15. Рудин У. Основы математического анализа: Пер. с англ. В. П. Хавина.—М.: Мир, 1966.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.—М.: Наука, 1977.
17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.—М.: Наука, 1966.—Т. 1.

Поступила в редакцию 29 апреля 1991 г.

УДК 519.642

О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

О ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМАХ ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Рассматриваются вопросы, связанные с построением численных алгоритмов восстановления плотности трехмерных объектов по интегральным значениям вдоль прямых, проходящих через окружность. Использование подобных алгоритмов позволяет избежать представления объекта в виде набора слоев постоянной плотности, характерного для классической компьютерной томографии.

В компьютерной рентгеновской томографии трехмерный объект представляется обычно в виде набора тонких срезов. Для восстановления плотности среза решается задача обращения двумерного преобразования Радона. Для исследования ряда объектов более естественна другая схема, когда источник излучения движется по некоторой пространственной кривой. Каждой точке кривой соответствует конус лучей, проходящих через эту точку. Исходными данными являются данные об ослаблении излучения при прохождении через объект. Математически задача ставится как задача восстановления функции трех переменных по интегралам вдоль прямых, проходящих через заданную кривую. Решению этой задачи для различных классов функций и различных типов кривых посвящены работы [1—6].

В [2] получена формула обращения для функций, имеющих финитный носитель, и для кривых, удовлетворяющих определенным условиям. Главное здесь — условие Кириллова — Туя, заключающееся в том, что любая плоскость, пересекающая объект, пересекает кривую, по которой движется источник. Примером кривой, удовлетворяющей условиям [2], является совокупность двух единичных окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях. Однако построение численных алгоритмов непосредственно на основании формулы, приведенной в [2], затруднительно [7, с. 201]. В [8] формула обращения приведена к виду, позволяющему строить численные алгоритмы. Другой способ построения численных алгоритмов трехмерной томографической реконструкции основан на результатах работ [5, 6, 9]. Из полученных там теорем следует, что для функций, имеющих финитный носитель, условие Кириллова — Туя не является необходимым, в частности, кривая движения источника может состоять из одной окружности. В [6] показано, что задача восстановления функции по ее интегралам вдоль прямых, проходящих через единичную окружность с центром в точке (0, 0, 0), лежащую в плоскости $z = 0$, может быть разделена на две части:

1. Восстановление по интегралам вдоль прямых, проходящих через окружность, интегралов вдоль прямых, проходящих через круг.

2. Восстановление функции по интегралам вдоль прямых, проходящих через круг.

Из результатов [9] следует, что задача в целом является неустойчивой в пространствах Соболева. Однако, как показывают результаты численных экспериментов, приводимые в настоящей работе, для первой части задачи могут быть построены вполне приемлемые по точности численные алгоритмы.

Как отмечено в [10], зная интегралы вдоль прямых, проходящих через два взаимно перпендикулярных единичных круга, лежащих в плоскостях $z = 0$ и $y = 0$, можно восстановить интегралы вдоль прямых, лежащих в любой плоскости, перпендикулярной оси OX и пересекающей объект. Этот прием в сочетании с численными алгоритмами, излагаемыми в настоящей работе, даст еще один класс численных алгоритмов восстановления функции в условиях Кириллова — Туя. Здесь важно то, что задача сводится к хорошо разработанному двумерному случаю. Результаты соответствующих модельных экспериментов приведены в [10—12]. Результаты, полученные в [6], справедливы для пространств размерности 3 и выше. При построении численных алгоритмов будем рассматривать функции трех переменных $f(x_1, x_2, z) = f(x, z)$.

Следуя [5], введем обозначения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + pz, z)dz = u(x, p),$$

здесь $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2)$. Отметим, что интегрирование ведется по dz, обычно в задачах томографии интегрируют по dl-элементу длины соответствующей прямой. В [5] решена задача восстановления функции $f(x, z)$ по функции

$$\varphi(x, p) = u(x, p)\Big|_{x \in \partial K,\, p \in R^2},$$

здесь ∂K — единичный круг. В первую очередь рассмотрим численные алгоритмы для первой части задачи, т. е. по функции $u(x, p) = u(x_1, x_2, p_1, p_2)$, известной в точках $|x| = 1$, $p \in R_2$, будем восстанавливать ее в точках $|x| < 1$, $p \in R_2$. В [5] получена явная формула для выражения $u(x, p)$ через $\varphi(x, p)$:

$$u(x, p) = \iint_{\partial K \times R_2} T(x, p, y, p')\varphi(y, p')d\Omega_y dp'.$$

