

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.391

В. Г. Гетманов  
(Москва)

О ЧАСТОТНОМ ПОДПОИСКЕ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ  
ПАРАМЕТРОВ КУСОЧНО-СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается задача оценивания параметров — амплитуды, частоты и начальной фазы — по зашумленным дискретным наблюдениям кусочно-синусоидальных функций. Исследуются особенности организации подпоиска по частоте. Предлагается метод снижения временных затрат на осуществление частотного подпоиска.

Оценивание параметров кусочно-синусоидальных функций имеет место для многих предметных областей цифровой обработки сигналов. Описание вариантов решений данной задачи с разной степенью детализации приведено в ряде источников (например, в [1, 2]). В системах автоматизации научных исследований подобная задача может использоваться при измерении амплитуд, частот и фазовых соотношений для нестационарных узкополосных процессов, наблюдаемых на фоне шумов. Процедура оценивания параметров в подобных случаях, как правило, осуществляется путем нахождения экстремума соответствующих функций правдоподобия и сводится к вычислению последовательности взвешенных сумм коэффициентов Фурье. Благодаря нелинейности исследуемой модельной синусоидальной функции по частоте, алгоритм определения параметров приводит к процедуре прямой минимизации в частотной области образуемых при этом частичных остаточных сумм. Эффективность практической реализации получения оценок зависит от особенностей алгоритмов частотного подпоиска (как показывает анализ известных публикаций на данную тему, эта группа вопросов, важных с точки зрения временных затрат, рассматривается крайне фрагментарно).

В данной статье разбираются следующие задачи: 1) исследование вида зависимости функционала частичной остаточной суммы от частоты, что позволяет организовать рациональный подпоиск; 2) снижение затрат времени на вычисления коэффициентов Фурье с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Воспользуемся обозначениями и схемой решения из [3]. Опишем необходимые для предлагаемой постановки соотношения, используемые для оценок параметров синусоидальных функций в дискретном случае. Пусть наблюдения  $y_i$  описываются зависимостью

$$y_i = a \cos \omega T i + b \sin \omega T i + w_i,$$

где  $a, b, \omega$  — параметры модельной синусоидальной функции;  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $T$  — интервал дискретизации;  $w_i$  — нормально распределенные независимые случайные числа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ . Допустим, что известна, с определенной погрешностью, средняя частота  $\omega_0$  для исследуемой синусоидальной функции. Задача определения

наилучших параметров модели в этом случае сводится к минимизации функционала

$$S(a, b, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - a \cos \omega T i - b \sin \omega T i)^2, (a^0, b^0, \omega^0) = \arg \{ \min_{a, b, \omega} S(a, b, \omega) \}.$$

В окрестности средней частоты  $\omega_0$  выбираются по определенному плану частоты  $\omega_k$ , удовлетворяющие неравенству  $\omega_{10} \leq \omega_k \leq \omega_{20}$ ,  $k = 1, \dots, k_f$ , значения  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$  определяют нижнюю и верхнюю границу диапазона подпоиска по частоте и назначаются исходя из априорных сведений. При фиксированной

$$b_{1,k} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos \omega_k T i; \quad b_{2,k} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin \omega_k T i.$$

Весовые множители

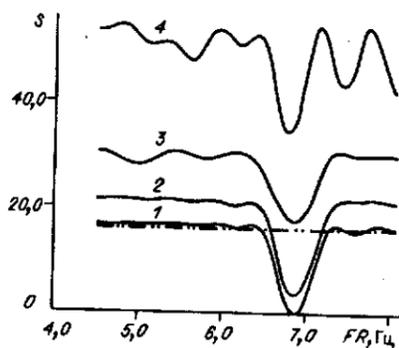
$$a_{11,k} = \sum_{i=0}^{N-1} \cos^2 \omega_k T i, \quad a_{12,k} = \sum_{i=0}^{N-1} \cos \omega_k T i \sin \omega_k T i, \quad a_{22,k} = \sum_{i=0}^{N-1} \sin^2 \omega_k T i$$

