

Рис. 7

сравнения рис. 6 и 7 и табл. 3, результаты улучшились и приблизились к расчетным значениям. При настройке микроскопа на максимум интенсивности в центре пятна размер последнего (1,6 мкм) близок к теоретическому значению, но интенсивность в боковом максимуме на 7,5 % больше (см. рис. 7, запись 1). При незначительном смещении из этого положения относительная интенсивность в боковом максимуме падает, но увеличивается размер пятна (2,3 мкм) (см. рис. 7, запись 2). Остаточные aberrации, приводящие к таким результатам, вероятно, можно объяснить недостаточно высокой дифракционной эффективностью киноформного корректора, о чем сообщалось выше.

Заключение. Разработана конструкция высокоапертурного гибридного микрообъектива ($NA = 0,6$ и $0,7$) с киноформным корректором. Изготовлены экспериментальные образцы и проведены их испытания. Измеренный диаметр сфокусированного пятна соответствует дифракционному пределу. Интенсивность бокового максимума превышает теоретическое значение на 7,5 %, что объясняется недостаточно высокой ДЭ корректора. Для снижения интенсивности бокового максимума необходимо дальнейшее совершенствование технологии изготовления киноформного корректора.

Авторы благодарят А. Г. Полещука за изготовление растрованного фотошаблона корректора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобров С. Г., Грейсух Г. И., Туркевич Ю. Г. Оптика дифракционных элементов и систем. — Л.: Машиностроение, 1986.
2. Ган М. А. Моделирование на ЭВМ голографической коррекции aberrаций оптических систем // Оптика и спектроскопия. — 1976. — 41, № 4.
3. Парицкая Г. Г., Медведев В. Е. Расчет хода лучей через оптические системы, содержащие ГДР // ОМП. — 1975. — № 3.
4. Корольков В. П., Коронкевич В. П., Михальцова И. А. и др. Киноформы: технология, новые элементы и оптические системы // Автометрия. — 1989. — № 3, 4.
5. Левин В. Я., Соскин С. И. Монохроматическая функция рассеяния точки киноформного объектива // Оптика и спектроскопия. — 1984. — 56, № 1.

Поступила в редакцию 26 июля 1991 г.

УДК 535.42 : 535.31 : 530.82.5

Ю. В. Чугуй

(Новосибирск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ ПО ИХ ДИФРАКЦИОННЫМ КАРТИНАМ

На основе модели эквивалентных диафрагм в аналитическом виде исследованы спектры абсолютно поглощающих объектов постоянной толщины — типичных элементов трехмерных тел, включая объемный край, бипланарную щель и объемное щелевое отверстие (объемная щель). Установлены зависимости между характерными параметрами спектров и геометрическими размерами объектов. Предложены эффективные способы определения их по спектру, не требующие громоздких вычислений. Приводятся оценки погрешностей вычисления размеров. Теоретические результаты подтверждены экспериментальными.

Дифракционные методы размерного контроля на основе спектров Фурье используются на практике при измерении геометрических параметров либо

плоских (нулевой толщины) объектов простой формы, либо объемных изделий, имеющих четкую теневую проекцию [1, 2]. Применяемая в последнем случае проекционная модель описания оптических свойств протяженных объектов является приближенной и при определенных условиях может приводить к значительным ошибкам измерений. В [3—5] исследованы особенности формирования дифракционных картин (спектров) абсолютно поглощающих и отражающих объектов постоянной толщины на основе модели эквивалентных диафрагм в приближении Кирхгофа — Френеля. В настоящей работе установлены аналитические зависимости между характерными параметрами спектров и геометрическими размерами абсолютно поглощающих объектов постоянной толщины, предложены методы их отдельного определения.

Исследованию подлежали следующие типичные элементы трехмерных тел: объемный край, бипланарная щель и объемное щелевое отверстие (объемная щель).

Объемный (симметричный) край. Объект имеет вид «объемной полуплоскости» протяженностью d с абсолютно поглощающей боковой гранью, перпендикулярной его передней и задней граням (рис. 1, *a*). Согласно [4], амплитудный спектр объекта имеет следующий вид:

$$E_1(\theta) = \pi \delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} \tilde{Y}(\theta) + 0,5 \frac{e^{jk\theta^2 d/2}}{jk\theta}, \quad (1)$$

где θ — угол дифракции; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число (λ — длина волны света); $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака;

$$\tilde{Y}(z) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\xi) \exp\left[\frac{jk}{2d}(z - \xi)^2\right] d\xi$$

— френелевский образ ступенчатой функции Хевисайда $Y(z)$, $z = \theta d$.

Воспользуемся далее предложенной в [4] аппроксимацией френелевского образа (рис. 2, *a, b*):

$$\tilde{Y}(z) \approx \tilde{Y}_{ap}(z) = Y(z) - \frac{p}{2} \frac{e^{jkz^2/2d}}{|z| + p} \operatorname{sgn}(z). \quad (2)$$

Здесь параметр $p = \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j\pi/4}}{\alpha}$; $\operatorname{sgn}(z)$ — знаковая функция. Значение коэффициента α выбирается в зависимости от исследуемого диапазона z . На рис. 2 приведены графики: ступенчатой функции Хевисайда $Y(w)$ (кривая 1), где $w = \frac{z}{\sqrt{\lambda d}}$ ($\sqrt{\lambda d}$ — размер зоны Френеля), ее френелевского образа $\tilde{Y}(w)$