Для рассматриваемого случая функций трех переменных ядро T имеет вид

$$T(x, p, y, p') = -\pi^{-2}|(x, x - y)(y, p - p') + (y, y - x)(x, p - p')|^{-2},$$

здесь (a, b) — скалярное произведение векторов a и b. Интеграл понимается в смысле аналитического продолжения. Используя прием, аналогичный изложенному в [13, 14], можно получить соответствующие численные алгоритмы. Однако для построения численных алгоритмов могут быть использованы и свойства преобразования Фурье функции $u(x, p)$, отмеченные в [6]. Наличие алгоритмов быстрого преобразования Фурье и соответствующих спецпроцессоров делает целесообразным рассмотрение подобных алгоритмов. Ниже будут приведены выражения для определения функции $u(x, p)$, учитывающие дискретность исходных данных и необходимость согласования со стандартными программами ДПФ.

Итак, пусть для $f(x_1, x_2, z)$ известна функция

$$u(x_1, x_2, p_1, p_2) = \int f(x_1 + p_1 z, x_2 + p_2 z, z)dz = \int f(x + pz)dz \tag{1}$$

при всех x, удовлетворяющих условию $|x| = 1$, и при всех p, принадлежащих R_2. Требуется найти функцию $u(x_1, x_2, p_1, p_2)$ для всех x, таких, что $|x| < 1$, и всех p, принадлежащих R_2. Следуя [6], рассмотрим $\tilde{u}(x, \omega)$ — преобразование Фурье от функции $u(x, p)$ по переменной p:

$$(\omega, p) = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2.$$

После замены $y = x + pz$ получаем

$$\tilde{u}(x, \omega) = \iint \left(\exp - \frac{i}{z} - ((\omega, y) - (\omega, x))\right) f(y, z)|z|^{-2}dydz. \tag{2}$$

Из формулы (2) видно, что $\tilde{u}(x, \omega) = \tilde{u}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$ — функция переменных $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ и $q = (\omega, x) = (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)$. Этот факт отмечен в [6] и может быть использован для восстановления функции $\tilde{u}(x, \omega)$ в точках $|x| < 1$ по значениям в точках $|x| = 1$. Отметим, что и в исходных данных, и в результате $\omega \in R_2$. Для нахождения функции $u(x, p)$ следует использовать обратное преобразование Фурье. Итак, для заданных $\omega \in R_2$ и x, такого, что $|x| < 1$, необходимо найти y, такое, что $(\omega, x) = (\omega, y)$ и $|y| = 1$. Это приводит к системе уравнений

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2, \qquad y_1^2 + y_2^2 = 1 \tag{3}$$

при условии $x_1^2 + x_2^2 < 1$.

Для решения системы (3) удобно перейти к полярным координатам. Пусть $x_1 = Rx\cos Fx$, $x_2 = Rx\sin Fx$, $\omega_1 = R\omega\cos F\omega$, $\omega_2 = R\omega\sin F\omega$, $y_1 = \cos Fy$, $y_2 = \sin Fy$. Для точки (0, 0) полярный угол полагаем равным нулю.

Система уравнений (3) сводится к уравнению

$$R\omega \times Rx \times \cos(Fx - F\omega) = R\omega \times \cos(Fy - F\omega). \tag{4}$$

Если $R\omega \neq 0$, то для нахождения Fy получаем

$$Fy = F\omega \pm \arccos(Rx \times \cos(Fx - F\omega)) = F\omega \pm \arccos(x_1\cos F\omega + x_2\sin F\omega). \tag{5}$$

Равенство (5) можно переписать в виде

$$Fy = F\omega \pm \arccos((x, \omega)/|\omega|). \tag{6}$$

Если $R\omega = 0$, т. е. $\omega_1 = \omega_2 = 0$, то решением уравнения (3) будет любое y, удовлетворяющее условию $|y| = 0$, или, что то же самое, любое Fy. Отсюда, в частности, следует, что выражение (5) справедливо при любом ω. Из (5) следует, что если Fy — решение уравнения (4), то $Fy_1 = 2F\omega - Fy$ — то же решение уравнения (4), кроме того, решениями будут величины вида $Fy \pm 2\pi k$, где k целое.

