РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1992

КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.95 : 681.3

Е. Н. Дудник, С. В. Клишин

(Ижевск)

ПОВЫШЕНИЕ РЕЗКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ КОНВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Разработаны методы повышения резкости цифровых изображений с помощью конволюционных операторов, т. е. операторов с ленточными матрицами, матричные элементы которых однозначно определяются разностью индексов. Эти методы позволяют заметно сократить количество вычислительных операций и обеспечивают экономию памяти ЭВМ.

Введение. Миниатюризация интегральных микросхем (ИС) подошла к рубежу, где размеры элементов ИС становятся сравнимы с длиной световой волны. Следствием этого является размытие изображений при использовании оптических систем. В связи с указанным возникает задача повышения резкости изображений ИС, причем существенно, что используемая вычислительная техника должна быть достаточно дешевой, а алгоритмы должны работать в темпе технологического процесса.

Алгоритмы повышения резкости изображений можно сделать достаточно быстрыми и простыми, если использовать дискретные конволюционные операторы, т. е. операторы с ленточными матрицами, матричные элементы которых однозначно определяются разностью индексов.

Характерная схема преобразования изображения оптической системой имеет вид

$$\xi(x, y) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} w(x, y, x', y') f(x', y') dx'dy' + \nu(x, y), \qquad (1)$$

где $f(x', y')$ и $\xi(x, y)$ — изображения на входе и выходе оптической системы соответственно; $\nu(x, y)$ — шум; $w(x, y, x', y')$ — импульсный отклик системы; $x_1 < x' < x_2$, $y_1 \le y' < y_2$ — прямоугольник, на котором расположено изображение. Далее всюду будут рассматриваться изопланарные оптические системы с узким импульсным откликом:

$$w(x, y, x', y') = \begin{cases} a(x' - x, y' - y), & P(|x' - x|, |y' - y|) \in \Pi\,(\Delta x, \Delta y), \\ 0, & P(|x' - x|, |y' - y|) \,\overline{\in}\, \Pi\,(\Delta x, \Delta y), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\Pi\,(\Delta x, \Delta y)$ — замкнутый прямоугольник, состоящий из точек $P(x, y)$ с координатами $0 < x < \Delta x$, $0 < y \le \Delta y$; $\overline{\in}$ — символ, означающий, что элемент не принадлежит множеству, причем $2\Delta x < x_2 - x_1$, $2\Delta y < y_2 - y_1$.

Разбив отрезки $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ на N_1 и N_2 равных частей соответственно, перейдем к дискретному представлению; схема (1) и формула (2) примут вид

$$\xi_{ij} = \sum_{k=1}^{N1} \sum_{l=1}^{N2} w_{ijkl} f_{kl} + \nu_{ij}, \tag{3}$$

$$W_{ijkl} = \begin{cases} d_{k-i}^{l-j}, & P(|k-i|, |l-j|) \in \Pi(M_1, M_2), \\ 0, & P(|k-i|, |l-j|) \overline{\in} \Pi(M_1, M_2). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь предполагается, что при выбранном разбиении отрезки $[-\Delta x, \Delta x]$ и $[-\Delta y, \Delta y]$ оказались разбиты на $2M_1 + 1$ и $2M_2 + 1$ равных частей соответственно.

В дальнейшем ξ_{ij}, f_{ij}, ν_{ij} рассматриваются как элементы евклидова пространства H_n и называются 2-векторами, поскольку зависят от двух индексов. Аналогично w_{ijkl} называется 4-матрицей, соответствующей линейному оператору $W \in (H_n \to H_n)$. Основные определения в евклидовом пространстве H_n: 1) скалярное произведение двух 2-векторов: $(f, \xi) = \sum_{i=1}^{N1} \sum_{j=1}^{N2} f_{ij}\xi_{ij}$; 2) норма 2-вектора: $\| f \| = \sqrt{(f, f)}$; 3) произведение операторов: $(VW)_{ijkl} = \sum_{m=1}^{N1} \sum_{n=1}^{N2} v_{ijmn} w_{mnkl}$; 4) оператор W^*, сопряженный с оператором W: $w^*_{ijkl} = w_{klij}$; 5) след оператора: $\mathrm{tr} W = \sum_{i=1}^{N1} \sum_{j=1}^{N2} w_{ijij}$; 6) норма Гильберта — Шмидта: $\|W\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}\, WW^*}$; 7) единичный оператор I: $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, δ_{ik} и δ_{jl} — символы Кронекера.

