

3. Andersen H. H., Ziegler J. F. Hydrogen Stopping Powers and Ranges in All Elements.—N.Y.: Pergamon Press, 1977.
4. Ziegler J. F. et al. The Stopping and Range of Ions in Solids.—N.Y.: Pergamon Press, 1985.
5. Андросенко А. А., Андросенко П. А., Полетаев Е. Д. Применение метода Монте-Карло для оценки пространственно-временного распределения энерговклада осколков деления.—Обнинск, 1989.—(Препр. ФЭИ; 1968).
6. Biersack J. P., Haggmark L. G. A Monte-Carlo computer program for the transport of energetic ions in amorphous targets // Nucl. Instrum. & Meth.—1980.—174.—P. 257.
7. Biersack J. P. et al. Rapid computable formulas for the classical binary collision parameters τ and θ // Radiat. Eff. Lett.—1985.—85.—P. 193.
8. Ziegler J. F., Biersack J. P., Littmark U. Stopping Powers and Ranges of Ions in Matter /Ed. J. F. Ziegler.—N.Y.: Pergamon Press, 1985.—Vol. 1.

Поступила в редакцию 11 ноября 1991 г.

УДК 621.382.323 : 519

П. П. Люмаров

(Новосибирск)

МОНОТОННЫЕ СПЛАЙНЫ НА АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОП-МОДЕЛЕЙ

Типичными недостатками табличных моделей являются значительные относительные погрешности токов в окрестности пороговых напряжений и трудности в обеспечении монотонной интерполяции. Применение сглаживающих алгоритмов, обеспечивающих монотонность, часто обостряет проблему точности моделей. Построением оригинальных адаптивных сеток и комбинированием монотонной бикубической интерполяции со сглаживающей параболической аппроксимацией обеспечивается значительный прогресс в решении этих двух проблем одновременно.

Введение. При переходе к субмикронным размерам элементов МОП СБИС поддержание требуемой точности аналитических моделей становится все более трудной задачей. Поэтому перспективной является разработка моделей, основанных на алгоритмах многомерной интерполяции «экспериментальных» токовых значений, полученных с помощью тестовых транзисторов или программ приборного моделирования. Аргументы модели для программы схемного моделирования делятся на управляющие переменные U_D , U_B , U_G (меняются в процессе расчета схемы) и конструктивно-электрофизические параметры, сохраняющиеся в процессе моделирования. Напряжение U_D (сток — исток) обозначим через x , напряжение U_B (подложка — исток) — через y , напряжение U_G (затвор — исток) — через z . U_D всегда > 0 , поэтому ниже под всей областью управляющих переменных R^3 будет пониматься только ее верхняя половина $x > 0$.

Основные проблемы интерполяционных моделей МОП-транзистора — обеспечение монотонности и неотрицательности токового интерполянта и его продолжения на всей области R^3 для сходимости ньютоновских итераций при расчете схем и снижение относительной точности интерполяции при малых токах, т. е. в окрестности границы носителя токовой функции.

Продолжение токового интерполянта, удовлетворяющее условиям неотрицательности, гладкости класса C^1 и монотонности во всей R^3 , в дальнейшем будем называть допустимым.

В [1] использовались сглаживающие параболические сплайны, обеспечивающие монотонность интерполянта при монотонности исходных данных. Основным недостатком этого подхода связан с нарушением условия неотрицательности продолжения токовой функции и неточностью ее аппроксимации в припороговой области затворных напряжений. Вызвано это использованием прямоугольных токовых сеток, не совпадающих с границей носителя функ-

ции, и линейным продолжением по приграничным данным, а не с помощью граничных производных. Последнее дополнительно ухудшает точность интерполяции в окрестности границы носителя токовой функции.

В [2] предложена оригинальная конструкция монотонных параболических сплайнов, устойчивая к значительным погрешностям в данных и эффективная по времени выполнения, однако ей присущи все недостатки предыдущей работы и требуется неприемлемо большое время препроцессорной оптимизации параметров сплайна (например, для сетки, содержащей $7 \times 7 \times 3$ сегментов, время оптимизации 722 мин).

Данная работа развивает подход [3], при котором с помощью преобразования управляющих переменных (x, y, z) во внутренние переменные (ξ, η, ζ) удастся отобразить криволинейную область, одна из границ которой совпадает с носителем токовой функции, в требуемую для сплайнов тензорного произведения, прямоугольную. В основе преобразования переменных (x, y, z) в (ξ, η, ζ) лежит пороговая функция двух переменных $V_{TH}(x, y)$. Типичное выражение функции V_{TH} малоразмерной аналитической модели приведено в [4]. В рассматриваемой модели при построении токовой сетки трех переменных, а также при интерполяции токовой функции вначале выполняется интерполяция $V_{TH}(x, y)$ на прямоугольной области. Совмещение границы носителя токовой функции с одной из границ области интерполяции повышает информативность токовой сетки, обеспечивает допустимое продолжение интерполянта и увеличивает его точность.

