	0,09
200	2,5	0,08
250	2	0,07

Зависимость интегрального среднеквадратического отклонения от среднего числа использованных радиационных изотопов при параметре регуляризации $\sim 2l$ приведена в табл. 1, из которой видно, что когда $\bar{n}$ оказывается порядка $70 \div 80$, величина Al^2 близка к своему асимптотическому значению $\sim 0{,}01$ и дальнейшее увеличение $\bar{n}$ не приводит к уменьшению Al^2. Данный факт является следствием того, что, начиная с этих $\bar{n}$, основную роль играет ошибка, вносимая процессом регуляризации.

На рис. 2 показана зависимость величины интегрального среднеквадратического отклонения от значения регуляризирующего параметра для трех значений $\bar{n} = 30$; 60; 100. Из рисунка видно, что эта зависимость имеет четко выраженный минимум, перемещающийся по мере увеличения $\bar{n}$ в сторону меньшего значения α, так что для $\bar{n} = 30$; 60; 100 $\alpha_{\min} = 2{,}91$; 2,83; 2,70 соответственно.

Более детально представление о зависимости значения α_{opt} от величины среднего числа радиационных изотопов можно получить из данных табл. 2.

Приведенный пример относится к случаю центрально-симметричного объекта весьма простого вида. Это позволяет провести аналитические расчеты величин A_1 и A_2 и наглядно проиллюстрировать особенности их зависимостей от $\bar{n}$ и α_{opt}. Объекты, представляющие обычно практический интерес, имеют гораздо более сложный вид, и тогда соответствующие расчеты приходится проводить на ЭВМ. В качестве примера в табл. 3 приведены результаты таких расчетов, выполненные для объекта, сечение которого представляет собой однородный круг, внутри которого имеется полость треугольной формы (рис. 3). Из таблицы видно, что характер зависимости $\bar{n}$ от $(\alpha/l)_{opt}$ (здесь в качестве величины l брался линейный размер полости по оси x) подобен аналогичной зависимости, рассчитанной аналитически в предыдущем примере.

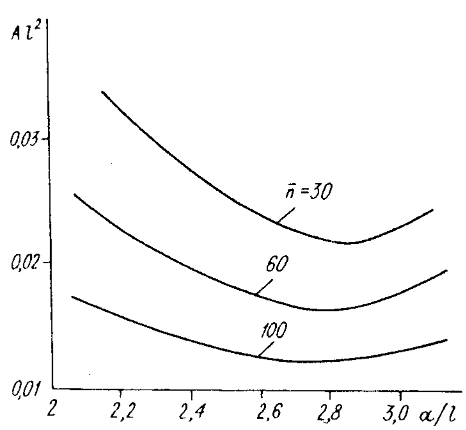

Рис. 2

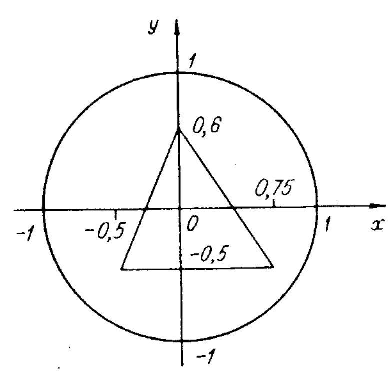

Рис. 3

Однако сами значения $\overline{n}$ оказываются существенно большими. Этот факт является непосредственным следствием более сложного вида анализируемого объекта и полностью согласуется с физическим представлением о том, что чем сложнее объект, тем большая доза излучения требуется для его более детального анализа.

Заключение. Полученное выражение для среднеквадратического отклонения восстановленного изображения от истинного позволяет оценить требуемое число изотопов $\overline{n}$, которое при однофотонной эмиссионной томографии обеспечивает значение A не более заданного, и определить оптимальную величину регуляризирующего параметра α. В этой связи интересно сравнить величину A с аналогичной величиной Δ, изучаемой в [1, с. 105—109] для трансмиссионной томографии, осуществляемой при слабом информационном сигнале. Легко видеть, что зависимость A от $\overline{n}$ и α подобна зависимости Δ от $\overline{n_c}$ и t. Однако в силу принципиально разных физической картины и физической сущности величин $\overline{n}$ и $\overline{n_c}$, входящих соответственно в A и Δ, обсуждаемые зависимости существенно различаются в конкретном количественном выражении.

Находимое таким образом число $\overline{n}$ позволяет оценить по известной методике количество радиоактивного вещества, которое должно вводиться для анализа объекта, в зависимости от того, на какой вид фантома ориентируется исследователь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Троицкий И. Н.** Статистическая теория томографии.—М.: Радио и связь, 1989.

2. **Луис А. К., Наттерер Ф.** Математические проблемы реконструктивной вычислительной томографии // ТИИЭР.—1983.—71, № 3.

Поступила в редакцию 14 июня 1991 г.

УДК 621.344.3

В. Н. Дубчак, В. Г. Красиленко

(Винница)

ЭФФЕКТИВНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ОПЕРАНДОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ МОМЕНТНЫХ ПРИЗНАКОВ МЕТОДОМ ПОФРАГМЕНТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

При обработке визуальной информации в задачах распознавания образов, системах технического зрения, корреляционно-экстремальных системах навигации возникает задача эффективного вычисления последовательности моментных признаков, идентифицирующих заданное входное изображение. Перспективным и эффективным в смысле организации вычислительного процесса представляется определение моментных признаков методом пофрагментного интегрирования (МПМПИ).

Как показано в [1], чтобы вычислить совокупность моментных признаков $m_{\alpha\beta}$ цифрового полутонового изображения S размерностью $2N \times 2M$, определяемого набором из L бинарных срезов, необходимо выполнить преобразование вида

$$m_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^{2N}\sum_{j=0}^{2M} i^{\alpha}j^{\beta}S(i,j) = \sum_{i=0}^{2N}\sum_{j=0}^{2M}\left(\sum_{p=0}^{K-1} a_{ijp}(\alpha,\beta)2^{p}\right)\left(\sum_{l=0}^{L-1} s_{ijl}2^{l}\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\sum_{i=0}^{2N}\sum_{j=0}^{2M}(a_{ijp}s_{ijl})\right]2^{p}2^{l} = \sum_{p=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1}\|A_pS_l\|2^{p+l}, \qquad (1)$$