Комбинируя знаки в выражении (5), можно получать различные ветви решения. В частности, при отладке и тестировании программ желательно иметь ветвь решения, для которой выполняется равенство $Fx = Fy$ при $Rx = 1$. На такой ветви, задавая в качестве точки x одну из точек, в которой заданы исходные данные, мы должны получить их в качестве решения, что является хорошим тестом при отладке. Для дальнейшего нам потребуются равенства

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} 2\pi + x, & \text{если } -2\pi \le x \le -\pi, \\ -x, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ 2\pi - x, & \text{если } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Введем обозначения: $FD = Fx - F\omega$ и $Fy1 = F\omega + \arccos(Rx\cos FD)$. Рассмотрим ветвь решения уравнения (4), которая задается следующим образом:

$$Fy = \begin{cases} Fy1 - 2\pi, & \text{если } -2\pi < FD \le -\pi, \\ 2F\omega - Fy1, & \text{если } -\pi \le FD \le 0, \\ Fy1, & \text{если } 0 < FD < \pi, \\ 2F\omega - Fy1 - \pi, & \text{если } \pi \le FD \le 2\pi. \end{cases}$$

Для таким образом определенной ветви выполняется равенство $Fy = Fx$, если $Rx = 1$. Отметим, что для других ветвей в силу погрешностей счета решение, рассчитанное в точке наблюдения, может не совпадать с исходными данными в этой точке. Величина этого расхождения может использоваться для оценок ошибок, обусловленных дискретизацией.

Решениям (5) и (6) системы уравнений (3) можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Пусть заданы точки x и ω. Для нахождения решения следует через точку x провести прямую, перпендикулярную вектору ω, найти точки пересечения этой прямой с единичной окружностью: y и y'. Для точек x, y и y' выполняются равенства $\widetilde{u}(x, \omega) = \widetilde{u}(y, \omega) = \widetilde{u}(y', \omega)$. Приведем формулы для вычисления полярного угла точки x по ее декартовым координатам, необходимые для использования формул (5) и (6) при построении численных алгоритмов. Вычисляется главное значение полярного угла, лежащее в пределах $[0, 2\pi]$; $x_1 = |x|\cos\varphi$, $x_2 = |x|\sin\varphi$;

$$\begin{array}{ll}
\text{если } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 0, & \varphi = 0, \\
\text{если } x_1 = 0 \text{ и } x_2 > 0, & \varphi = \pi/2, \\
\text{если } x_1 = 0 \text{ и } x_2 < 0, & \varphi = \pi 3/2, \\
\text{если } x_1 > 0 \text{ и } x_2 \geq 0, & \varphi = \mathrm{arctg}(x_1/x_2), \\
\text{если } x_1 > 0 \text{ и } x_2 < 0, & \varphi = 2\pi + \mathrm{arctg}(x_2/x_1), \\
\text{если } x_1 < 0, & \varphi = \pi + \mathrm{arctg}(x_2/x_1).
\end{array}$$

Систему (3) можно решать и не переходя к полярным координатам, используя равенства $y_2^2 = 1 - y_1^2$, $(\omega_2 y_2)^2 = ((\omega, x) - \omega_1 y_1)^2$, эквивалентные системе (3) и сводящиеся к уравнению

$$|\omega| y_1^2 - 2\omega_1(\omega, x) y_1 + (\omega, x) - \omega_2^2 = 0.$$

Перейдем к дискретному варианту задачи. Целесообразно дать подробное описание алгоритма, которое может быть использовано при составлении программ на любом языке высокого уровня.

Пусть задан трехмерный массив $U(k1, k2, k0)$, $k1 = 1, \ldots, N1$, $k2 = 1, \ldots, N2$, $k0 = 1, \ldots, N0$ (как обычно, при применении БПФ $N1$, $N2$ — степени 2). Предполагается, что

$$\begin{gathered}
U(k1, k2, k0) = u(\cos\varphi_{k0}, \sin\varphi_{k0}, p_{k1}, p_{k2}), \\
\varphi_{k0} = (k0 - 1)2\pi/N0, \\
p_{k1} = A1 + (k1 - 1)(B1 - A1)/N1 = A1 + (k1 - 1)\delta 1, \\
p_{k2} = A2 + (k2 - 1)(B2 - A2)/N2 = A2 + (k2 - 1)\delta 2,
\end{gathered} \tag{7}$$