Настоящая работа представляет собой логическое продолжение и теоретическое развитие идей, изложенных в [1]. Задача о восстановлении резкого изображения f по размытому ξ состоит в отыскании оператора $R \in (H_n \to H_n)$ линейного преобразования $R\xi$, которое служит в известном смысле наилучшей оценкой f. Методы решения таких задач широко известны [2—5] и пригодны для произвольных линейных операторов W. Для случая дискретных конволюционных операторов W вида (4) здесь предлагается иной метод, обеспечивающий высокую скорость при реализации на ЭВМ и экономию машинной памяти. В основе метода лежат те же принципы, что и в методе редукции [3 — 5], но отличие состоит в том, что при решении соответствующих задач на минимум оператор редукции варьируется не по всему пространству $(H_n \to H_n)$, а по его $(2K_1 + 1)(2K_2 + 1)$-мерному подпространству $H_k \subset (H_n \to H_n)$ (подпространству конволюционных операторов).

Другими словами, вместо $R \in (H_n \to H_n)$ отыскивается $V \in H_k$, 4-матрица которого задается формулой

$$v_{ijkl} = \begin{cases} b_{k-i}^{l-j}, & P(|k-i|, |l-j|) \in \Pi(K_1, K_2), \\ 0, & P(|k-i|, |l-j|) \overline{\in} \Pi(K_1, K_2). \end{cases} \tag{5}$$

Повышение резкости априори произвольных изображений. Пусть в схеме (3) известны оператор $W \in H_m \subset (H_n \to H_n)$ и корреляционный оператор шума $\Sigma \in (H_n \to H_n)$, определяемый соотношением $(\Sigma r_1, r_2) = E(\nu, r_1)(\nu, r_2)$; $r_1, r_2 \in H_n$, E — символ математического ожидания, H_m — $(2M_1 + 1) \times (2M_2 + 1)$-мерное подпространство конволюционных операторов. Какая-либо априорная информация о 2-векторе f отсутствует. Относительно 2-вектора ν предполагается $E\nu = 0$. В этом случае считают, что задана модель $[W, \Sigma]$ схемы (3).

В модели $[W, \Sigma]$ естественна следующая постановка задачи отыскания конволюционного оператора редукции V:

$$\inf\left\{ \| V'W - I \|_2^2 \mid V' \in H_k \right\} = \|VW - I\|_2^2 = g. \tag{6}$$

Если V — решение (6), то оценка

$$f_* = V\xi = VWf + V\nu = f + (VW - I)f + V\nu$$

отличается от 2-вектора f за счет шумовой погрешности $V\nu$ и погрешности $(VW - I)f$. Величину шума $V\nu$ можно охарактеризовать энергией $h = E\|V\nu\|^2 = \|V\Sigma^{1/2}\|_2^2 = \operatorname{tr} V\Sigma V^*$. Что касается погрешности $(VW - I)f$, то она зависит не только от невязки g, но и от неизвестного 2-вектора f и, следовательно, не поддается оцениванию. Оценка $f_* = V\xi$ является наилучшей в том смысле, что оператор V обеспечивает минимальность невязки g.

Для дальнейшего удобно преобразовать матрицу b_α^β, фигурирующую в формуле (5), в вектор b_λ путем перехода от пары индексов α, β к одному индексу $\lambda = t\alpha + \beta$, где $t = 2K_2 + 1$, $\alpha = -K_1, \ldots, +K_1$, $\beta = -K_2, \ldots, +K_2$, $\lambda = -K, \ldots, +K$, $K = ((2K_1 + 1)(2K_2 + 1) - 1)/2$. Можно доказать, что обратный переход от λ к паре индексов α, β, обеспечивающий однозначное соответствие, осуществляется с помощью формул

$$\beta = \beta(\lambda) = \begin{cases} \lambda - [\lambda/t]t, & \lambda - [\lambda/t]t \le K_2, \\ \lambda - ([\lambda/t] + 1)t, & \lambda - [\lambda/t]t > K_2, \end{cases} \tag{7}$$

$$\alpha = \alpha(\lambda) = (\lambda - \beta(\lambda))/t, \tag{8}$$

где $[\cdot]$ — символ выделения целой части вещественного числа. Элементы 4-матрицы оператора V связаны с компонентами вектора b_λ посредством формулы

$$\mathrm{v}_{ijkl} = \begin{cases} b_{t(k-i)+l-j}, & P(|k - i|, |l - j|) \in \Pi(K_1, K_2), \\ 0, & P(|k - i|, |l - j|) \overline{\in} \Pi(K_1, K_2). \end{cases} \tag{9}$$

В формулируемой ниже теореме, дающей решение вариационной задачи (6), используются следующие обозначения:

$$J_1 = \max\{1, 1 - \alpha(\lambda), 1 - \gamma(\mu)\}, \quad J_2 = \min\{N_1, N_1 - \alpha(\lambda), N_1 - \gamma(\mu)\},$$

$$L_1 = \max\{1, 1 - \beta(\lambda), 1 - \delta(\mu)\}, \quad L_2 = \min\{N_2, N_2 - \beta(\lambda), N_2 - \delta(\mu)\},$$

$$J_3 = \max\{1, i + \alpha(\lambda) - M_1, i + \gamma(\mu) - M_1\},$$

$$J_4 = \min\{N_1, i + \alpha(\lambda) + M_1, i + \gamma(\mu) + M_1\},$$

$$L_3 = \max\{1, j + \beta(\lambda) - M_2, j + \delta(\mu) - M_2\},$$

$$L_4 = \min\{N_2, j + \beta(\lambda) + M_2, j + \delta(\mu) + M_2\},$$

где функции $\beta(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ определены формулами (7) и (8), функции $\delta(\mu)$ и $\gamma(\mu)$ определяются аналогично, достаточно лишь заменить δ на β, γ на α, μ на λ.

Теорема 1. Пусть $2K_1 + 1 < N_1$, $2K_2 + 1 < N_2$ и не вырождена матрица S с элементами

$$s_{\lambda\mu} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=J_1}^{J_2} \sum_{j=L_1}^{L_2} \sum_{k=J_3}^{J_4} \sum_{l=L_3}^{L_4} a_{k-i-\alpha(\lambda)}^{l-j-\beta(\lambda)} \, a_{k-i-\gamma(\mu)}^{l-j-\delta(\mu)}, \\ P(|\alpha - \gamma|, |\beta - \delta|) \in \Pi(2M_1, 2M_2), \\ 0, \; P(|\alpha - \gamma|, |\beta - \delta|) \overline{\in} \Pi(2M_1, 2M_2). \end{cases}$$

Тогда существует единственное решение V вариационной задачи (6) и вектор b, через который выражается 4-матрица оператора V (формула (9)), имеет вид $b = S^{-1}q$, где q — вектор с компонентами

$$q_\lambda = \begin{cases} (N_1 - |\alpha(\lambda)|)(N_2 - |\beta(\lambda)|)a_{-\alpha(\lambda)}^{-\beta(\lambda)}, & P(|\alpha|, |\beta|) \in \Pi(M_1, M_2), \\ 0, & P(|\alpha|, |\beta|) \overline{\in} \Pi(M_1, M_2). \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\partial g}{\partial b_\lambda} = \frac{\partial}{\partial b_\lambda}\|VW - I\|_2^2 = 2\sum_{\mu=-K}^{K} s_{\lambda\mu} b_\mu - 2q_\lambda ,$$

то уравнение Эйлера выпуклой задачи (6) имеет вид $Sb - q = 0$, откуда $b = S^{-1}q$.

Повышение резкости изображений при наличии априорной информации. Пусть изображение f принадлежит классу изображений, детали которых отличаются случайным образом и контролируются некоторым распределением. В этом случае говорят, что задана модель $[W, \Sigma, F, f_0]$ схемы (3). Обозначим $\varphi = f - f_0$, $\kappa = \xi - Wf_0$ и запишем схему (3) по-другому:

$$\kappa = W\varphi + \nu. \tag{10}$$

Если будет получена оценка $\varphi_* = V\kappa = V(\xi - Wf_0)$, то оценка f_* 2-вектора f вычисляется по формуле $f_* = \varphi_* + f_0 = V(\xi - Wf_0) + f_0$.

Оператор V естественно выбирать из соображений минимальности полной погрешности $h = E\|V\kappa - \varphi\|^2$, т. е. как решение вариационной задачи:

$$\inf\left\{E\|V'\kappa - \varphi\|^2 \mid V' \in H_k\right\} = E\|V\kappa - \varphi\|^2 = h. \tag{11}$$

В теореме, формулируемой ниже, используются следующие обозначения:

$$J_3 = \max\left\{1,\ i + \gamma(\mu) - M_1\right\},\ J_4 = \min\left\{N_1,\ i + \gamma(\mu) + M_1\right\},$$
$$L_3 = \max\left\{1,\ j + \delta(\mu) - M_2\right\},\ L_4 = \min\left\{N_2,\ j + \delta(\mu) + M_2\right\},$$
$$J_5 = \max\left\{1,\ i + \alpha(\lambda) - M_1\right\},\ J_6 = \min\left\{N_1,\ i + \alpha(\lambda) + M_1\right\},$$
$$L_5 = \max\left\{1,\ j + \beta(\lambda) - M_2\right\},\ L_6 = \min\left\{N_2,\ j + \beta(\lambda) + M_2\right\},$$
$$J_7 = \max\left\{1,\ 1 - \alpha(\lambda)\right\},\ J_8 = \min\left\{N_1,\ N_1 - \alpha(\lambda)\right\},$$
$$L_7 = \max\left\{1,\ 1 - \beta(\lambda)\right\},\ L_8 = \min\left\{N_2,\ N_2 - \beta(\lambda)\right\}.$$

Теорема 2. Пусть $2K_1 + 1 < N_1$, $2K_2 + 1 < N_2$ и не вырождена матрица S с элементами

$$s_{\lambda\mu} = \sum_{i=J_1}^{J_2} \sum_{j=L_1}^{L_2} \left(\sum_{k=J_3}^{J_4} \sum_{l=L_3}^{L_4} a_{k-i-\gamma(\mu)}^{l-j-\delta(\mu)} \sum_{m=J_5}^{J_6} \sum_{n=L_5}^{L_6} F_{klmn} a_{m-i-\alpha(\lambda)}^{n-j-\beta(\lambda)} + \sigma_{i+\gamma(\mu),\, j+\delta(\mu),\, i+\alpha(\lambda),\, j+\beta(\lambda)} \right),$$

где J_1, J_2, L_1, L_2, $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\gamma(\mu)$, $\delta(\mu)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1; σ_{ijkl} — матричные элементы оператора Σ. Тогда существует единственное решение V вариационной задачи (11) и вектор b, через который выражается V (формула (9,), имеет вид $b = S^{-1}q$, где q — вектор с компонентами

$$q_\lambda = \sum_{i=J_7}^{J_8} \sum_{j=L_7}^{L_8} \sum_{m=J_5}^{J_6} \sum_{n=L_5}^{L_6} F_{ijmn} a_{m-i-\alpha(\lambda)}^{n-j-\beta(\lambda)} .$$

Доказательство. Так как случайные 2-векторы φ и ν независимы, то полная погрешность

$$h = E\|V\kappa - \varphi\|^2 = E\|(VW - I)\varphi + V\nu\|^2$$

может быть представлена в виде

$$h = E\|(VW - I)\varphi\|^2 + E\|V\nu\|^2 = \|(VW - I)F^{1/2}\|_2^2 + \|V\Sigma^{1/2}\|_2^2 =$$

$$= \mathrm{tr}(VW - I)F(VW - I)^* + \mathrm{tr}V\Sigma V^*.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial b_\lambda} = \frac{\partial}{\partial b_\lambda}\left\{\mathrm{tr}(VW - I)F(VW - I)^* + \mathrm{tr}V\Sigma V^*\right\} = 2\sum_{\mu=-K}^{K} s_{\lambda\mu} b_\mu - 2q_\lambda.$$

Дальнейший ход рассуждений аналогичен доказательству предыдущей теоремы.

Заключение. В изложенном методе конволюционной редукции не говорилось достаточно подробно о выборе параметров K_1 и K_2. Как показывают вычислительные эксперименты, выполненные в [1], K_1 и K_2 должны быть больше M_1 и M_2 соответственно; в этом случае оценка f_* почти совпадает с f.

Можно показать, что число операций умножения и сложения при вычислении $f_* = v\xi$ не превышает $(2K + 1)N_1N_2$. Следовательно, при $2K + 1 < \log_2 N_1 \cdot \log_2 N_2$ использование дискретных конволюционных операторов обеспечивает более высокую скорость по сравнению с методом инверсной фильтрации на базе алгоритмов БПФ. Кроме того, изложенный в настоящей работе метод позволяет использовать априорную информацию, имеющуюся в модели $[W, \Sigma, F, f_0]$.

В процессе вычисления вектора b нужно обращать квадратную матрицу S, состоящую из $2K + 1$ строк. В методах [2 — 4] пришлось бы обращать матрицу, состоящую из N_1N_2 строк, что могло бы вызвать серьезные затруднения. Действительно, пусть, например, $N_1 = N_2 = 10^3$, $K_1 = K_2 = 7$, тогда S состоит из $2K + 1 = 225$ строк, что много меньше $N_1N_2 = 10^6$.

Метод конволюционной редукции позволяет экономить машинную память. Нет необходимости хранить большие массивы w_{ijkl} и v_{ijkl}, поскольку они выражаются через d_α^β и b_λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дудник Е. Н., Якимов И. Д.** Построение сверхбыстрых алгоритмов восстановления одномерных образов // Дискретные системы обработки информации: Межвуз. сб.—Ижевск: Ижевск. мех. ин-т, 1983.
2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1986.
3. **Пытьев Ю. П.** Псевдообратный оператор. Свойства и применения // Матем. сб.—1982.—118(160), № 1 (5).
4. **Пытьев Ю. П.** Задачи редукции в экспериментальных исследованиях // Матем. сб.—1983.—120(162), № 2.
5. **Пытьев Ю. П.** Методы редукции измерений в гильбертовых пространствах // Матем. сб.—1985.—126(168), № 4.

Поступила в редакцию 5 марта 1990 г.

УДК 535.317.25

Ф. М. Завьялкин, В. А. Удод

(Томск)

МАКСИМАЛЬНАЯ РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ИЗОБРАЖАЮЩИХ СИСТЕМ, ДОСТИГАЕМАЯ ПРИ АПОСТЕРИОРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрены изображающие системы с модельной структурой: исходное идеальное изображение — заданный искажающий линейный фильтр — заданный аддитивный шум — корректирующий линейный фильтр — выходное изображение. Установлена максимальная разрешающая способность таких систем, достигаемая при оптимальном выборе корректирующего фильтра. Указана область преимущественного использования полученных результатов.