могут быть определены из табличных тригонометрических сумм [4]. Поиском по целочисленному аргументу  $k$  находится минимум частичной остаточной суммы  $S_k = S(a_k^0, b_k^0, \omega_k)$ , решение задачи принимается в виде

$$k^0 = \arg \{ \min_k S_k \}, \quad a^0 = a_{k^0}^0, \quad b^0 = b_{k^0}^0, \quad \omega^0 = \omega_{k^0}.$$

Зависимость частичной остаточной суммы от частоты имеет многоэкстремальный характер. На рисунке кривая 1 представляет собой значения  $S(\omega)$ , вычисленные без шумов ( $\sigma_i^2 = 0$ ), для  $y_i = \cos(\omega_0 T i + \varphi_0) + w_i$ ,  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $f_0 = 6,87$  Гц,  $\varphi_0 = 0,5$ ,  $T = 0,06$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $N = 32$  с граничными частотами  $\omega_{10} = 2\pi f_{10}$ ,  $\omega_{20} = 2\pi f_{20}$ ,  $f_{10} = 4,5$  Гц,  $f_{20} = 8,0$  Гц. Видно, что в окрестности  $\omega_0$  имеется глобальный минимум, окруженный последовательностью локальных минимумов. При действии шумов в наблюдениях возможна сильная деформация графиков зависимостей  $S(\omega)$ ; так, кривые 2—4 вычислены при  $\sigma_2 = 0,4$ ,  $\sigma_3 = 0,8$ ,  $\sigma_4 = 1,0$ . Большие шумы могут привести к скачкообразному увеличению погрешностей в оценивании параметров из-за возможной перемены местами локального и глобального минимумов для  $S(\omega)$ .

Эффективность решения данной задачи дискретной тригонометрической аппроксимации в основном зависит от трех факторов: точности знания средней



частоты  $\omega_0$ , уровня шумов в наблюдениях, временных затрат, необходимых на вычисление коэффициентов Фурье  $b_{1,k}$ ,  $b_{2,k}$ . При неточном знании  $\omega_0$  требуется выбор достаточно широкого диапазона подпоиска по частоте; обеспечение достаточной точности решения задачи аппроксимации обуславливает проведение подпоиска по частоте с мелким шагом. Очевидно, во многих ситуациях отмеченные обстоятельства приводят к большим временным затратам на получение решения.

Выясним характер зависимости функционала частичной остаточной суммы. Воспользуемся оптимизацией на основе введенных сопряженных наблюдений и моделей: допустим, что вместе с основными наблюдениями и моделью имеются дискретные сопряженные наблюдения  $\tilde{y}_i$  и дискретная сопряженная модель  $a\sin\omega Ti - b\cos\omega Ti$ . Полагаем, что дискретные значения  $y_i$ ,  $\tilde{y}_i$  и моделей во временной области связаны через соответствующее дискретное преобразование, аналогичное непрерывному преобразованию Гильберта. Введем сопряженную остаточную сумму квадратов

$$\tilde{S} = \sum_{i=0}^{N-1} (\tilde{y}_i - a\sin\omega Ti + b\cos\omega Ti)^2,$$

и с учетом равенства

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{y}_i^2$$

нетрудно убедиться, что  $S = \tilde{S}$ . Рассмотрим новое выражение для остаточной суммы:  $S_0 = S + \tilde{S}$  (очевидно из физических соображений, что оптимальные значения параметров моделей для  $S$  и  $S_0$  совпадают); найдем производные по  $a$ ,  $b$  для  $S_0$ , чтобы получить необходимые условия экстремума решения видоизмененной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_0}{\partial a} &= \sum_{i=0}^{N-1} [(y_i - a\cos\omega Ti - b\sin\omega Ti)(-\cos\omega Ti) + \\ &+ (\tilde{y}_i - a\sin\omega Ti + b\cos\omega Ti)(-\sin\omega Ti)] = 0; \\ \frac{\partial S_0}{\partial b} &= \sum_{i=0}^{N-1} [(y_i - a\cos\omega Ti - b\sin\omega Ti)(-\sin\omega Ti) + \\ &+ (\tilde{y}_i - a\sin\omega Ti + b\cos\omega Ti)(\cos\omega Ti)] = 0. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\tilde{b}_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{y}_i \cos\omega Ti, \quad \tilde{b}_2 = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{y}_i \sin\omega Ti;$$

после преобразований найдем оценки амплитуд  $a^0$ ,  $b^0$  из решения получаемой при этом системы линейных уравнений:

$$a^0 = (b_1 + \tilde{b}_2)/N, \quad b^0 = (b_2 - \tilde{b}_1)/N.$$

Подставим полученные оценки в выражение для  $S_0$ ; проводя необходимые вычисления, получим выражение

$$S_0(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i^2 + \tilde{y}_i^2) - \frac{(b_1 + \tilde{b}_2)^2}{N} - \frac{(b_2 - \tilde{b}_1)^2}{N}. \quad (1)$$

Далее, при синусоидальных входных сигналах без шумов:  $y_{0i} = a_0 \cos\omega_0 Ti + b_0 \sin\omega_0 Ti$ ,  $\tilde{y}_{0i} = a_0 \sin\omega_0 Ti - b_0 \cos\omega_0 Ti$ , сформировав  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\tilde{b}_1$ ,  $\tilde{b}_2$ , можно найти вид зависимости  $S_0$  от частоты. Опустив промежуточные выкладки, получим

$$b_1 + \tilde{b}_2 = a_0 \sum_{i=0}^{N-1} \cos(\omega - \omega_0)Ti - b_0 \sum_{i=0}^{N-1} \sin(\omega - \omega_0)Ti;$$

$$b_2 - \tilde{b}_1 = a_0 \sum_{i=0}^{N-1} \sin(\omega - \omega_0)Ti + b_0 \sum_{i=0}^{N-1} \cos(\omega - \omega_0)Ti.$$

Воспользовавшись табличными тригонометрическими суммами из [4] и проделав соответствующие вычисления, найдем окончательное выражение для частичной остаточной суммы в виде функции типа аппаратной:

$$S_0(\omega) = N(a_0^2 + b_0^2) - \frac{a_0^2 + b_0^2}{N} \frac{\sin \frac{2N}{2}(\omega - \omega_0)T}{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2}T}.$$

Нетрудно видеть, что глобальный минимум для данной функции равен нулю и находится в точке  $\omega_0$ ; локальные максимумы расположены в координатах  $\omega_{l, \max} = \omega_0 \pm \Delta\omega l$ ,  $\Delta\omega = 2\pi/NT$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ; локальные минимумы имеют координаты  $\omega_{l, \min} = \left(\omega_0 \pm \frac{3}{2}\Delta\omega\right) \pm \Delta\omega l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ .

Если наблюдения осуществляются на фоне шумов, то частичная остаточная сумма становится случайной функцией частоты. Оценим математическое ожидание разности  $\delta S_0$  частичной остаточной суммы  $S_0$  для наблюдений в шумах и без шумов. Примем, что погрешности  $w_i$ ,  $\tilde{w}_i$  в наблюдениях являются некоррелированными с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $\sigma^2$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \delta b_1 &= \sum_{i=0}^{N-1} w_i \cos \omega Ti, & \delta b_2 &= \sum_{i=0}^{N-1} w_i \sin \omega Ti, \\ \delta \tilde{b}_1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{w}_i \cos \omega Ti, & \delta \tilde{b}_2 &= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{w}_i \sin \omega Ti; \end{aligned}$$

опустим промежуточные выкладки, запишем выражение для разности, исходя из (1):

$$\begin{aligned} \delta S_0 &= \sum_{i=0}^{N-1} (2y_{0i}w_i + w_i^2 + 2\tilde{y}_{0i}\tilde{w}_i + \tilde{w}_i^2) - \frac{2}{N}(b_1 + \tilde{b}_2)(\delta b_1 + \delta \tilde{b}_2) - \\ &\quad - \frac{(\delta b_1 + \delta \tilde{b}_2)^2}{N} - \frac{2}{N}(b_2 - \tilde{b}_1)(\delta b_2 - \delta \tilde{b}_1) - \frac{(\delta b_2 - \delta \tilde{b}_1)^2}{N}. \end{aligned}$$

Учитывая некоррелированность погрешностей, нетрудно оценить математическое ожидание  $\delta S_0$ :

$$M(\delta S_0) = 2N\sigma^2 - 2\sigma^2 = 2(N-1)\sigma^2$$

Видно, что математическое ожидание разности не зависит от частоты; действие шумов приводит к смещению по вертикали математического ожидания для  $S_0$ . В случае малых шумов диапазон подпоиска по частоте может определяться следующими граничными частотами:  $\omega_{10} = \omega_0 - \Delta\omega$ ,  $\omega_{02} = \omega_0 + \Delta\omega$ .

В этом случае, если шумы в наблюдениях имеют значительную интенсивность или частота  $\omega_0$  известна с большими погрешностями, подпоиск по частоте следует проводить в широком частотном диапазоне. Наибольшие затраты времени при реализации подпоиска по частоте приходятся на вычисления коэффициентов Фурье, нахождение весовых коэффициентов может осуществляться с помощью табличных формул и заноситься в память заранее. Приспособим алгоритм БПФ для быстрого нахождения последовательности коэффициентов Фурье.

Фиксируем начальную частоту  $\omega_{10}$  и вводим дискретность подпоиска по частоте  $\Delta\omega$ . Для частоты  $\omega_k = \omega_{10} + \Delta\omega k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , рассматриваемые коэффициенты могут быть переписаны в виде

$$b_{1,k} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos \omega_k T i = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos \omega_{10} T i \cos \Delta \omega k T i - \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin \omega_{10} T i \sin \Delta \omega k T i;$$

$$b_{2,k} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin \omega_k T i = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos \omega_{10} T i \sin \Delta \omega k T i + \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin \omega_{10} T i \cos \Delta \omega k T i.$$

Введем обозначения для процессов  $y_{1i} = y_i \cos \omega_{10} T i$ ,  $y_{2i} = y_i \sin \omega_{10} T i$ ; коэффициенты Фурье могут быть представлены формулами

$$b_{1,k} = \sum_{i=0}^{N-1} y_{1i} \cos \Delta \omega k T i - \sum_{i=0}^{N-1} y_{2i} \sin \Delta \omega k T i;$$

$$b_{2,k} = \sum_{i=0}^{N-1} y_{2i} \cos \Delta \omega k T i + \sum_{i=0}^{N-1} y_{1i} \sin \Delta \omega k T i.$$

Нетрудно видеть, что  $b_{1,k}$ ,  $b_{2,k}$  записаны как действительные и мнимые коэффициенты дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для комплексного процесса  $Y$ :  $Y_i = y_{1i} + j y_{2i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Введем расширенный комплексный процесс:  $\tilde{Y} = (Y, 0, \dots, 0)$ , состоящий из  $N$  значений исходного комплексного процесса  $Y$  и  $(k_0 - 1)$  последовательностей по  $N$  комплексных нулей в каждой. Дискретное преобразование Фурье для процесса  $\tilde{Y}$

$$B_k = \sum_{i=0}^{N_0-1} \tilde{Y}_i w^{ki}, \quad w = e^{j \frac{2\pi}{N_0}}, \quad N_0 = N k_0, \quad k = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

совпадает с рассматриваемыми коэффициентами Фурье для дискретных частот  $\Delta \omega k = \Delta \Omega k / k_0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Delta \Omega = 2\pi / NT$ , где  $\Delta \Omega$  — дискретность по частоте ДПФ для исходного процесса из  $N$  точек. В том случае, если  $N = 2^{r_1}$ ,  $k_0 = 2^{r_2}$ , где  $r_1, r_2$  — целые числа, вычисление коэффициентов  $B_k$  может быть осуществлено с помощью алгоритма БПФ с высоким быстродействием. Возможность ускоренного вычисления массива коэффициентов Фурье позволяет решить задачу подпоиска по частоте многоэкстремальной частичной остаточной суммы: с достаточно мелким шагом по частоте можно осуществить минимизацию быстродействующим прямым перебором в большом частотном диапазоне. Отметим, что шаг дискретности по частоте не может быть произвольным, однако при достаточно больших  $k_0$  параметр  $\Delta \omega$  может быть меньше любого заданного.

Оценим эффективность предлагаемого подхода. Коэффициенты Фурье  $b_{1,k}$ ,  $b_{2,k}$  в количестве  $N$  требуют время  $T_1$  при непосредственном вычислении:

$$T_1 = 2N^2(t_y + t_s),$$

где  $t_y$  — время умножения;  $t_s$  — время вычисления функции синус (пренебрегаем временем операции сложения). Применение алгоритма БПФ для вычисления такого же числа коэффициентов Фурье обуславливает время ( $t_{yk}$  — время комплексного умножения) [5]

$$T_2 = 2N(t_y + t_s) + t_{yk} \frac{N k_0}{2} \lg_2 N k_0.$$

Первое слагаемое оценивает время на формирование  $y_{1i}$ ,  $y_{2i}$ , второе слагаемое дает оценку времени работы алгоритма БПФ для  $N k_0$  точек. Положим  $t_s = \alpha t_y$ ,  $\alpha = 10 + 20$ ,  $t_{yk} = 4 t_y$ ,  $N = 256$ ,  $k_0 = 16$ . Тогда оценка для временных затрат представится следующим образом,  $\alpha = 15$ :  $T_1 = 2^{21} t_y$ ,  $T_2 = (2^{13} + 2^{16} \cdot 1,5) t_y$ . Выигрыш по времени в данном случае составляет примерно  $T_1/T_2 = 1,5 \cdot 2^5 \approx 50$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов.—М.: Радио и связь, 1983.
2. Ryfe D. C., Boorstyn R. R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation // IEEE Trans. Inform. Theory.—1974.—IT-20, N 5.—P. 591.
3. Гетманов В. Г. Об уменьшении времени решения задачи дискретной тригонометрической аппроксимации: // Автометрия.—1988.—№ 6.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Наука, 1971.
5. Введение в цифровую фильтрацию /Под ред. Р. Богнера и А. Константиноидиса.—М.: Мир, 1976.

Поступило в редакцию 1 февраля 1991 г.

УДК 612.3

А. Н. Радченко  
(Санкт-Петербург)

#### ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ТЕЛЕВИЗИОННОГО КАНАЛА К ПАРАМЕТРАМ РАЗВЕРТКИ

**Введение.** При переходе к цифровым телевизионным сигналам и стандартам ТВЧ возрастают требования широкополосности. В работе показано, что методами информационного сжатия можно отделить требования к стандартам развертки от требований к полосе и связать последние исключительно с качеством изображения и его информативностью. В результате автоматически решается проблема совместимости стандартов и сжимается занимаемая полоса частот. Видеопроцессоры для сжатия-восстановления сигналов можно реализовать оптическими и электронными средствами. Простейшим средством сжатия информации может служить растровый объектив. Наибольший интерес представляют процессорные свойства распределенной ассоциативной памяти. Обсуждается один из способов конструирования такой памяти и оценивается ее надежность для двух вариантов технологии — случайной и детерминированной.

**Сжатие информации методами минимизации булевых функций.** Перечислим элементы изображений (пиксели), составляющие телевизионную передачу, в виде последовательности

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{M-1}. \quad (1)$$

Преобразуем ее с минимальными информационными потерями в более короткую последовательность

$$\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{m-1}. \quad (2)$$

Коэффициент сжатия

$$\Theta = M/m. \quad (3)$$

Для построения процессора, сжимающего с минимальными информационными потерями (1) в (2), свяжем их с булевыми функциями (БФ)  $U$  и  $Y$  в предположении, что  $\varphi_i$  и  $\Psi_j$  двоичные:

$$U = \bigvee_{i < M} \varphi_i k_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4)$$

$$Y = \bigvee_{j < m} \Psi_j l_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5)$$