т. е. массив $U(k1, k2, k0)$ есть массив значений функции $u(\cos\varphi, \sin\varphi, p_1, p_2)$ с шагом $\delta\varphi$ по углу φ и шагами $\delta 1$ и $\delta 2$ по координатам p_1 и p_2. Наиболее важный случай, когда $A1 = A2 = -A$, $B1 = B2 = B > 0$, $N1 = N2 = N$. При построении численных алгоритмов предполагается, что значениями функции вне прямоугольника, заданного числами $(A1, A2, B1, B2)$, можно пренебречь. Отметим, что если функция $f(x, y, z)$ отделена от плоскости $z = 0$, т. е. существует h, такое, что $f(x, y, z) = 0$ при $|z| < h$, то можно указать квадрат в плоскости p_1, p_2, вне которого функция $u(\cos\varphi, \sin\varphi, p_1, p_2)$ равна нулю для всех φ. По заданному $x = (x_1, x_2)$, такому, что $|x| \leq 1$, нужно найти массив $Ux(k1, k2) = u(x_1, x_2, p_{k1}, p_{k2})$, $k1 = 1, \ldots, N1$, $k2 = 1, \ldots, N2$.

Итак, исходные данные: массив $U(k1, k2, k0)$; $N1$, $N2$, $N0$ — размерности массива ($N1$ и $N2$ — степени 2); $A1$, $A2$, $B1$, $B2$ — числа, ограничивающие прямоугольник по координатам p_1 и p_2 и задающие вместе с числами $N1$ и $N2$ шаги $\delta 1$ и $\delta 2$ по этим координатам; $x1$, $x2$ — числа, задающие точку, в которой вычисляется приближение.

Выходные данные: массив $Ux(k1, k2)$ размерностью $(N1, N2)$.

Шаг 1. Для всех $k0 = 1, \ldots, N0$ находим дискретное преобразование Фурье по переменным $k1$, $k2$. Получаем комплексный массив $FU(k1, k2, k0)$, $ki = 1, \ldots, Ni$, $i = 0, 1, 2$.

Шаг 2. По массиву $FU(k1, k2, k0)$ следует сформировать массив $FUx(k1, k2)$, используя формулу (5). Для каждого $k1 \in [1, N1]$, $k2 \in [1, N2]$ необходимо найти ω_1 и ω_2 — координаты, соответствующие отсчету с индексами $k1$, $k2$. Используя соотношения между дискретным и непрерывным преобразованиями Фурье, приведенные в [15], получаем

$$\omega_i = (2\pi/B_i - A_i)(N_i/2 - [N_i/2 - k_i + 1])\mathrm{sgp}(N_i/2 - k_i + 1), \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

здесь $[x]$ — целая часть x:

$$\mathrm{sgp}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для точки $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ находим полярный угол $F\omega$ и, пользуясь формулой (5), полагаем $Fy = F\omega + \arccos(x_1\cos F\omega + x_2\sin F\omega)$. Если Fy не принадлежит интервалу $[0, 2\pi)$, то, добавляя или отнимая 2π, нужно привести Fy к этим пределам. Затем следует положить

$$k0 = [Fy \times N0/2\pi] + 1, \qquad FUx(k1, k2) = FU(k1, k2, k0). \tag{9}$$

Приведенная выше формула для Fy при программировании удобна тем, что все случаи описываются единообразно. Для сокращения времени счета можно использовать формулу (6), но здесь нужно выделить случай $\omega = 0$ или, что то же самое, $k1 = k2 = 1$. В этом случае угол Fy и индекс $k0$ можно взять любыми. Например, можно положить $FUx(1, 1) = FU(1, 1, 1)$ для всех x. Если $k1 \neq 1$ или $k2 \neq 1$, то $Fy = F\omega + \arccos((x, \omega)/|\omega|)$, точка ω находится по формулам (8), величины $k0FUx(k1, k2)$ вычисляются по формулам (9). Шаг 2 закончен.

Шаг 3. Следует взять обратное дискретное преобразование Фурье от массива $FUx(k1, k2)$.

Для изложенного алгоритма было проведено численное моделирование. Восстанавливалась характеристическая функция цилиндра с параметрами $H1 = 0{,}1$, $H2 = 1{,}0$, $R = 1$. Количество углов 64, количество отсчетов при фиксированном значении угла 64×64. Восстановление производилось в точке $x = 0$ (в центре круга). Среднеквадратическая ошибка восстановления составила 10 %.