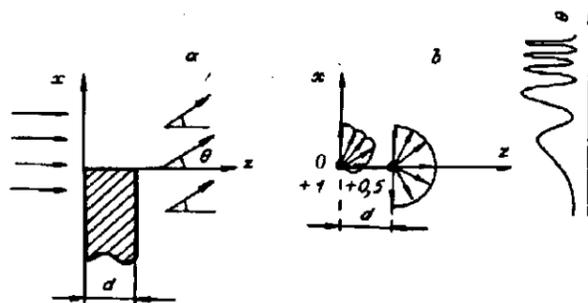


Рис. 1

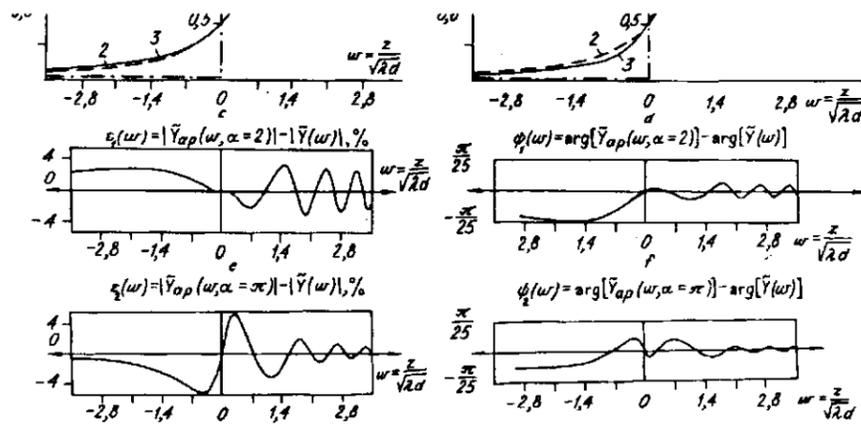


Рис. 2

(кривая 2) и аппроксимированных функций $\tilde{Y}_{ap}(w)$ при $\alpha = 2$ (рис. 2, а, кривая 3) и $\alpha = \pi$ (рис. 2, б, кривая 3). При выборе этих значений α минимальные амплитудные ($\epsilon_1(w)$, $\epsilon_2(w)$) и фазовые ($\psi_1(w)$, $\psi_2(w)$) ошибки, как показывают расчеты, достигаются соответственно в диапазонах $|w| < 1$ (рис. 2, с, d) и $|w| > 1$ (рис. 2, е, ф). (Разности $\epsilon_1(w)$ и $\epsilon_2(w)$ нормированы на значение $\tilde{Y}(w) \approx 1$). В этих случаях выражения для $\tilde{Y}_{ap}(z)$ совпадают с известными предельными формулами для френелевского образа [6].

Если теперь для упрощения вычислений перейти к анализу распределения $F_1(\theta) \equiv jk\theta E_1(\theta)$ и сделать замену переменных $\frac{\theta}{\theta_{cr}} = w$, где $\theta_{cr} = \sqrt{\lambda/d}$ — критический угол дифракции (при котором наиболее полно проявляются объемные эффекты), то из (1) с учетом (2) при $\alpha = \pi$ нетрудно получить:

$$F_1(w) \approx \hat{F}_1(w) = Y(w) + 0,5e^{j\pi w^2} \left(1 - \frac{\text{sgn}(w)}{1 + \pi w e^{-j\pi/4}} \right). \quad (3)$$

Отсюда следует, что для $w < 0$ спектр мощности

$$\left| \hat{F}_1(w) \right|_{w < 0}^2 = \frac{1 + 0,5\sqrt{2}\pi w + 0,25\pi^2 w^2}{1 + \sqrt{2}\pi w + \pi^2 w^2}$$

и имеет вид монотонно убывающей функции.

Для положительных значений w амплитудный спектр описывается выражением

$$\hat{F}_1(w)_{w > 0} = 1 + \frac{0,5\pi e^{-j\pi/4} w e^{j\pi w^2}}{1 + \pi w e^{-j\pi/4}}, \quad (4)$$

которое с учетом тождества

$$(1 + \pi e^{-j\pi/4} w)^{-1} = (1 + \sqrt{2}\pi w + \pi^2 w^2)^{-1/2} e^{i\varphi(w)},$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi(w) = \frac{\pi\sqrt{2}w}{1 + \sqrt{2}\pi w + \pi^2 w^2},$$

Отсюда для распределения интенсивности света в дифракционной картине получаем

$$\left| \hat{F}_1(w) \right|_{w>0}^2 = 1 + \frac{\pi \cos(\pi w^2 - \pi/4 + \varphi)}{(1 + \sqrt{2}\pi w + \pi^2 w^2)^{1/2}} + \frac{0,25\pi^2 w^2}{1 + \sqrt{2}\pi w + \pi^2 w^2}. \quad (5)$$

Принимая во внимание, что для фазы $\pi/4 - \varphi$ имеет место тождество

$$\pi/4 - \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + \sqrt{2}\pi w}$$

и при $w > 1$ ее можно аппроксимировать функцией $(1 + \sqrt{2}\pi w)^{-1}$, распределение (5) приближенно опишем выражением

$$\left| \hat{F}_1(w) \right|_{w>0}^2 \approx 1 + \frac{\pi \cos[\pi w^2 - (1 + \sqrt{2}\pi w)^{-1}]}{(1 + \sqrt{2}\pi w + \pi^2 w^2)^{1/2}} + \frac{0,25\pi^2 w^2}{1 + \sqrt{2}\pi w + \pi^2 w^2}. \quad (5a)$$

Расчеты показывают, что, например, при $w = 1$ погрешность аппроксимации указанной фазы не превышает 1,1 %.

Можно видеть, что дифракционное поле объемного края в области $w > 0$ ($\theta > 0$) содержит колебательную составляющую френелевского типа, обусловленную интерференцией двух точечных источников (см. рис. 1, б), размещенных в продольном направлении (вдоль оптической оси): первичного (координаты $x = 0, z = 0$) с неанзотропной диаграммой излучения и вторичного ($x = 0, z = d$) с изотропной диаграммой излучения. Очевидно, что при достаточно больших w ($\theta \gg \theta_{cr}$) поле (5) совпадает с полем от двух источников с изотропными диаграммами излучения

$$\left| F_{is}(w) \right|^2 = 1,25 + \cos^2(\pi w^2). \quad (6)$$

В качестве иллюстрации на рис. 3, а показаны графики исходного распределения $\left| F_1(w) \right|^2$, полученного из выражения (1) (кривая 1), и аппроксимированного $\left| \hat{F}_1(w) \right|^2$ согласно (5а) (кривая 2). При $w > 1$ отличие этих графиков не превышает 1,5 % (рис. 3, б). (Разность $\varepsilon_3(w)$ нормирована на значение $F_1(w) = 1,5$.) Для сравнения на рис. 3, с представлено распределение $\left| F_{is}(w) \right|$ (кривая 1). Можно видеть, что в области $w < 0,5$ оно, как и следовало ожидать, заметно отличается от $\left| F_1(w) \right|$ (кривая 2).