В данной работе решена проблема монотонности интерполянта и его продолжения во всей R^3 , а не только вдоль направлений, проходящих через узлы сетки, и за счет оригинальных адаптивных сеток удалось при общем сокращении числа узлов интерполяции повысить точность модели в окрестности границы носителя токовой функции, т. е. расширить диапазон разброса токов, уверенно воспроизводимых моделью, с 2 до 4 порядков.

Предположив, что токовые и пороговые функции принадлежат классу $W_{\infty}^2[a, b]$, воспользуемся известной оценкой точности интерполяции ϵ таких функций эрмитовыми кубическими сплайнами: $\epsilon \approx h^2 |f''(x)|_{\infty} \approx h^2 k$, где h — шаг интерполяции, k — кривизна функции. Эта обратная пропорциональность шага от кривизны (при фиксированной точности) будет учитываться в эмпирических алгоритмах выбора шагов сетки.

1. Аппроксимация сплайнами пороговых напряжений. Функция $V_{TH}(x, y)$ определена на области $[0, x_{\max}] [y_{\min}, 0]$. В соответствии с кривизной реальной функции V_{TH} шаг сетки по координате x плавно возрастает с ростом x и в среднем в 3—5 раз больше, чем шаг по координате y , который плавно убывает с ростом y и имеет минимальное значение при $y = y_{\max} = 0$. Чтобы избежать лишних затрат, связанных с поиском сегментов интерполяции в неравномерной сетке, а также с затратами на расчет по более громоздким формулам аппроксимации, выполним замену переменных (x, y) в переменные (ω, τ) с равномерной сеткой (будем называть их внутренними переменными пороговой сетки). Приведем один из возможных эмпирических алгоритмов, удовлетворяющий перечисленным требованиям:

$$x = \omega_{\max} \frac{(1 + \omega/D_{\omega})^2 - 1}{(1 + \omega_{\max}/D_{\omega})^2 - 1}; \quad (1)$$

$$y = -\tau_{\max} \frac{1 - (1 + (\tau_{\max} - \tau)/D_{\tau})^2}{1 - (1 + \tau_{\max}/D_{\tau})^2}. \quad (2)$$

В этих формулах параметры D_{ω} и D_{τ} , задающие нелинейность преобразований, подбираются эмпирически в соответствии с кривизной функции V_{TH} . Чем больше D_{ω} и D_{τ} , тем ближе сетка (x, y) к равномерной. Значениям $\omega = 0$ и $\tau = 0$ соответствуют $x = 0$ и $y = -\tau_{\max} = y_{\min}$; $\omega = \omega_{\max}$ и $\tau = \tau_{\max}$ соответствуют $x = x_{\max}$ и $y = y_{\max} = 0$. При убывании $D_{\omega}(D_{\tau})$ до значений порядка 0,2—0,5 (при $\omega_{\max} = 6$) в деформации шагов наступает насыщение, однако на практике той степени деформации, которую дают формулы (1) и (2), достаточно. В [3] приведены формулы (2), (3) с неограниченными возможностями по степени

деформации, но менее удобные в вычислительном отношении, так как содержат экспоненту.

Координаты узлов прямоугольной неравномерной сетки $[x_i, y_j]$ получают при подстановке в (1), (2) узлов равномерной сетки $[\omega_i, \tau_j]$. Перед выполнением аппроксимации (интерполяции) на сетке $[\omega, \tau]$ по заданной точке (x, y) с помощью формул, обратных (1) и (2), определяется (ω, τ) . За пределами пороговой сетки выполняется линейная экстраполяция соответствующей переменной. Интерполянт пороговой функции и его гладкое продолжение должны быть монотонными в области R^2 . Интерполяция $V(\omega, \tau)$ может выполняться с помощью как монотонных бикубических сплайнов, так и базисных сглаживающих бипараболических сплайнов. Пороговая сетка для интерполяционных сплайнов требует в 4 раза больше памяти за счет массивов производных и обеспечивает в среднем на порядок более высокую точность. Поэтому при наличии точных пороговых и токовых сеточных данных предпочтение отдается бикубической интерполяции. Алгоритмы сглаживающей бипараболической аппроксимации и монотонной бикубической интерполяции на прямоугольных сетках можно найти в [1] и [5] соответственно.

Полученное значение функции $V(\omega, \tau)$ совпадает со значением $V_{TH}(x, y)$. Производные $\partial V_{TH}(x, y)/\partial x$ и $\partial V_{TH}(x, y)/\partial y$ рассчитываются как производные сложной функции с помощью V'_ω, V'_τ и частных производных от формул, обратных (1), (2). Так как (1), (2) и интерполянт $V(\omega, \tau)$ монотонны в R^2 , то и $V_{TH}(x, y)$ будет монотонной в R^2 .

В системе предусмотрено повторное измерение пороговых сеточных напряжений при нарушении их монотонности, хотя на практике такая ситуация не встречается.

2. Построение адаптивной сетки. Переход к эффективному затворному напряжению v осуществляется сдвигом абсолютного затворного напряжения z на величину порогового напряжения: $v = z - V_{TH}(x, y)$. В результате такого преобразования полупространство (x, y, v) (где $v > 0$, а x, y любые) совпадает с носителем токовой функции. В новых переменных токовая функция $\varphi(x, y, v)$ в отличие от исходной $F(x, y, z)$ слабо зависит от y . Будем называть направление у линией уровня $\varphi(x, y, v)$. Сетка по переменным v и y выбирается неравномерной в соответствии с кривизной $\varphi(x, y, v)$. Преобразование переменных v и y в ξ и η по формулам, обратным (1) и (2) (с заменой в них ω, D_ω и ω_{\max} на ξ, D_ξ, ξ_{\max} , а τ, D_τ и τ_{\max} на η, D_η и η_{\max}), позволит получить токовую функцию $\Theta(x, \eta, \xi)$ с равномерной сеткой по ξ - и η -переменным. В [3] показано, что относительная ошибка интерполяции резко возрастает при малых v (малых ξ). Рассмотрим две стоковые характеристики на рис. 4 с $U_G = 1,7$ В ($v_1 \approx 0,4$) и $U_G = 6$ В ($v_2 \approx 4,7$). Участок с наибольшей кривизной характеристики v_1 располагается в окрестности стокового напряжения $x_1 \approx v_1$, т. е. в окрестности напряжения насыщения стоковой характеристики. В этой окрестности должно быть, по крайней мере, несколько узлов для обеспечения приемлемой точности интерполяции. На большей части стоковой v_1 -характеристики правее x_1 кривизна близка к нулю и шаг интерполяции может быть большим. Для стоковой характеристики с $v_2 \gg v_1$ кривизна имеет значительно меньший разброс значений и ее максимум находится в окрестности $x_2 \approx v_2$, т. е. узлы окрестности x_1 не требуются. Поэтому оптимальна сетка, у которой второй узел по x -координате пропорционален как ξ/ξ_{\max} или v/v_{\max} , так и ξ_2 -координате, а последний совпадает с правой границей x -области интерполяции $x_{\max} = \xi_{\max}$. Все остальные узлы от x_2 до x_{\max} могут логарифмически равномерно заполнять оставшийся промежуток. Это означает, что x должна быть функцией ξ и ζ .

Построение данного преобразования будем выполнять в обратном направлении. Вначале осуществим переход от координат (ξ, ζ) , имеющих прямоугольную и равномерную сетку (последнее не обязательно), к криволинейным координатам (η, ζ) , имеющим косоугольную сетку. Узлы такой сетки стягива-

ются к нулевой окрестности при $\zeta \rightarrow 0$. Параметр ε препятствует вырождению этой косоугольной сетки при $\zeta = 0$. Это преобразование задается с помощью $\psi(\zeta) = \xi(\zeta + \varepsilon)/(\zeta_m + \varepsilon)$. При этом узлам сетки ξ_i будут соответствовать узлы $\psi_i(\zeta) = \xi_i(\zeta + \varepsilon)/(\zeta_m + \varepsilon)$, т. е. $\psi_2 \approx \xi_2 \zeta$. Затем осуществим нелинейное растяжение сетки в направлении x -координаты с коэффициентом растяжения, пропорциональным ψ , причем таким образом, чтобы нулевому значению ξ_1 соответствовало бы нулевое значение x_1 , значение $x_2(\zeta)$ было бы близко к $D_\psi(\zeta) = D_\xi(\zeta + \varepsilon)/(\zeta_m + \varepsilon)$, т. е. $D_\psi(\zeta) \approx D_\xi \zeta$, а значение $x_m(\zeta)$ совпадало бы с ξ_m . Преобразование, удовлетворяющее этим требованиям, имеет вид

$$x(\xi, \zeta) = D_\psi(\zeta) \exp\left\{\frac{\xi}{\xi_m} \ln((\xi_m + D_\psi(\zeta))/D_\psi(\zeta))\right\} - D_\psi(\zeta), \quad (3)$$

где $x_2(\zeta) \approx D_\psi(\zeta) \approx D_\xi \zeta$, при этом узлы $x_i(\zeta)$ логарифмически равномерно заполняют отрезок значений от $D_\psi(\zeta)$ до ξ_m . Разрешая (3) относительно ξ , получая по заданным ξ_i, η_j, ζ_k с помощью (3) и выражений, аналогичных (1) и (2), определяются узлы криволинейной сетки: x_{ik}, y_j, z_{jk} (x зависит только от ξ и ζ , а y — от η).

Как мы уже отмечали, y является линией уровня $\varphi(x, y, v)$, а направления η и ζ совпадают с u и v , следовательно, η — линия уровня $\Theta(x, \eta, \zeta)$, а значит и линия уровня $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, так как x от η не зависит. Такое поведение $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ позволяет по-новому организовать ее интерполяцию. По «главным» переменным (ξ, ζ) выполняем монотонную бикубическую интерполяцию, а по η -направлению — сглаживающую параболическую аппроксимацию. Это, во-первых, позволит обеспечить высокую точность интерполянта и его допустимое продолжение. Действительно, на левой границе сетки по ζ узловые частные производные $\Phi'_\zeta = \Phi''_{\zeta\zeta} = 0$, следовательно, для всех ξ при $\zeta = 0$ $\Phi'_\zeta \equiv 0$, поэтому нулевое продолжение $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ для $\zeta < 0$ будет допустимым. Значение переменной ξ не бывает отрицательным ($U_D \geq 0$), поэтому продолжения левее сетки по ξ не требуется. Производные Φ'_ξ и Φ'_ζ на правых границах ξ и ζ всегда больше нуля в силу монотонности, таким образом, правее сеток продолжение всегда допустимо. Во-вторых, параболические базисные сплайны на неравномерной сетке уступают эрмитовым кубическим по времени интерполяции. По переменной ξ загромождение сетки справа желательно для характеристик с лавинным умножением, а по переменной ζ первый шаг может быть большим для транзисторов со встроенным каналом, чтобы перескрыть нерабочий участок затворной характеристики.

Так как η -направление совпадает с направлением линии уровня $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, то допустимым для него будет продолжение как левее, так и правее сетки с помощью постоянного значения, совпадающего со значением на соответствующей границе. Такое продолжение можно обеспечить как кубическими сплайнами (с помощью $\Phi'_\zeta = \Phi''_{\zeta\zeta} = \Phi'''_{\zeta\zeta\zeta} = 0$ на левой и правой гранях по η), так и локальными параболическими с продолжением по приграничным данным. Для этого на расстоянии H_η (где H_η — шаг вдоль η -переменной) левее и правее границы области условно вводится еще по одной сеточной плоскости данных со значениями, равными значениям на соответствующей границе.

Предпочтение отдадим комбинированной интерполяции, так как в этом случае вдвое сокращаются общие затраты памяти под массивы токовой функции, решается проблема обеспечения монотонности интерполянта и автоматически выполняется сглаживание данных вдоль направления η , которое в [3] приходилось выполнять дополнительно.

Измеренные в узлах сеточные значения должны быть монотонными по переменным (ξ, ζ) и иметь незначительный разброс значений в направлении η . Последнее обеспечивается сглаживающими свойствами локального параболического сплайна. Если вдоль направления ζ , близкого к градиенту $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, экспериментальные сеточные данные оказываются немонотонными, то они исключаются из рассмотрения. На практике такая ситуация до сих пор не встречалась. Вдоль ξ -направления на участке насыщения при малых ζ в пределах точности измерения возможны нарушения монотонности данных. В этом случае используется алгоритм интегральной корректировки данных этой линии, приводящий к восстановлению монотонности на всей линии с минимально возможными изменениями в данных.

3. Параболическо-бикубическая аппроксимация. Расчет частных производных Φ'_ξ , Φ'_ζ и $\Phi''_{\xi\xi}$, удовлетворяющих достаточным условиям монотонности бикубического интерполянта, выполняется независимо на всех плоскостях $\eta_j = \text{const}$. На каждой такой плоскости все частные производные равны нулю на левой границе $\xi = 0$. Этим ограничивается перечень граничных условий на частные производные.

Полное время расчета производных Φ'_ξ , Φ'_ζ и $\Phi''_{\xi\xi}$, обеспечивающих монотонность в ξ - и ζ -направлениях, не превосходит время расчета 7 производных для трикубического эрмитового сплайна (далее в табл. 2 приведены эти времена в мс в качестве параметра $T_{\text{прет}}$ для сеток двух размеров).

Параболическую аппроксимацию поясним с помощью рис. 2 из [1], на котором все t -переменные должны быть заменены на η -переменные. Предположим, что η -переменная расположена на отрезке от η_3 до η_4 . Отличные от нуля носители для такой точки будут иметь базисные сплайны B_1, B_2 и B_3 . Коэффициенты этих базисных сплайнов — значения сеточных функций $\Phi(\xi, \eta_g^*, \zeta)$ в точке η_g^* , где $\eta_g^* = \eta_1^*, \eta_2^*$ и η_3^* . Таким образом, перед параболической аппроксимацией должны быть выполнены бикубические интерполяции по координатам ξ и ζ на трех плоскостях $\eta = \eta_g^*$. В результате этих интерполяций будут получены $\Phi(\xi, \eta_g^*, \zeta)$, $\Phi'_\xi(\xi, \eta_g^*, \zeta)$ и $\Phi'_\zeta(\xi, \eta_g^*, \zeta)$. Если η оказывается расположенной между η_2 и η_3 , бикубическую интерполяцию (см. конц п. 2) нужно выполнять только на двух плоскостях η_1^* и η_2^* , а для η левее η_2 аппроксимация по η заменяется постоянным значением и бикубическая интерполяция требуется только на одной граничной плоскости.

Поскольку локальная параболическая аппроксимация сохраняет свойства монотонности данных, то производные Φ'_ξ и Φ'_ζ , будучи положительными на плоскостях сетки, останутся такими же и во всей области интерполяции.

Бикубическая сплайновая интерполяция сводится к серии сплайновых интерполяций одной переменной [3].

Полученное в результате интерполяции значение функции $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = F(x, y, z)$. Частные производные $F(x, y, z)$ получаются как производные сложной функции. Преобразование переменных (4) немонотонно, однако статистические проверки подтверждают монотонность $F(x, y, z)$ по всем трем аргументам в случае монотонности $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ по переменным ξ и ζ .

4. Экспериментальная проверка новых моделей. Аналитические малоразмерные модели качественно отражают поведение реального транзистора, поэтому токовые и пороговые значения, полученные с их помощью, могут использоваться в качестве входных данных для интерполяционных моделей. Это позволяет произвести оценку точности различных алгоритмов интерполяции, не обращаясь к измерениям реальных приборов, и тем самым исключить при сравнении случайные погрешности измерения.

В табл. 1, 2 и на рис. 1—6 приняты одни и те же обозначения: A_e — абсолютная ошибка: $A_e = |F_m - F_e|$, где F_m и F_e — текущие значения токов модели и «эксперимента»; R_e — относительная ошибка: $R_e = A_e/F_e$; M_e — усредненная ошибка: $M_e = A_e/\max(F_e)$; $S_{\text{от}}$ — относительный разброс амплитуд токовой функции, в пределах которого подсчитывались R_e - и M_e -ошибки;

S_{lib} — суммарный библиотечный размер исходных массивов экспериментальных данных, относящихся к одной модели (в словах); S_{int} — суммарный размер всех сеточных функций и их производных для одной модели во время интерполяции (в словах); T_{int} — время выполнения всей интерполяционной модели (в мс), включающее расчет аналитических зарядовых функций; T_{cur} — время интерполяции токовой функции и ее трех частных производных (без учета времени интерполяции функции V_{TH}); T_{prel} — время предварительного расчета всех узловых частных производных пороговой и токовой сеточных функций (в мс); R_{nd} — количество отрицательных производных в % к общему числу испытаний сетки; $Ti1$ — эрмитовая трикубическая интерполяция; монотонность гарантируется только вдоль линий, параллельных координатным осям (ξ, η, ζ) и проходящим через узлы сетки; $Ti2$ — трилинейная интерполяция; $Ti3$ — монотонная параболическо-бикубическая аппроксимация; $Ti4$ — монотонная линейно-бикубическая интерполяция; линейная интерполяция выполняется вдоль линии уровня (η -направление).

Оценка точности интерполяции проводилась статистическим методом. Чтобы сделать максимальную относительную ошибку чувствительной к точности алгоритма интерполяции, из рассмотрения исключаются случайные числа, попадающие в ϵ_2 -окрестность носителя токовой функции. Так как равномерное распределение не обеспечивает достаточную плотность случайных точек на внешней ϵ_2 -окрестности носителя, используются поочередно равномерное и равномерно-логарифмическое распределения от ϵ_2 до g_{max} , где g_{max} равно x_{max} или z_{max} . При этом первое будет хорошо соответствовать поиску максимальной абсолютной ошибки, а второе — поиску максимальной относительной ошибки. Каждой такой исключаемой ϵ_2 -окрестности будет соответствовать свое минимальное значение токовой функции, т. е. определенное значение $S_{cat} = F_{max}/F_{min}$. На рис. 1—3 интерполяция $Ti1$ отмечается штрихпунктиром, $Ti2$ — точками, $Ti3$ — штриховой, а $Ti4$ — сплошной линиями.

На рис. 1 для сетки $23 \times 3 \times 20$ приведена зависимость относительной ошибки R_e (в логарифмических масштабах) как функция параметра относительной деформации $\epsilon_{отн} = \epsilon/\xi_m$. Диапазон разброса токов (параметр S_{cat}) при подсчете относительных ошибок выбирался равным 7000. Данные для трикубической и трилинейной интерполяций предварительно сглаживались вдоль линии уровня для исключения нарушений монотонности по u -координате. Видно, что относительная ошибка плавно возрастает от 3 до 5 % при изменении $\epsilon_{отн}$ от 10^{-5} до 10^{-2} . При дальнейшем увеличении $\epsilon_{отн}$ ошибка R_e нарастает значительно и уже при $\epsilon_{отн} = 0,33$ составляет 60 %. Неадаптивная сетка ($\epsilon_{отн} = \infty$) даст относительную ошибку 70 %. Усредненные ошибки у

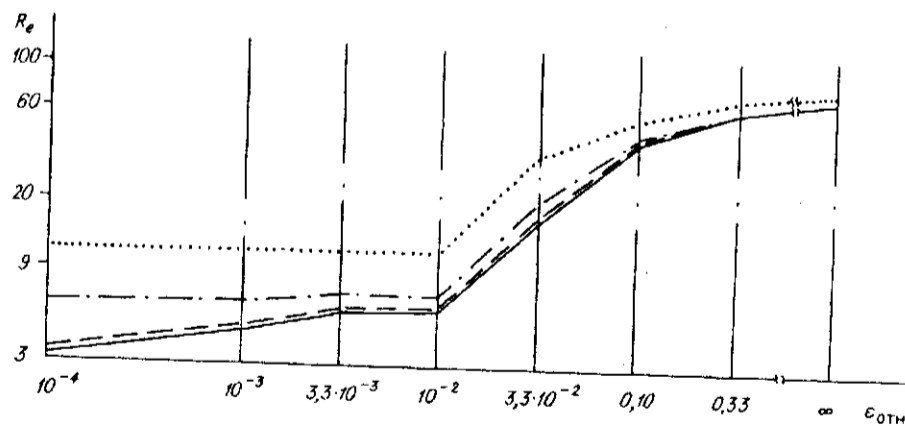


Рис. 1

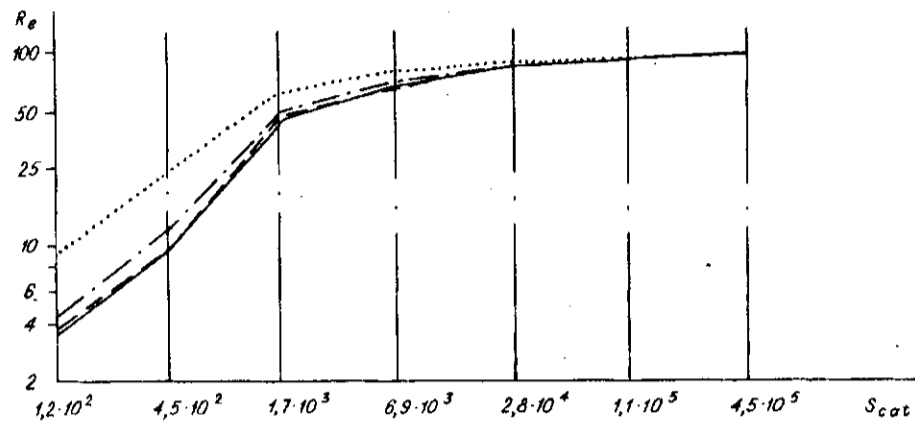


Рис. 2

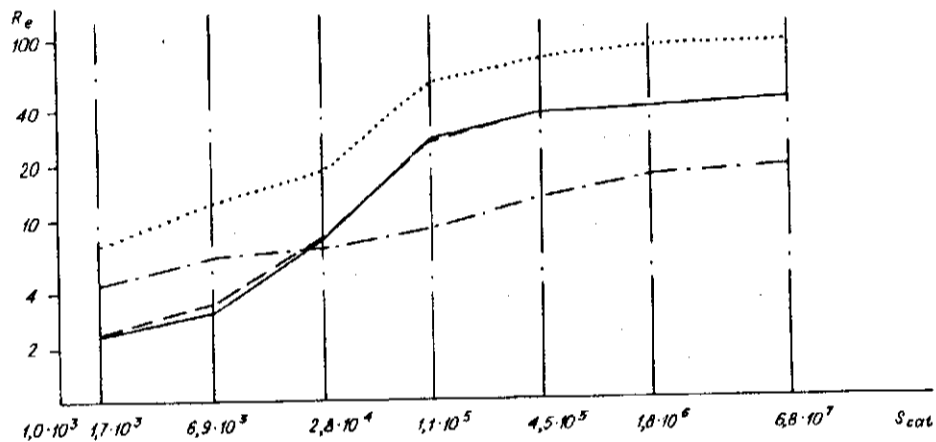


Рис. 3

адаптивной и неадаптивной сеток совпадают. На рис. 2 и 3 также в логарифмических масштабах приведены зависимости относительной ошибки R_e от разброса диапазона токов S_{cat} , в котором подсчитывалась ошибка соответственно для неадаптивной ($\epsilon_{отн} = \infty$) и адаптивной ($\epsilon_{отн} = 10^{-5}$) сеток. Видно, что для параболическо-бикубической интерполяции ($Ti3$) диапазоны разбросов токов на уровне относительной ошибки $R_e = 3,5\%$ отличаются в 70 раз, для трикубической интерполяции ($Ti1$) (на уровне относительной ошибки $R_e = 8\%$) — в 200 раз.

В табл. 1 приведены максимальные ошибки интерполяции двух сеток для токовых характеристик, моделирующих эффект лавинного умножения. Для сетки $9 \times 3 \times 7$ при трикубической интерполяции появляются нарушения монотонности. В случае монотонной интерполяции ($Ti3$ и $Ti4$) эти нарушения отсутствуют.

В табл. 2 приведены процессорные времена (в мс) выполнения на ЭВМ ЕС-1061 малоразмерной аналитической и интерполяционной моделей и их основных программных компонентов. Там же указан размер памяти в зависимости от числа узлов интерполяции. Для сравнения укажем, что процессорное время выполнения малоразмерной аналитической модели на неоднородной подложке составляет 5 мс.

Таблица 1

Сетка $x \times y \times z$	$\epsilon_{отн}$	S_{cat}	Тип интерполяции	M_e	R_e	R_{nd}
9 × 3 × 7	0,001	3000	Ti1	1,23	46,9	0,51
			Ti2	2,08	64,7	0,02
			Ti3	1,00	50,1	0
			Ti4	1,00	50,1	0
17 × 3 × 15	0,0001	3400	Ti1	0,91	10,7	0
			Ti2	0,98	21,8	0
			Ti3	0,72	9,5	0
			Ti4	0,71	9,4	0

Таблица 2

Сетка	S_{lib}	Тип	S_{int}	T_{prel}	T_{cur}	T_{im}
5 × 3 × 7 105 узлов	371	Ti1	1157	120,5	1,68	4,01
		Ti2	422	54,0	0,61	3,33
		Ti3	557	93,5	1,54	3,80
		Ti4	557	93,5	1,22	3,53
12 × 3 × 11 396 узлов	831	Ti1	3704	433,5	1,71	4,00
		Ti2	932	193,5	0,64	3,32
		Ti3	1790	377,0	1,58	3,78
		Ti4	1790	377,0	1,28	3,48

Для проверки устойчивости алгоритмов к ошибкам данных с помощью аналитической модели на сетке $12 \times 3 \times 11$ формировались две интерполяционные модели с токовыми сеточными функциями $\{F_{ijk}\}$ и $\{P_{ijk}\}$, где F_{ijk} — значение аналитической модели при V_{Di}, V_{Bj}, V_{Gk} , а P_{ijk} — равномерно распределенные случайные значения в интервале $F_{ijk}(1 - R_a) \leq P_{ijk} \leq F_{ijk}(1 + R_a)$, R_a — заданная относительная амплитуда возмущения. Каждая из интерполяционных моделей сравнивалась с аналитической на случайном наборе потенциалов внутри сетки для оценки увеличения максимальных R_e и M_e при переходе от сетки $\{F_{ijk}\}$ к $\{P_{ijk}\}$. При $R_a = 0,3\%$ R_e увеличивалась на $0,063\%$, M_e — на $0,113\%$, а при $R_a = 3\%$ R_e увеличивалась на $1,07\%$, M_e — на $0,97\%$, что подтверждает устойчивость предложенных алгоритмов интерполяции к погрешностям измерений.

В табл. 3 для тестового транзистора с длиной канала 3 мкм и шириной

Таблица 3 20 мкм сравниваются точности вос-

S_{cat}	Аналитическая модель		Интерполяционная модель	
	M_e	R_e	M_e	R_e
2000	8,41	99,0	1,04	50,37
600	8,41	47,16	1,04	2,72
100	8,41	13,21	1,04	2,24

произведения экспериментальных характеристик с помощью малоразмерной аналитической модели [6] и интерполяционной ($6 \times 4 \times 8$).

Чтобы получить данные в табл. 3 с помощью тестового транзистора, зондовой установки и программно-измерительного комплекса, были сняты три набора измерительной информации:

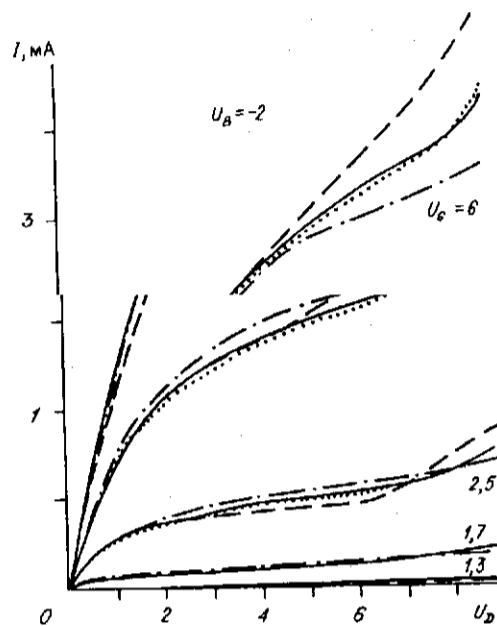


Рис. 4

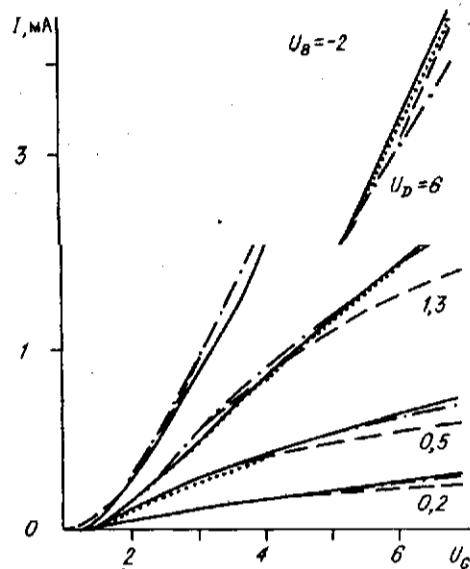


Рис. 5

1 — пороговая сетка 5×18 для интерполяционного транзистора;

2 — токовая сетка для интерполяционного транзистора, содержащая $5 \times 4 \times 8 = 160$ измеряемых значений (токи при нулевых напряжениях на стоке не измеряются); этот же набор применяется для подгонки параметров аналитической модели с помощью программы оптимизации, использующей алгоритм сопряженных направлений Пауэлла [7];

3 — статистический набор токовых значений общим объемом 600 данных; стоковые, затворные и напряжения подложки для этого набора выбирались случайным образом внутри сетки.

Сравнение трех значений токов, полученных непосредственно из эксперимента и с помощью двух моделей, позволило получить ошибку каждой из них в текущей точке статистического набора. Из таблицы видно, что подогнанная аналитическая модель уступает интерполяционной в среднем на порядок по относительной и усредненной (абсолютной) ошибкам.

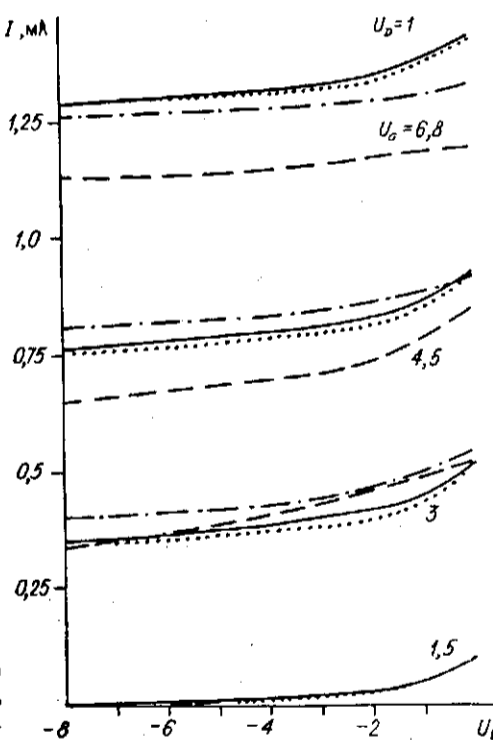


Рис. 6

Точность измерения всех токовых данных составила около 2 %, а пороговых — около 0,5 %. Контроль точности осуществлялся путем 6-кратного повторения каждого из трех измерительных наборов.

Данные для рис. 4—6 в третьем наборе содержат все виды вольт-амперных характеристик (сплошной линией отмечены экспериментальные вольт-амперные характеристики, точками — характеристики, смоделированные с помощью интерполяционного транзистора, штрихпунктиром — характеристики подогнанной под эксперимент малоразмерной аналитической модели, а штриховой линией — характеристики подогнанной большеразмерной модели [8]). Для интерполяционного транзистора была выбрана сетка $9 \times 3 \times 8 = 216$ узлов.

Заключение. Разработанный алгоритм позволил создать относительно компактные по числу узлов данных и занимаемой оперативной памяти интерполяционные модели. Решение проблемы монотонности значительно упростило процедуру выбора сеток, подчинив ее лишь одной цели — точности интерполяции. Алгоритм внедрен в пяти типах интерполяционных моделей с индуцированным и встроенным каналами, которые в сочетании с автоматизацией измерения параметров хорошо зарекомендовали себя при проведении точных расчетов схем. По усредненной ошибке они превосходят малоразмерные аналитические модели более чем в 10 раз и обеспечивают точность относительной ошибки интерполяции на уровне 3 % в диапазоне токов, отличающихся на четыре порядка.

Автор выражает благодарность В. Л. Мирошниченко за ценную информацию при обсуждении проблем монотонности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coughran W. M. et al. Variation diminishing splines in simulation // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* — 1986. — 7, N 2. — P. 696.
2. Barby J. A. et al. Polynomial splines for MOSFET model approximation // *IEEE Trans. on Computer-Aided Design.* — 1988. — 7, N 5. — P. 557.
3. Люмаров П. П. Применение эрмитовых поликубических интерполяционных сплайнов на криволинейных сетках для электрических моделей МОП-транзисторов с субмикронными размерами // *Вычислительные системы, № 137. Приближение сплайнами.* — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990.
4. Merckel G. A simple model of the threshold voltage of short and narrow channel MOSFETs // *Solid-State Electron.* — 1980. — 23. — P. 1207.
5. Carlson R. E., Fritsch F. N. An algorithm for monotone piecewise bicubic interpolation // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1989. — 26, N 1. — P. 230.
6. Груданов Н. Б. Моделирование МДП-транзисторов в режиме слабой инверсии // *Автоматизация проектирования в электронике: Республ. межвед. науч.-техн. сб.* — Киев, 1980. — Вып. 21.
7. Zangwill W. I. Minimizing a function without calculating derivatives // *Computer J.* — 1967. — 10, N 3. — P. 293.
8. Merckel G. et al. An accurate large-signal MOS transistor model for use in computer-aided design // *IEEE Trans. on Electron. Dev.* — 1972. — 19, N 5. — P. 681.

Поступила в редакцию 28 мая 1991 г.

УДК 621.382.323.001.63 : 519

П. П. Люмаров

(Новосибирск)

ПРИМЕНЕНИЕ МОНОТОННЫХ СПЛАЙНОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛИ МОП-ТРАНЗИСТОРА СО ВСТРОЕННЫМ КАНАЛОМ

Рассмотрено построение моделей МОП-транзистора со встроенным каналом с помощью монотонных интерполяционных сплайнов на адаптивных сетках криволинейной формы.