Изложенный алгоритм позволяет восстановить интегралы от функции $f(x_1, x_2, z)$ вдоль прямых, пересекающих единичный круг, по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих границу этого круга — единичную окружность. При любом фиксированном x_1 можно рассмотреть функцию двух переменных x_2 и z, получающуюся из функции $f(x_1, x_2, z)$. Если известны интегралы вдоль всех прямых, пересекающих единичный круг, то для функции двух переменных известны интегралы вдоль всех прямых, пересекающих отрезок $[-1, 1]$. В [6] показано, что этих интегралов достаточно для восстановления функции при выполнении определенных условий, которые заведомо выполняются для функций с финитным носителем, лежащим в полосе, образуемой прямыми $x_2 = -1$ и $x_2 = 1$. Отметим связь результатов работы [6] с теоремой Пэли — Винера, где показано, что указанная задача может быть сведена к следующей, названной задачей С. По заданной функции

$$u(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, s_1 + s_2x)dx \qquad (s_1 \in R_1,\ s_2 = [-1, 1])$$

найти $g(x_1, x_2)$ при условии, что $f(x_1, x_2) = 0$ при $|x_1/x_2| > 1$. Используя обычную форму преобразования Радона

$$\hat{g}(\xi, p) = \int g(x)\delta(p - (\xi, x))dx, \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2),$$

$$Rg(\varphi, p) = \hat{g}(\cos\varphi, \sin\varphi, p),$$

получаем

$$u(s_1, s_2) = \int g(x, s_1 + s_2x)dx = \int g(x_1, x_2)\delta(s_1 - ((-s_2)x_1 + x_2))dx_1dx_2 =$$

$$= \hat{g}(-s_2, 1, s_1) = (1 + s_2^2)^{-1/2}g(-s_2/(1 + s_2^2)^{-1/2}, 1/(1 + s_2^2)^{-1/2},$$

$$s_1/(1 + s_2^2)^{-1/2}) = (1 + s_2^2)^{-1/2}Rg(\varphi, s_1/(1 + s_2^2)^{-1/2}),$$

здесь φ — полярный угол точки $(-s_2, 1)$. Если ξ_2 изменяется в пределах $[-1, 1]$, то φ изменяется от $-\pi/4$ до $\pi/4$, а $p = s_1/(1 + s_2^2)^{-1/2}$ — в пределах $(-\infty, \infty)$ при $\xi_2 \in [-1, 1]$ и $\xi_1 \in R_1$. В [6] при сведении к задаче С для функции двух переменных функция $g(x_1, x_2)$ строится по исходной функции $f(x_1, x_2, z)$ таким образом, что g имеет финитный носитель, если f отделена от плоскости $z = 0$, т. е. существует h, такое, что $f(x_1, x_2, z) = 0$ при $|z| < h$. Итак, в задаче С функция g должна быть восстановлена по ее преобразованию Радона, заданному в полосе $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. Напомним, что полное преобразование Радона задается в полосе $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Для функций с финитным носителем, учитывая связь между преобразованиями Радона и Фурье, естественно обратиться к теореме Пэли — Винера. Докажем следующее

Предложение.

Если функция $f(x_1, x_2) \in L_2(R_2)$ имеет финитный носитель и существуют такие φ_1 и φ_2, что для всех $p \in R_1$ и $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ $Rf(\varphi, p) = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Действительно, пусть $\tilde{f}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$. В [16, с. 19] показано, что для любого фиксированного α выполняется равенство $\tilde{f}(\alpha\xi) = \int \hat{f}(\xi, p)e^{i\alpha p}dp$, которое можно переписать в виде

$$\tilde{f}(\alpha\cos\varphi, \alpha\sin\varphi) = \int Rf(\varphi, p)e^{i\alpha p}dp,$$

т. е. для того чтобы получить двумерное преобразование Фурье от $f(x_1, x_2)$ на луче с углом φ, нужно взять одномерное преобразование Фурье от преобразования Радона на линии, соответствующей углу φ.

Таким образом, если $Rf(\varphi, p)$ — преобразование Радона функции $f(x_1, x_2)$ — равно нулю внутри полосы $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, то $\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)$ — преобразование Фурье от той же функции — равно нулю для всех точек, лежащих внутри угла $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Если функция $f(x_1, x_2)$ имеет финитный носитель, то по теореме Пэли — Винера $\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)$ ее преобразование Фурье является целой функцией экспоненциального типа. Однако если целая функция $\tilde{f}(z_1, z_2)$ комплексных переменных равна нулю при всех действительных ξ_1, ξ_2, лежащих внутри угла $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, т. е. имеющих вид $\xi_1 = \alpha\cos\varphi$, $\xi_2 = \alpha\sin\varphi$, $\alpha \in R_1$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то $\tilde{f}(z_1, z_2)$ тождественно равна нулю. Таким образом, в условиях нашего предложения $\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)$, а следовательно, и $f(x_1, x_2)$ тождественно равны нулю.