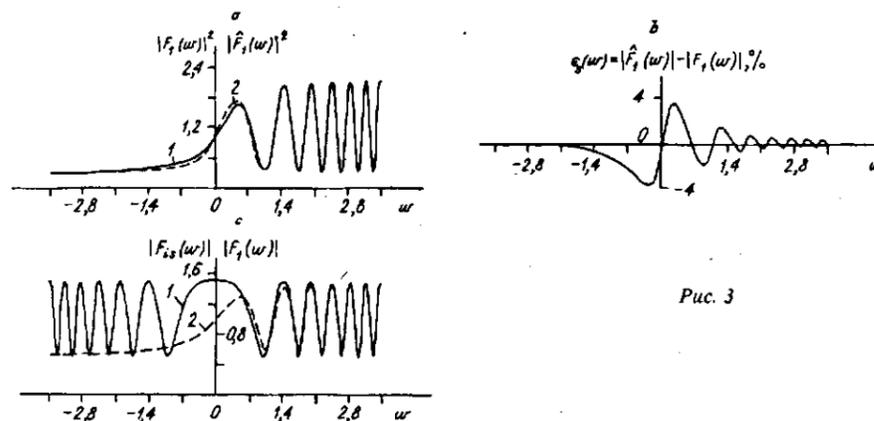


Рис. 3

Найдем далее положение минимумов w_n функции (5a), воспользовавшись методом Ньютона, положив $w_n = w_n^{(0)} + \Delta w_n$, где $w_n^{(0)}$ — приближенное значение n -го минимума, Δw_n — уточняющая добавка, причем $\Delta w_n \ll w_n^{(0)}$. В качестве $w_n^{(0)}$ выберем минимумы распределения (6):

$$w_n^{(0)} = \sqrt{2n+1}, \text{ или } \theta_n^{(0)} = \sqrt{\frac{\lambda}{d}(2n+1)},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Расчеты показывают, что $\Delta w_n = (2\sqrt{2}\pi^2 w_n^2)^{-1}$, и, следовательно,

$$w_n = w_n^{(0)} + \Delta w_n = \sqrt{2n+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2(2n+1)}. \quad (7)$$

Соответственно для углового положения минимумов θ_n имеем

$$\theta_n = \theta_n^{(0)} + \Delta\theta_n = \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \left[\sqrt{2n+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2(2n+1)} \right] = \sqrt{\frac{\lambda}{d}} (k_n + \Delta k_n), \quad (7a)$$

где $\Delta\theta_n = \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \Delta k_n$ — добавка к основному члену $\theta_n^{(0)}$, обусловленная особенностями поведения френелевского образа $\tilde{Y}(\theta)$; $k_n = \sqrt{2n+1}$, а $\Delta k_n = \frac{0,0358}{2n+1}$.

Искомый параметр d находится из (7a) по результатам измерений двух углов θ_m и θ_n , соответствующих m -му и n -му порядкам ($n > m$) спектра (5a):

$$d = k_{n,m}^2 \frac{\lambda}{(\theta_n - \theta_m)^2}, \quad (8)$$

где $k_{n,m} = k_n - k_m + \Delta k_n - \Delta k_m$.

Отметим, что учет добавки в (7a) приводит к уменьшению методической погрешности $\delta_{d,met}$ определения d , которая возникает при расчете протяженности классическим путем:

$$d = \frac{\lambda}{(2n+1)(\theta_n^{(0)})^2},$$

соответствующим случаю интерференции двух продольных источников с изотропными диаграммами излучения. Согласно (8),

$$\delta_{d, met} = \frac{|\Delta d|}{d} = \frac{2|\Delta k_n - \Delta k_m|}{k_n - k_m} = \frac{0,14(n-m)}{(2n+1)(2m+1)(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2m+1})}, \quad (9)$$

и, например, при $m = 1$, $n = 2$ ее значение составляет 2%. При учете $\delta_{d, met}$ остаточная погрешность $\delta_d^{(1)}$ нахождения параметра d определяется в основном точностью измерения разностного угла $\theta_n - \theta_m = \Delta\theta_{n,m}$. При условии случайного характера абсолютных погрешностей ϵ_{θ_n} и ϵ_{θ_m} измерения углов θ_n и θ_m

$$\delta_d^{(1)} = \frac{2}{\Delta\theta_{n,m}} (\epsilon_{\theta_n}^2 + \epsilon_{\theta_m}^2)^{1/2} \quad (10)$$

и может составлять десятые доли процента [7], что на порядок и более точнее, нежели в предыдущем случае.

Бипланарная щель. Такая объемная конфигурация состоит из двух полуплоскостей, отстоящих друг от друга вдоль осей x и z соответственно на расстояниях D и d (рис. 4, а). Воспользовавшись результатами работы [4], для спектра такой щели (с точностью до множителя $jk\theta$) можно получить выражение

$$F_2(\theta) = e^{jk\theta D/2} e^{jk\theta^2 d/2} \tilde{Y}(D) - e^{-jk\theta D/2} \tilde{Y}(\theta + \theta_b), \quad (11)$$

где граничный угол $\theta_b = D/d$. Точечная модель объекта, соответствующая спектру (9), показана на рис. 4, б. Если теперь перейти к переменной w , то выражение (11) принимает вид

$$F_2(w) = e^{j\pi N w} e^{j\pi w^2} \tilde{Y}(N) - e^{-j\pi N w} \tilde{Y}(w + N). \quad (11a)$$

Здесь $N = \frac{D}{\sqrt{\lambda d}}$ — число зон Френеля, укладывающихся на размере D .

Для определения параметров объекта D и d рассмотрим более детально структуру спектра в окрестности малых углов $|\theta| \ll \theta_b$ при $N \gg 1$. В этом случае

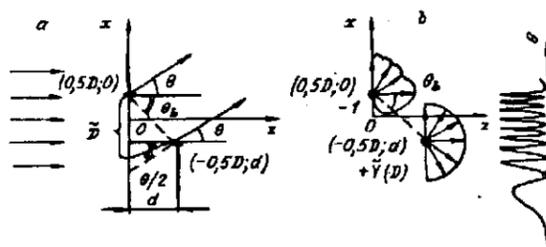


Рис. 4

$$\tilde{Y}(N) = 1 - 0,5 \frac{e^{j(\pi N^2 + \pi/4)}}{\pi N},$$

и для распределения (11а) имеем

$$F_2(w) \approx \hat{F}_2(w) = 2je^{j\pi w^2/2} \sin(\pi Nw + \pi w^2/2), \quad (11б)$$

что совпадает с полем двух точечных источников с изотропными диаграммами излучения, расположенными в крайних точках объекта.

Нетрудно показать, что положение n -го минимума ($n = 0, 1, 2, \dots$) в наблюдаемой дифракционной картине

$$|\hat{F}_2(w)|^2 = 4\sin^2(\pi Nw + \pi w^2/2) \quad (12)$$

при $n/N^2 \ll 1$ определяется выражением

$$w_n = w_n^{(0)} + \Delta w_n = \frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^3} \quad (13)$$

или

$$\theta_n = \theta_n^{(0)} + \Delta\theta_n = \frac{n\lambda}{D} - \frac{n^2\lambda^2 d}{2D^3}, \quad (13а)$$

где $w_n = \frac{n}{N}$.

Первый член в (13а) соответствует случаю плоской щели ($d = 0$), а второй учитывает объемные эффекты, возникающие вследствие интерференции двух разнесенных по глубине точечных источников. Наблюдаемое при этом линейное увеличение периода полос — расстояния между минимумами — можно интерпретировать как результат дифракции света на эквивалентной плоской щели, ширина которой изменяется по закону $\tilde{D} = D + \Delta D^{(1)}(\theta_n)$, где величина $\Delta D^{(1)}(\theta_n) = \frac{\theta_n d}{2}$ — усредненная (в диапазоне углов $[0, \theta_n]$) добавка, обусловленная бипланарной структурой объекта (см. рис. 4, а). Действительно, при $n/N^2 \ll 1$ из (13а) для θ_n имеем

$$\theta_n = n \frac{\lambda}{D} \left(1 - \frac{\theta_n d}{2D} \right) \approx n \frac{\lambda}{D \left(1 + \frac{\theta_n d}{2D} \right)} = n \frac{\lambda}{D}. \quad (13б)$$

Таким образом, конечная протяженность объекта приводит к неэквилидистантному расположению минимумов, причем расстояние между ними (текущий период T_n) для $n \ll N^2$ уменьшается линейно с возрастанием n :

$$T(n) = \theta_n - \theta_{n-1} = \frac{\lambda}{D} - \frac{\lambda^2 d}{2D^3} (2n - 1).$$

Измеряя угловые положения m -го и n -го минимумов в дифракционной картине, для искоемых параметров D и d можно получить выражения

$$D = \frac{mn(n-m)\lambda}{n^2\theta_m - m^2\theta_n}; \quad d = \frac{2m^2n^2(n-m)^2\lambda(n\theta_m - m\theta_n)}{(n^2\theta_m - m^2\theta_n)^3}. \quad (14)$$

Если по энергетическим соображениям выбрать $m = -n$, то, исходя из положения двух симметричных порядков θ_n и $|\theta_{-n}|$ для параметров D и d , имеем

$$D = n \frac{\lambda}{\bar{\theta}_n}; \quad d = n \Delta\theta_{n, -n} \frac{\lambda}{\theta_n^3}, \quad (14a)$$

где

$$\bar{\theta}_n = \frac{\theta_n + |\theta_{-n}|}{2}, \quad \Delta\theta_{n, -n} = \theta_n - |\theta_{-n}|.$$

Таким образом, в случае симметричной регистрации порядков ширина бипланарной щели определяется полусуммой углов θ_n и $|\theta_{-n}|$, а ее протяженность — их разностью.

Отметим, что в случае пренебрежения объемной структурой объекта определение ширины бипланарной щели по стандартной формуле $\bar{D} = n \frac{\lambda}{\bar{\theta}_n}$, согласно (13a), приводит к методической погрешности

$$\delta_{D, met}^{(1)} = \frac{\Delta D^{(1)}}{D} = \frac{n}{2N^2}, \quad (15)$$

и, например, при $N = 10$, $n = 1$ ее значение составляет 0,5 %.

Объемная (симметричная) щель. В соответствии с [4] спектр такого объекта, характеризуемого шириной D и протяженностью d (рис. 5, а), описывается выражением

$$F_3(\theta) = e^{jk\theta D/2} \tilde{\text{rect}} \left[\frac{\theta - \theta_b/2}{\theta_b} \right] - e^{-jk\theta D/2} \tilde{\text{rect}} \left[\frac{\theta + \theta_b/2}{\theta_b} \right] + 0,5e^{jk\theta^2 d/2} [e^{jk\theta D/2} - e^{-jk\theta D/2}], \quad (16)$$

где $\tilde{\text{rect}}(z) = \tilde{Y}(z + 0,5) - \tilde{Y}(z - 0,5)$ — френелевский образ прямоугольной функции $\text{rect}(z)$. При числе зон Френеля $N \gg 1$ и углах $|\theta| \ll \theta_{cr}$ френелевские образы в (16) приближенно можно описать следующими функциями:

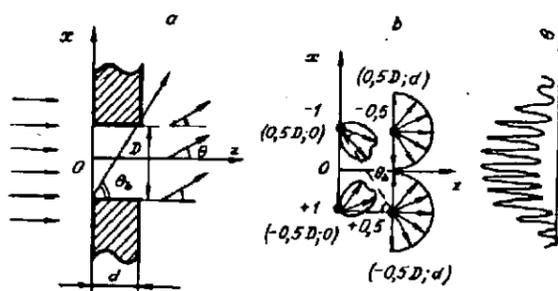


Рис. 5

$$\tilde{\text{rect}}\left[\frac{\theta - \theta_b/2}{\theta_b}\right] = \tilde{Y}(\theta) - \tilde{Y}(\theta - \theta_b) \approx \tilde{Y}(\theta);$$

$$\tilde{\text{rect}}\left[\frac{\theta + \theta_b/2}{\theta_b}\right] = \tilde{Y}(\theta + \theta_b) - \tilde{Y}(\theta) \approx 1 - \tilde{Y}(\theta).$$

В результате для амплитудного спектра (16) имеем

$$F_3(\theta) \approx \hat{F}_3(\theta) = 2\tilde{Y}(\theta)\cos\left(\frac{k\theta D}{2}\right) + j\sin\left(\frac{k\theta D}{2}\right)e^{jk\theta^2 d/2} - e^{-jk\theta D/2}. \quad (17)$$

Если теперь воспользоваться линейной аппроксимацией френелевского образа (2) (при $z = \theta d$ и $\alpha = 2$) в области малых углов

$$|\theta| \ll \theta_{cr} = \sqrt{\frac{\lambda}{d}},$$

а именно

$$\tilde{Y}(\theta) \approx 0,5 + e^{-j\pi/4} \frac{\theta}{\theta_{cr}}, \quad (18)$$

то для амплитудного спектра и спектра мощности получим

$$\hat{F}_3(\theta) = j\sin\left(\frac{k\theta D}{2}\right) + j\sin\left(\frac{k\theta D}{2}\right)e^{jk\theta^2 d/2} + \frac{2\theta}{\theta_{cr}} e^{-j\pi/4} \cos\left(\frac{k\theta D}{2}\right), \quad (19)$$

$$\hat{F}_3(w) = 2je^{j\pi w^2/2} \left[\sin(\pi N w) \cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) + w e^{-j(3\pi/4 + \pi w^2/2)} \cos(\pi N w) \right], \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} |\hat{F}_3(w)|^2 &= 4 \left[\sin^2(\pi N w) \cos^2\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) + w^2 \cos^2(\pi N w) + \right. \\ &\quad \left. + 2w \sin(\pi N w) \cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} w^2 + \frac{3}{4}\pi\right) \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Определим положение минимумов функции (20). В качестве начального приближения выберем значения $w_n^{(0)} = \frac{n}{N}$, соответствующие минимумам спектра плоской щели. Тогда для минимумов w_n при $n \ll N$ можно получить выражение

$$w_n = w_n^{(0)} + \Delta w_n = \frac{n}{N} + \frac{n}{\pi\sqrt{2}N^2}, \quad (21)$$

или

$$\theta_n = n \frac{\lambda}{D} \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{2}N} \right). \quad (21a)$$

При указанных выше условиях выражение (21a) допускает представление в виде

$$\theta_n \approx n \frac{\lambda}{D \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\right)} = \frac{n\lambda}{D - 0,225\sqrt{\lambda d}}. \quad (216)$$

Из (216) следует, что в линейном приближении (18) положение минимумов дифракционной картины объемной щели в отличие от случая биполярной щели эквидистантно, т. е. период полос постоянен. Протяженность щели приводит лишь к его увеличению (в сравнении с плоской щелью) на фиксированную величину $\Delta D^{(2)} = 0,225\sqrt{\lambda d}$, что эквивалентно действию плоской щели с эффективной шириной $\tilde{D} = D - 0,225\sqrt{\lambda d}$. Уменьшение исходного размера D на величину $\Delta D^{(2)}$, пропорциональную размеру зоны Френеля, объясняется существенным влиянием профиля диаграмм излучения точечных источников передней грани объемной щели, описывающих явление виньетирования (затенения) задней гранью пучков света, дифрагированных на передней грани объекта (рис. 5, б). Допускаемая при этом методическая ошибка определения (по спектру) параметра D , исходя из формулы для плоской щели, обратно пропорциональна количеству зон Френеля, укладывающихся на ширине объемной щели, т. е.

$$\delta_{D, met}^{(2)} = \frac{\Delta D^{(2)}}{D} = \frac{0,225}{N}, \quad (22)$$

и может быть значительной. Если положить, например, $N = 10$, то значение $\delta_{D, met}^{(2)}$ составит 2,3 %. Если сопоставить ее с методической погрешностью (15) для случая бипланарной щели, то, так как $n \ll N$, отношение

$$\delta_{D, met}^{(2)} / \delta_{D, met}^{(1)} = \frac{0,45N}{n} \gg 1.$$

Рассмотрим далее способы определения параметров D и d объемной щели. Воспользуемся сначала формулой (216), полученной на основе линейного приближения френелевского образа функции Хевисайда. Очевидно, что это выражение не позволяет одновременно найти указанные параметры. Так, для вычисления ширины щели необходима информация о ее протяженности. Суть первого способа сводится к определению d путем оценки параметров френелевской модуляции в дифракционной картине объемной щели (рис. 6), а размера D — согласно (216). Как известно [4], при числе зон Френеля $N \gg 1$ спектр объемной щели в области углов $\theta \ll \theta_{cr}$ (зона α на рис. 6) содержит, наряду с высокочастотной фраунгоферовской составляющей (θ_n), и низкочастотную френелевскую (φ_m), обусловленную взаимодействием краев передней и задней грани объекта. Минимумы этой модуляции в соответствии с (7) приближенно наблюдаются при значениях $\varphi_m \approx \sqrt{(2m+1)\frac{\lambda}{d}}$ (точ-

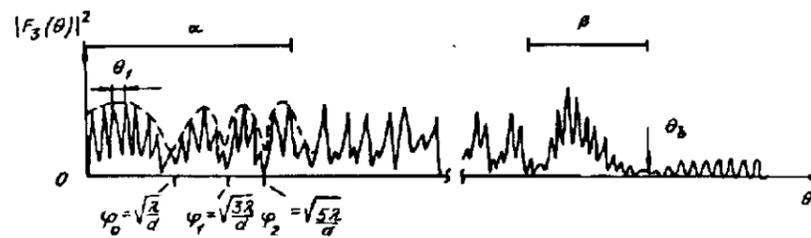


Рис. 6

ность этого соотношения улучшается при возрастании m), откуда для протяженности имеем

$$d \approx (2m + 1) \frac{\lambda}{\varphi_m^2}. \quad (23)$$

Соответственно для параметра D из (216) с учетом (23) получаем выражение

$$D = 0,225\sqrt{\lambda d} + n \frac{\lambda}{\theta_n} = 0,225\sqrt{(2m + 1)} \frac{\lambda}{\varphi_m} + n \frac{\lambda}{\theta_n}. \quad (24)$$

Остановимся на погрешностях определения параметров D и d этим способом. Очевидно, что точность определения d в этом случае зависит от погрешности ε_{φ_m} нахождения угла φ_m , которая может составлять от долей до десятых долей периода $T = \theta_1^{(0)} = \frac{\lambda}{D}$ основных колебаний, т. е. $\varepsilon_{\varphi_m} = \mu T$, где коэффициент $\mu < 1$. Так как $\varphi_m/T = N\sqrt{2m + 1}$, то для относительной погрешности определения d имеем

$$\delta_d = 2 \left| \frac{\varepsilon_{\varphi_m}}{\varphi_m} \right| = \frac{2\mu}{N\sqrt{2m + 1}}. \quad (25)$$

Ее значение, например, при $N = 10$, $m = 2$ и $\mu = 0,2$ составляет $\sim 1,8\%$.

Относительная погрешность δ_D определения ширины щели, согласно (24), зависит от точности измерения углов φ_m и θ_n и в предположении случайного характера абсолютных погрешностей ε_{φ_m} и ε_{θ_n} она описывается выражением

$$\delta_D = \left[\left(\frac{0,225}{N} \varepsilon_{\varphi_m} \right)^2 + \delta_{\theta_n}^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{0,112}{N} \delta_d \right)^2 + \delta_{\theta_n}^2 \right]^{1/2}, \quad (26)$$

где $\delta_{\theta_n} = \frac{\varepsilon_{\theta_n}}{\theta_n}$ — относительная погрешность измерения угла θ_n .

Если теперь обратиться к первой составляющей погрешности, то видно, что влияние неточности измерения d на определяемый размер D уменьшается в $0,112/N$ раз. Например, при $\delta_d = 1,8\%$ и $N = 10$ указанная составляющая не превышает $0,02\%$ и при $\delta_{\theta_n} = 0,1\%$ ею можно пренебречь. В этом случае предельная погрешность определения D будет зависеть как от точности нахождения углового положения минимумов θ_n дифракционной картины, так и от величины остаточной методической погрешности, обусловленной ограниченностью рассматриваемого линейного приближения.

Второй способ определения размеров D и d основан на учете нелинейных членов разложения в выражении для минимумов дифракционной картины объемной щели. С этой целью воспользуемся разложением френелевского образа $\tilde{Y}(\theta)$ в области $|\theta| \ll \theta_{cr}$, ограничившись кубическим членом. Можно показать, что

$$\tilde{Y}(\theta) \approx 0,5 + e^{-j\pi/4} \frac{\theta}{\theta_{cr}} + \frac{\pi}{3} e^{-j\pi/4} \left(\frac{\theta}{\theta_{cr}} \right)^3. \quad (27)$$

Подставляя выражение для $\tilde{Y}(\theta)$ в (17), в результате для углового положения минимумов получим выражение

$$\theta_n = n \frac{\lambda}{D} \left(1 + \frac{0,225}{N} \right) + \frac{0,343n^3\lambda}{N^3 D}. \quad (28)$$

Как и ранее, воспользуемся двумя порядками дифракции с углами θ_m и θ_n . Тогда из двух уравнений для θ_m и θ_n нетрудно получить два промежуточных уравнения:

$$m\theta_n - n\theta_m = \frac{0,343nm(n^2 - m^2)\lambda}{N^3 D}, \quad (29)$$

$$n^3\theta_m - m^3\theta_n = mn(n^2 - m^2)\frac{\lambda}{D}\left(1 + \frac{0,225}{N}\right). \quad (30)$$

Так как решение этих уравнений связано с определенными трудностями, то для упрощения задачи определим сначала N , а затем, исходя из него, искомые параметры D и d . Решение можно найти из следующего уравнения, полученного из (29) и (30):

$$N^3 = \frac{0,343(n^3\theta_m - m^3\theta_n)}{\left(1 + \frac{0,225}{N}\right)(m\theta_n - n\theta_m)} = \frac{\gamma}{1 + \frac{0,225}{N}}, \quad (31)$$

где $\gamma = 0,343(n^3\theta_m - m^3\theta_n)/(m\theta_n - n\theta_m)$. Так как $N \gg 0,225$, то из выражения (31) можно получить, что

$$N = \gamma^{1/3} \left(1 + \frac{0,225}{N}\right)^{-1/3} = \gamma^{1/3} \left(1 + \frac{0,225}{3N}\right)^{-1}.$$

Откуда для N имеем значение

$$N = \gamma^{1/3} - 0,075 = \left[0,343 \frac{n^3\theta_m - m^3\theta_n}{m\theta_n - n\theta_m}\right]^{1/3} - 0,075. \quad (32)$$

Подставляя найденную величину N в (29) и воспользовавшись соотношением $N = D/\sqrt{\lambda d}$ для искомых параметров, получим

$$D = \frac{0,343nm(n^2 - m^2)\lambda}{N^3(m\theta_n - n\theta_m)}, \quad (33)$$

$$d = D^2/(\lambda N^2). \quad (34)$$

Для удобства интерпретации формулы (33) заменим в ней N согласно (32). Если учесть, что $0,225\gamma^{-1/3} \ll 1$, то в результате ширина щели

$$D = \frac{nm(n^2 - m^2)\lambda}{n^3\theta_m - m^3\theta_n} (1 + 0,225\gamma^{-1/3}). \quad (33a)$$

Проанализируем эту формулу. Она содержит основной (первый) член, соответствующий неточному значению ширины щели при определении ее стандартным путем, и дополнительный член, корректирующий основной. Нетрудно понять, что последний член $\sim \sqrt{\lambda d}$. Это следует из (30) или (31), если принять во внимание, что при $N \gg 1$ множитель

$$1 + \frac{0,225}{N} = \left(1 - \frac{0,225}{N}\right)^{-1}.$$

В случае плоской щели ($d = 0$) формула (33а), как и следовало ожидать, совпадает с известной:

$$D = \frac{\lambda}{\theta_1^{(0)}} \left(\theta_m^{(0)} = m\theta_1^{(0)}, \theta_n^{(0)} = n\theta_1^{(0)} \right).$$

Что касается погрешностей определения ширины и протяженности объемной щели, то они в немалой степени зависят от точности нахождения углов θ_n и θ_m .

Наконец, кратко укажем идею третьего способа определения геометрических параметров объемной щели, заключающегося в использовании для измерительных целей спектральной информации в окрестности граничных углов $\theta = \pm D/d$ (зона β на рис. 6, где приведен типичный график спектра мощности $|F_3(\theta)|^2$ объемной симметричной щели при $N \gg 1$). Как известно [4], в направлении этих углов наблюдаются минимумы пространственных частот вследствие интерференции волн от двух диагональных краев объекта. Искомые параметры можно найти, исходя из положения и ширины минимума, а также периода высокочастотной составляющей, обусловленной интерференцией волн от задней грани объемной щели (вторичные источники в плоскости $z = d$ на рис. 5, б). Для практической реализации способа целесообразно, по-видимому, использовать косое освещение с углом наклона, близким к θ_b . Установление аналитических зависимостей между указанными величинами требует, однако, проведения дополнительных исследований.

Интересно отметить, что в этом случае можно заметно снизить погрешность определения протяженности объекта за счет более точного измерения угла θ_b по сравнению с френелевским углом φ_0 ($m = 0$). Последнее следует из того факта, что угол θ_b в N раз больше угла $\varphi_0 = \theta_{cr} = \sqrt{\frac{\lambda}{d}}$ (или в N^2 раз

больше периода основных колебаний $\theta_1^{(0)} = \frac{\lambda}{D}$). Можно показать, что относительная погрешность δ_{θ_b} определения его в N раз меньше δ_{φ_0} . Действительно, если погрешность измерения θ_b составляет долю (μ) от периода основных колебаний, то

$$\delta_{\theta_b} = \frac{\mu}{N^2} = \frac{\delta_{\varphi_0}}{N}.$$

Полагая, например, $N = 10, \mu = 0,2$, для δ_{θ_b} получаем значение 0,2 %, что на порядок точнее величины δ_{φ_0} при тех же значениях N и μ . С учетом этого алгоритм вычисления параметров D и d следующий. Сначала, например, по ширине минимума (область β на рис. 6) находится приближенное значение d , и, исходя из него, определяется уточненное значение D по формуле (24) или аналогичной ей для зоны β . Более точное значение d вычисляется по формуле $d = D/\theta_b$ с учетом измеренных величин D и θ_b . Можно ожидать, что погрешность определения d таким путем удастся снизить до уровня десятых долей процента.

Результаты экспериментов. С целью проверки эффективности предложенных способов определения по спектрам геометрических параметров протяженных тел проводились численные и физические эксперименты. В качестве объекта выбиралась объемная щель.

В первом случае на ЭВМ в френелевском приближении производился расчет спектров мощностей объекта, определялись положения их минимумов и расстояния между ними (текущий период). Исходя из полученных данных, вычислялись ширина D и протяженность d объемной щели на основе линейного и кубического приближений. Информация, подлежащая обработке, представлена на рис. 7 в виде графиков зависимостей текущего периода

$$\tilde{T}(n) = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\theta_1^{(0)}}$$

спектра объемной щели при следующих ее параметрах: $D = 0,465$ мм, $d = 4$ мм (кривая 1, $N_1 = 9,278$) и $D = 0,465$ мм, $d = 2$ мм (кривая 2, $N_2 = 13,121$). Для большей наглядности результаты значения текущего периода нормировались на угол $\theta_1^{(0)} = \frac{\lambda}{D}$, соответствующий первому минимуму спектра плоской щели (в экспериментах $\theta_1^{(0)}$ равнялся $1,35 \cdot 10^{-3}$).

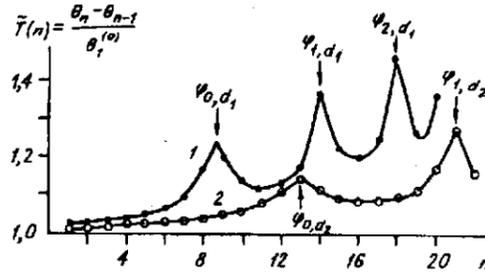


Рис. 7

В рамках линейного приближения сначала оценивались френелевские углы φ_m , соответствующие максимумам текущего периода для двух значений N (см. рис. 7), а затем согласно формулам (23) и (24) вычислялись протяженность \hat{d} и ширина \hat{D} объемной щели. Результаты расчетов сведены в табл. 1, где $\varphi_{m,d}$ — френелевские углы, соответствующие различным порядкам m и протяженности d ; $\tilde{D} = \frac{\lambda}{\theta_n}$ — неточное значение ширины, полученное без учета объемных эффектов; $\delta_{\hat{d}}, \delta_{\hat{D}}, \delta_{\tilde{D}}$ — относительные погрешности определения соответственно параметров \hat{d} , \hat{D} и \tilde{D} . Можно видеть, что относительная погрешность $\delta_{\hat{d}}$ по мере увеличения порядка m заметно уменьшается: с 8—9 до 0,2—0,6 %. Что касается размера D , то благодаря учету объемных эффектов относительная погрешность его вычисления в сравнении с $\delta_{\tilde{D}}$ снижается на порядок и более и достигает 0,1 %. Остаточные погрешности определяются, во-первых, не учитываемыми при рассмотрении интерференционными эффектами взаимодействия краев щели, во-вторых, ограниченностью линейного приближения при аппроксимации им френелевского образа функции Хевисайда в окрестности $|\theta| \ll \theta_{cr}$. И наконец, небольшой вклад в суммарную погрешность дают ошибки вычисления положений минимумов спектров вследствие округления результатов.

Результаты вычисления параметров D и d объемной щели в кубическом приближении, согласно формулам (33) и (34), представлены в табл. 2. Значения порядков дифракции m и n выбирались соответственно 1 и 3. Как и следовало ожидать, точность определения параметра D в этом случае выше, чем в предыдущем, благодаря лучшей аппроксимации френелевского образа

Т а б л и ц а 1

Параметр объемной щели, мкм	$\varphi_{m,d} \times 10^{-2}$, рад	\hat{d} , мкм	$\delta_{\hat{d}}$, %	\hat{D} , мкм	$\delta_{\hat{D}}$, %	\tilde{D} , мкм	$\delta_{\tilde{D}}$, %
$D = 465$	$\varphi_{0,d_1} = 1,314$	3635	9	463,68	0,28	453,1	2,55
$d_1 = 4000$	$\varphi_{1,d_1} = 2,116$	4207	5	464,49	0,1	456,8	1,76
$(N_1 = 9,278)$	$\varphi_{2,d_1} = 2,81$	3977,6	0,6	464,17	0,17	—	—
$D = 465$	$\varphi_{0,d_2} = 1,8486$	1838	8	464,09	0,19	—	—
$d_2 = 2000$	$\varphi_{1,d_2} = 3,0658$	2004	0,2	464,69	0,07	—	—
$(N_2 = 13,121)$							

Т а б л и ц а 2

Параметр объемной щели, мкм	\hat{D} , мкм	\hat{d} , мкм	$\delta_{\hat{D}}$, %	$\delta_{\hat{d}}$, %
$D = 465$ $d_1 = 4000$ ($N_1 = 9,278$)	464,95	4524	0,01	13
$D = 465$ $d_2 = 2000$ ($N_2 = 13,121$)	465,05	1973	0,01	1,37

$Y(\theta)$ полиномом третьей степени (27). Следует отметить повышенный уровень погрешности $\delta_{\hat{d}}$ при $N = N_1$, который, однако, резко снижается при увеличении N .

Физические эксперименты заключались в исследовании дифракционных картин абсолютно поглощающей объемной (симметричной) щели, формируемых с помощью оптического анализатора спектров Фурье. Подробно эти эксперименты описаны в [4]. Используя полученные в ней экспериментальные результаты, автор вычислил геометрические параметры объемной щели по формулам, полученным в настоя-

щей работе. На рис. 8 приведен график спектра мощности объемной щели (сплошная линия), рассчитанный согласно (16). Точками показаны экспериментальные данные. Параметры объекта были следующими: ширина $D = 277$ мкм, протяженность $d = 1$ мм. При длине волны лазера $\lambda = 0,6328$ мкм величина $N = 11,053$. Зависимость текущего периода спектра от номера дифракционного порядка n показана на рис. 9, где точки, соединенные линией, — расчетные данные, а крестики — экспериментальные. Отсюда следует, что френелевский угол, соответствующий $m = 1$, равен 0,044, а значение d , согласно (23), — 0,95 мм и таким образом отличается от истинного значения d на 5%.

При определении размера D , согласно (29), для повышения точности измерений производилось усреднение первых четырех текущих периодов. В результате вычислений значение D составило 276,3 мкм. Погрешность определения ширины щели не превысила 0,25%, что на порядок точнее в случае вычисления этого параметра традиционным путем.

Таким образом, положительные результаты численных и физических экспериментов на примере такого типичного и сложного элемента трехмерных тел, как абсолютно поглощающая объемная (симметричная) щель, свидетельствуют о работоспособности разработанной теории определения по спектру параметров протяженных тел.

Заключение. В настоящей работе на основе предложенной ранее модели эквивалентных диафрагм в аналитическом виде исследовано поведение экстремальных точек дифракционных картин (спектров) типичных элементов трехмерных (абсолютно поглощающих) тел постоянной толщины — объемного (симметричного) края бипланарной щели и объемного отверстия. Предложены эффективные способы отдельного определения геометрических параметров объемных тел, не требующие громоздких вычислений.

В случае объемного края протяженностью d угловое расстояние θ_n между минимумами определяется результатом интерфе-

$$\tilde{T}(n) = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\theta_1^{1/n}}$$

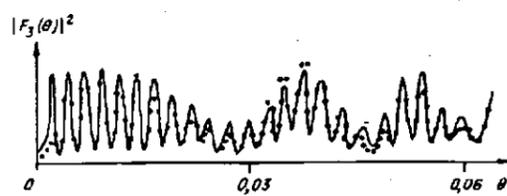


Рис. 8

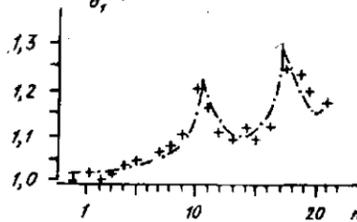


Рис. 9

ренции двух точечных источников, расположенных на краях передней и задней граней объекта и имеющих соответственно неизотропную и изотропную диаграммы излучения. Показано, что величина θ_n пропорциональна критическому углу дифракции $\theta_{cr} = \sqrt{\frac{\lambda}{d}}$, а коэффициент пропорциональности в

отличие от случая интерференции источников изотропными диаграммами излучения содержит дополнительный аддитивный член, пренебрежение которым ведет к методической погрешности (порядка нескольких процентов).

Поведение спектра бипланарной щели шириной D и протяженностью d во многом определяется числом зон Френеля $N = D/\sqrt{\lambda d}$, укладывающихся на размер D . Показано, что при $N \gg 1$ спектр объекта эквивалентен результату интерференции двух точечных источников, расположенных на краях щели, с изотропными диаграммами излучения. При этом положение минимумов в отличие от плоской щели неэквидистантно: оно содержит, наряду с постоянным членом, соответствующим дифракции на плоской щели, переменную составляющую, линейно зависящую от порядка дифракции n , причем амплитуда ее $\sim N^{-2}$. Показано, что искомые параметры D и d могут быть найдены по результатам измерения положения минимумов при различных порядках дифракции. Определение ширины щели традиционным путем (исходя из теневого изображения объекта) приводит к методической погрешности, значение которой, например, при $N = 10$ и $n = 1$ и составляет 0,5 %.

Найдены выражения для углового положения минимумов в спектре объемной щели в линейном и нелинейном (кубическом) приближениях по малому параметру n/N . Показано, что в линейном приближении положение минимумов в спектре эквидистантно, однако из-за виньетирования задней гранью волн, дифрагированных на передней грани, имеет место увеличение периода их следования (в сравнении со случаем плоской щели) на величину, пропорциональную размеру зоны Френеля $\sqrt{\lambda d}$. Это может приводить к заметной методической погрешности, составляющей, например, при $N = 10$ значение 2,3 %. Так как полученное выражение не позволяет одновременно определять размеры объекта D и d , то его протяженность предложено оценивать, исходя из положения минимумов френелевской модуляции, приближенно соответствующих максимумам текущего периода спектра. Погрешность определения d , как показывают оценки, определяется N и номером m регистрируемого френелевского порядка n , например, при $N = 15$ и $m = 2$ составляет ~ 1 %. Что касается погрешности нахождения ширины щели, то она зависит в основном от ошибки нахождения углового положения минимумов и от остаточной погрешности, обусловленной ограниченностью линейного приближения, и может быть уменьшена до десятых долей процента.

Большой точности определения D удастся достигнуть при использовании кубического приближения для френелевского образа функции Хевисайда. Данный способ предполагает измерение положения двух дифракционных порядков. Точность измерения протяженности объекта в этом случае в не малой степени зависит от ошибок регистрации положения порядков.

Дополнительные возможности для определения геометрических параметров объемной щели (в том числе с большей точностью) открываются при использовании спектральной информации в окрестности граничных углов, что является предметом более тщательного исследования.

Проведенные численные (на ЭВМ) и физические (на базе оптического фурье-анализатора) эксперименты свидетельствуют об эффективности предложенных способов вычисления параметров типичного трехмерного тела — объемной щели. Экспериментально достигнутый уровень вычисления ширины щели составил 0,01—0,2 %, а ее протяженности — 0,5—5 %.

Результаты работы могут быть обобщены на случай объемных несимметричных отверстий различной формы.

Автор искренне благодарен ст. н. с. Б. Е. Кривенкову за помощь в вычислении спектров на ЭВМ и ценные замечания, высказанные при подготовке к печати настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов К. И., Прокопенко В. Т., Митрофанов А. С. Применение лазеров в машиностроении.—Л.: Машиностроение, 1978.
2. Бычков Р. М., Коронкевич В. П., Чугуй Ю. В. Измерение параметров резьбы когерентно-оптическим методом // Опт.-мех. пром-сть.—1977.—№ 10.
3. Коронкевич В. П., Кривенков Б. Е., Михляев С. В., Чугуй Ю. В. Оптико-геометрический метод расчета дифракции Фраунгофера на объемных телах // Автометрия.—1980.—№ 2.
4. Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Дифракция Фраунгофера на объемных телах постоянной толщины // Автометрия.—1987.—№ 3.
5. Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Дифракция Фраунгофера на отражающих объемных телах постоянной толщины // Автометрия.—1991.—№ 4.
6. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамова, И. Стишина.—М.: Наука, 1979.
7. Бычков Р. М., Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Повышение точности дифракционных методов размерного контроля // Автометрия.—1984.—№ 3.

Поступила в редакцию 11 сентября 1991 г.

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!