Факт принципиальной возможности восстановления функций с финитным носителем по значениям преобразования Радона в узкой полосе по углу φ хорошо известен. Например, для непрерывных функций соответствующее утверждение содержится в теореме о носителе [17, с. 26]. Наша цель заключалась в том, чтобы показать связь задач, возникающих при построении численных алгоритмов трехмерной реконструкции на основании результатов [6], с этим фактом и теоремой Пэли — Винера для прояснения характера возникающих здесь неустойчивостей. Связь теоремы Пэли — Винера с задачами восстановления функций, имеющих финитный носитель, при условии, что кривая движения источника не удовлетворяет условиям Кириллова — Туя, отмечена также в [9]. Следует отметить также, что в некоторых приложениях функции из L_2 предпочтительнее, чем непрерывные, так как пустоты и инородные включения приводят к разрывам плотности.

При получении томографических проекционных данных в некоторых случаях используется следующая схема. Веерный источник и приемник дискретно перемещаются вдоль некоторой прямой, это движение от начального положения до конечного называется траверсом. После окончания движения объект поворачивается и начинается новый траверс. В этой схеме за время одного траверса получаются данные преобразования Радона внутри некоторой полосы, ширина которой равна максимальному углу между лучами источника. Изложенное выше означает, что в веерной схеме можно обойтись без вращений объекта или уменьшить их количество. Это позволяет ставить задачу об оптимальных соотношениях между точностью решения и количеством измерений, сокращение которых в рентгеновской томографии имеет принципиальное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов А. А. Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР.—1961.—137, № 2.
2. Tuy H. K. An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM. J. Appl. Math.—1983.—43, N 3.—P. 546.
3. Гельфанд И. М., Гончаров А. Б. Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // ДАН СССР.—1986.—290, № 5.
4. Орлов С. С. Теория трехмерной реконструкции. Оператор восстановления // Кристаллография.—1975.—20, № 4.
5. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1978.
6. Благовещенский А. С. О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. заметки.—1986.—39, № 6.
7. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.
8. Трофимов О. Е. К задаче восстановления функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Автометрия.—1991.—№ 5.
9. Finch D. V. Cone beam reconstruction with sources on a curve // SIAM. J. Appl. Math.—1985.—45, N 4.—P. 665.
10. Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. Алгоритмы решения обратной задачи рентгеновской томографии // 4-й Всесоюз. симп. по вычислительной томографии: Тез. докл.—Ташкент; Новосибирск, 1989.
11. Трофимов О. Е. Численное восстановление интегралов от функции трех переменных вдоль прямых, проходящих через круг, по интегралам от той же функции вдоль прямых, проходящих через окружность // Там же.
12. Трофимов О. Е. Численное восстановление интегралов от функции трех переменных вдоль прямых, проходящих через круг, по интегралам от той же функции вдоль прямых, проходящих через окружность.—Новосибирск, 1989.—(Препр. ИАиЭ СО АН СССР; 427).
13. Жирнов В. Т., Смирнов К. К., Трофимов О. Е. О численных методах решения задач томографии // Методы и средства обработки изображений.—Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1982.
14. Трофимов О. Е., Тюренкова Л. В. Об одном способе численного восстановления изображения по многоракурсной томограмме.—Новосибирск, 1989.—(Препр. ИАиЭ СО АН СССР; 440).
15. Трофимов О. Е. Соотношение между дискретным и непрерывным преобразованиями Фурье // Там же; 424.
16. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции.—М.: Физматгиз, 1962.—Вып. 5: Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.
17. Хелгасон С. Преобразование Радона.—М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 10 августа 1991 г.

УДК 616.07

М. И. Троицкая, А. Ю. Харитонов

(Москва)

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО ПАРАМЕТРА ЭМИССИОННОЙ РЕКОНСТРУКТИВНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Для однофотонного метода исследуется интегральное среднеквадратическое отклонение восстанавливаемого изображения от истинного. Приводятся математические соотношения, позволяющие определить значение регуляризирующего параметра.

Постановка задачи. В различных задачах технической и медицинской диагностик часто используются методы эмиссионной реконструктивной вычислительной томографии. Область их применения чрезвычайно широка: