реализована при помощи микросхем, реализующих операцию «исключающее ИЛИ».

Управление величинами коэффициентов осуществляется путем изменения напряжения питания управляемых инверторов в тех точках структуры, в которых варьируются коэффициенты. Расчеты на ЭВМ показывают, что при перестройке в полторы-две декады максимальное изменение коэффициентов не превышает двух раз. Следовательно, и диапазон изменения напряжения питания управляемых инверторов должен иметь ту же величину, что вполне допустимо для КМОП-микросхем.

Использование такой элементной базы, а также функциональный характер реализации фильтрации сигналов изображения обусловливают высокое быстродействие и достаточно низкое энергопотребление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ.—М.: Мир, 1982.
2. Ярославский Л. П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику.—М.: Радио и связь, 1987.
3. Каппелини В., Константинидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ.—М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры: Пер. с англ.—М.: Сов. радио, 1980.
5. Федорков Б. Г., Телец В. А., Дегтяренко В. П. Микроэлектронные цифроаналоговые и аналого-цифровые преобразователи.—М.: Радио и связь, 1984.

Поступила в редакцию 10 апреля 1990 г.

УДК 525.7

С. В. Соколов

(Ростов-на-Дону)

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА

Решаемая задача сформулирована как задача оптимального оценивания вектора ошибок возмущенного фильтра Калмана. Использование аппарата для исследования возмущений многомерных линейных систем позволило получить, наряду с уравнением вектора ошибок возмущенной оценки, уравнение вектора ошибки возмущенной апостериорной дисперсии. Оптимальная оценка такого расширенного вектора, т. е. решение поставленной задачи, осуществлялась путем применения методов теории условно-гауссовской фильтрации. В качестве сигнала наблюдения при этом был использован непосредственно вектор выходных сигналов возмущенного фильтра. Приведен пример, иллюстрирующий возможность практического применения полученных результатов.

1. Постановка задачи. Оценка вектора состояния дискретной линейной системы

$$\mathrm{X}_i = \Phi_{i/i-1}\mathrm{X}_{i-1} + \mathrm{W}_i,\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0,$$

где X_i — N-мерный вектор состояния в дискретный момент времени i; $\Phi_{i/i-1}$ — переходная матрица состояний размерностью $N \times N$; W_i — N-мерный вектор белых гауссовых шумов объекта с известной матрицей интенсивностей $G_i\delta_{ij}$ (δ_{ij} — дельта-функция Кронекера) и нулевым вектором матожидания, на основании выходных сигналов измерителя, описываемого векторным уравнением

$$\mathrm{Y}_i = H_i\mathrm{X}_i + \mathrm{V}_i,$$

где Y_i — M-мерный вектор измерений; H_i — матрица измерений размерностью $M \times N$; V_i — M-мерный вектор белых гауссовых помех измерения с нулевым вектором матожидания и матрицей интенсивностей $R_i \delta_{ij}$, с последующим использованием фильтра Калмана

$$\begin{gathered}
\hat{X}_{i+1} = \Phi_{i+1/i}\hat{X}_i + K_{i+1}(Y_{i+1} - H_{i+1}\Phi_{i+1/i}\hat{X}_i),\\
K_{i+1} = P_{i+1/i}H^T_{i+1}(H_{i+1}P_{i+1/i}H^T_{i+1} + R_{i+1})^{-1},\\
P_{i+1/i} = \Phi_{i+1/i}P_i\Phi^T_{i+1/i} + G_{i+1},\\
P_{i+1} = (E - K_{i+1}H_{i+1})P_{i+1/i},\\
\hat{X}_0 = M(X_0),\ P_0 = M\{(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T\}
\end{gathered} \tag{1}$$

обеспечивает минимум среднеквадратической ошибки фильтрации лишь при абсолютно точном знании параметров системы (интенсивностей шумов, матрицы измерений и пр.).

Возмущения параметров объекта и наблюдателя вектора состояния, неизбежные при функционировании реальных систем, приводят к принципиальной невозможности обеспечения оптимальной оценки состояния линейной системы фильтром (1). Более того, возникающая, как правило, при этом расходимость фильтра накладывает жесткие ограничения на величину интервала времени его использования. До настоящего времени были предприняты многочисленные попытки решения этой проблемы путем определения допустимых границ возмущения калмановской оценки, непосредственной оценки возмущений параметров объекта (с неизбежными при этом ошибками параметрического оценивания) или численным моделированием процессса оценивания вектора состояния конкретного объекта [1, 2]. Очевидно, что такие подходы не позволяют решить главной задачи возмущенной фильтрации — оптимального в среднеквадратическом текущего оценивания ошибок калмановского фильтра, обусловленных его параметрическими возмущениями. При полном рассмотрении данной проблемы необходимо учитывать другой ее аспект: влияние на процесс фильтрации априорной неопределенности, т. е. неизбежных и естественных вариаций начальных условий фильтра. В настоящее время рассмотрены варианты определения лишь верхней границы возмущения калмановской оценки, обусловленной «неопределенностью априорной неопределенности» (например, в [2]). Таким образом, решение задачи фильтрации параметрических возмущений фильтра Калмана, т. е. оптимального текущего оценивания ошибок калмановской фильтрации из-за погрешностей в определении параметров фильтра и его начальных условий, представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. В дальнейшем при решении поставленной задачи используется математический аппарат исследования возмущений многомерных линейных систем, предложенный в [3], и принятые там же обозначения. Введем также, следуя [3], для произвольной матрицы A размерностью $m \times n$ вектор $A^{(v)}$, формируемый из ее элементов следующим образом:

$$A^{(v)} = |a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1}\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \ldots a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn}|^T.$$

2. **Уравнение возмущения калмановского фильтра.** Уравнение, определяющее вектор ошибок процесса калмановской фильтрации, вызванных возмущениями параметров как объекта, так и наблюдателя, получено ранее в [1], но без учета шумов объекта W_i. Для расширения класса исследуемых систем дополним полученное уравнение составляющей ошибки фильтрации $\delta\hat{X}^{(G)}_{i+1}$ за счет возмущений δG_{i+1} матрицы G_{i+1}.

Возмущение $\delta\hat{\mathbf{X}}_{i+1}^{(G)}$ можно записать в виде

$$\delta\hat{\mathbf{X}}_{i+1}^{(G)} = \left(\frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} \hat{\otimes}\, \mathbf{r}\right) \delta\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{Y}_{i+1} - H_{i+1}\Phi_{i+1/i}\hat{\mathbf{X}}_i$.

Учитывая, что

$$\frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} = \frac{DP_{i+1/i}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} \hat{\otimes}\, H_{i+1}S^{-1} - P_{i+1/i}H_{i+1}^T S^{-1} \frac{DS}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} \hat{\otimes}\, S^{-1},$$

а также, что по лемме 5 [3]

$$\frac{DP_{i+1/i}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} \hat{\otimes}\, H_{i+1}^T S^{-1} \hat{\otimes}\, \mathbf{r} = \mathbf{r}^T S^{-1} H_{i+1} \otimes E,$$

$$\frac{DS}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} = H_{i+1} \frac{DG_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} \hat{\otimes}\, H_{i+1}^T,$$

и, следовательно,

$$P_{i+1/i}H_{i+1}^T S^{-1} H_{i+1} \frac{DG_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}} \hat{\otimes}\, H_{i+1}^T S^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{r}^T S^{-1} H_{i+1} \otimes K_{i+1} H_{i+1},$$

окончательно имеем

$$\delta\hat{\mathbf{X}}_{i+1}^{(G)} = [\mathbf{r}^T S^{-1} H_{i+1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})]\delta\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})}. \tag{2}$$

Используя уравнение ошибки, представленное в [1], запишем искомое уравнение ошибки возмущенного фильтра (1) в следующей форме:

$$\delta\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = A_0\delta\hat{\mathbf{X}}_i + A_1\delta\Phi_{i+1}^{(\mathrm{v})} + A_2\delta\mathbf{H}_{i+1}^{(\mathrm{v})} + A_3\delta\mathbf{G}_{i+1}^{(\mathrm{v})} + A_4\delta\mathbf{R}_{i+1}^{(\mathrm{v})} + A_5\delta\mathbf{P}_i^{(\mathrm{v})}, \tag{3}$$

где

$$A_0 = (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i},$$

$$A_1 = (\hat{\mathbf{X}}_i + P_i\Phi_{i+1/i}^T H_{i+1}^T S^{-1}\mathbf{r})^T \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1}) +$$

$$+ (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}P_i \otimes \mathbf{r}^T S^{-1} H_{i+1},$$

$$A_2 = P_{i+1} \otimes \mathbf{r}^T S^{-1} - \hat{\mathbf{X}}_{i+1}^T \otimes K_{i+1} = P_{i+1} \otimes \mathbf{r}^T S^{-1} -$$

$$- (\Phi_{i+1/i}\hat{\mathbf{X}}_i + K_{i+1}\mathbf{r})^T \otimes K_{i+1},$$

$$A_3 = \mathbf{r}^T S^{-1} H_{i+1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1}), \quad A_4 = -\mathbf{r}^T S^{-1} \otimes K_{i+1},$$

$$A_5 = \mathbf{r}^T S^{-1} H_{i+1}\Phi_{i+1/i} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i},$$

$\delta\Phi_{i+1}, \delta H_{i+1}, \delta R_{i+1}, \delta P_i$ — возмущения соответствующих матричных параметров фильтра.

При последующем анализе стохастического уравнения (3) вектор-шумы $\delta\Phi_i^{(v)}, \delta \mathrm{H}_i^{(v)}, \delta \mathbf{R}_i^{(v)}, \delta \mathrm{G}_i^{(v)}$ полагаем марковскими, что справедливо для широкого класса реальных объектов, а во избежание непринципиального расширения вектора состояния определим их далее как белые гауссовые с нулевыми векторами матожиданий и известными матрицами интенсивностей $D_{\Phi_i}\delta_{ij}$, $D_{H_i}\delta_{ij}$, $D_{R_i}\delta_{ij}$, $D_{G_i}\delta_{ij}$ соответственно, где δ_{ij} — дельта-функция Кронекера. Для случайной составляющей $\delta \mathbf{P}_i^{(v)}$ такая аппроксимация не представляется возможной в силу ее зависимости не только от возмущений $\delta\Phi_i^{(v)}, \delta \mathrm{H}_i^{(v)}, \delta \mathbf{R}_i^{(v)}$ и $\delta \mathrm{G}_i^{(v)}$, но и от предыдущих ее значений. В связи с этим получим уравнение, описывающее изменение вектора $\delta \mathbf{P}_i^{(v)}$ во времени.

3. Уравнение вектора ошибок возмущенной апостериорной ковариационной матрицы. В отличие от векторного уравнения калмановской оценки $\hat{\mathrm{X}}_i$ уравнение апостериорных ковариаций P_i является матричным, что требует соответствующего развития математического аппарата, предложенного в [3] и не позволяющего непосредственно определять возмущение $\delta \mathrm{F}^{(v)}$ для матрицы F, зависящей от матрицы Q размерностью $n \times m$, вызванное возмущением $\delta \mathrm{Q}^{(v)}$. Эта задача решается с помощью следующих лемм, доказательства которых приведены в приложении 1.

Лемма 1. Пусть $F = AQB$, где A, B — матрицы соответствующей размерности. Если вектор $\mathrm{Q}^{(v)}$ получает возмущение $\delta \mathrm{Q}^{(v)}$ (матрица Q, соответственно δQ), то

$$\delta \mathrm{F}^{(v)} = [(B^T E_{V1} \otimes A) \hat{\otimes} \mathrm{E}^{(v)}]\delta \mathrm{Q}^{(v)},$$

где размерность единичной матрицы E соответствует размерности матрицы A;

$$E_{V1} = \left| E_n^{(1)} \otimes E_{m(1)} \vdots E_n^{(2)} \otimes E_{m(1)} \vdots \dots \vdots E_n^{(n)} \otimes E_{m(m)} \right|,$$

E_i — единичная матрица размерностью $i \times i$, $E_{k(j)}$ — j-й столбец матрицы E_k, $E_k^{(j)}$ — j-я строка.

Лемма 2. Пусть $F = AQ^T B$. Если вектор $\mathrm{Q}^{T(v)}$ получает возмущение $\delta \mathrm{Q}^{(v)}$, то

$$\delta \mathrm{F}^{(v)} = [(B^T E_{V2} \otimes A) \hat{\otimes} \mathrm{E}^{(v)}]\delta \mathrm{Q}^{(v)},$$

где

$$E_{V2} = \left| E_{n(1)} \otimes E_m^{(1)} \vdots E_{n(2)} \otimes E_m^{(1)} \vdots \dots \vdots E_{n(n)} \otimes \right.$$
$$\left. \otimes E_m^{(1)} \vdots E_{n(1)} \otimes E_m^{(2)} \vdots \dots \vdots E_{n(n)} \otimes E_m^{(m)} \right|.$$

Используя доказательства и результаты указанных лемм для оценки влияния параметрических возмущений на ошибки определения матрицы апостериорных ковариаций, запишем уравнение для $\delta \mathbf{P}_i^{(v)}$ в следующем виде:

$$\delta \mathbf{P}_{i+1}^{(v)} = B_0 \delta \mathbf{P}_i^{(v)} + B_1 \delta \mathbf{\Phi}_{i+1}^{(v)} + B_2 \delta \mathbf{H}_{i+1}^{(v)} + B_3 \delta \mathbf{G}_{i+1}^{(v)} + B_4 \delta \mathbf{R}_{i+1}^{(v)}, \tag{4}$$

где $\delta \mathbf{P}_0^{(v)}$ — вектор ошибок определения элементов матрицы априорной ковариации,

$$B_0 = [(E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i} E_{V1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}] \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)},$$

$$B_1 = [(E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i} P_i E_{V1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})] \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)} +$$

$$+ [(E - K_{i+1}H_{i+1})E_{V2} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i} P_i] \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)},$$

$$B_2 = -(K_{i+1}E_{V2} \otimes P_{i+1}) \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)} - (P_{i+1}E_{V1} \otimes K_{i+1}) \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)},$$

$$B_3 = [(E - K_{i+1}H_{i+1})E_{V1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})] \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)},$$

$$B_4 = [K_{i+1}E_{V1} \otimes K_{i+1}] \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)}.$$

Вывод аналитических выражений матриц B_0 — B_4 приведен в приложении 2.

Уравнения (3), (4) описывают полный вектор ошибок возмущенного фильтра Калмана, при этом уравнение (4) может представлять самостоятельный интерес, например, на этапе проектирования при исследовании характера эволюции ошибок элементов матрицы апостериорной ковариации.

4. **Синтез оптимального фильтра параметрических возмущений.** Истинная оценка вектора $\mathbf{X}_{i+1}^0$ состояния объекта в текущий момент времени может быть определена как

$$\mathbf{X}_{i+1}^0 = \hat{\mathbf{X}}_{i+1} - \delta \hat{\mathbf{X}}_{i+1}.$$

Полученные выше уравнения (3) позволяют сформировать стохастическое уравнение истинной оценки в виде

$$\mathbf{X}_{i+1}^0 = A_0 \mathbf{X}_i^0 + K_{i+1} \mathbf{Y}_{i+1} - A_1 \delta \mathbf{\Phi}_{i+1}^{(v)} - A_2 \delta \mathbf{H}_{i+1}^{(v)} -$$

$$- A_3 \delta \mathbf{G}_{i+1}^{(v)} - A_4 \delta \mathbf{R}_{i+1}^{(v)} - A_5 \delta \mathbf{P}_i^{(v)}, \tag{5}$$

$$\mathbf{X}_0^0 = \hat{\mathbf{X}}_0 - \delta \hat{\mathbf{X}}_0.$$

Исходя из изложенного, определим далее задачу возмущенной фильтрации как задачу текущей оценки векторов (3) — (5), используя при этом в качестве сигнала наблюдателя за оцениваемым вектором возмущенную калмановскую оценку $\hat{\mathbf{X}}_i$.

Уравнение расширенного оцениваемого вектора в этом случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mathbf{X}^0_{i+1} \\ \delta\hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \delta\mathbf{P}^{(v)}_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & 0 & -A_5 \\ 0 & A_0 & A_5 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X}^0_i \\ \delta\hat{\mathbf{X}}_i \\ \delta\mathbf{P}^{(v)}_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Q \\ Q \\ Q_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta\mathbf{\Phi}^{(v)}_{i+1} \\ \delta\mathbf{H}^{(v)}_{i+1} \\ \delta\mathbf{G}^{(v)}_{i+1} \\ \delta\mathbf{R}^{(v)}_{i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{i+1}\mathbf{Y}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

где

$$Q = \left| A_1 \vdots A_2 \vdots A_3 \vdots A_4 \right|, \quad Q_1 = \left| B_1 \vdots B_2 \vdots B_3 \vdots B_4 \right|.$$

Учитывая, что уравнение выходного сигнала калмановского измерителя можно представить как

$$\mathbf{Y}_i = H_i(\hat{\mathbf{X}}_i + \Delta_i) + \mathbf{V}_i,$$

где Δ_i — вектор ошибок оптимальной оценки вектора состояния невозмущенной системы «объект — наблюдатель», запишем уравнение наблюдателя следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \Phi_{i+1/i}(\mathbf{X}^0_i + \delta\hat{\mathbf{X}}_i) + K_{i+1}(H_{i+1}\Phi_{i+1/i}\Delta_i + H_{i+1}\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+1}).$$

Функциональный характер данного уравнения позволяет получить уравнения искомого фильтра в форме условно-гауссового фильтра непосредственно из доказательства основной теоремы условно-гауссовой фильтрации. Считая выполненными допущения, положенные в основу теории условно-гауссовой фильтрации [4, с. 505], что вытекает из рассмотренной выше постановки решаемой задачи, и вводя обозначения:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{X}^0_i \\ \delta\hat{\mathbf{X}}_i \\ \delta\mathbf{P}^{(v)}_i \end{vmatrix}, \quad Q_A = \begin{vmatrix} A_0 & 0 & -A_5 \\ 0 & A_0 & A_5 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix}, \quad Q_B = \begin{vmatrix} -Q \\ Q \\ Q_1 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{Q}_C = \begin{vmatrix} K_{i+1}\mathbf{Y}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad D_\xi = \begin{vmatrix} D_{\Phi_{i+1}} & & & 0 \\ & D_{H_{i+1}} & & \\ & & D_{G_{i+1}} & \\ 0 & & & D_{R_{i+1}} \end{vmatrix} \delta_{(i+1,\, j+1)},$$

$$\Phi_C = |1\ 1\ 0| \otimes \Phi_{i+1/i},$$

$$E_P = \left| K_{i+1}H_{i+1}\Phi_{i+1/i} \vdots K_{i+1}H_{i+1} \vdots K_{i+1} \right| \begin{vmatrix} P_{i/i-1} & & \mathbf{0} \\ & G_{i+1} & \\ \mathbf{0} & & R_{i+1} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left| K_{i+1}H_{i+1}\Phi_{i+1/i} \vdots K_{i+1}H_{i+1} \vdots K_{i+1} \right|^T,$$

получаем уравнения оптимального оценивания для рассматриваемого вектора:

$$\hat{\mathbf{Z}}_{i+1} = \mathrm{Q}_C + Q_A\hat{\mathbf{Z}}_i + (Q_A J_i \Phi_C^T)[E_P + \Phi_C + J_i\Phi_C^T]^+(\hat{\mathbf{X}}_{i+1} - \Phi_C\hat{\mathbf{Z}}_i),$$

$$J_{i+1} = Q_A J_i Q_A^T + Q_B D_\xi Q_B^T - Q_A J_i \Phi_C^T [E_P + \Phi_C J_i \Phi_C^T]^+ \Phi_C J_i Q_A^T, \qquad (7)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_0 = M(\mathbf{Z}_0) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{X}}_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad J_0 = \left| \begin{array}{c|c|c} D_{\delta X} & D_{\delta X} & 0 \\ \hline D_{\delta X} & D_{\delta X} & \\ \hline & 0 & D_{\delta P} \end{array} \right|,$$

где $D_{\delta X}$ — ковариационная матрица ошибок определения вектора начальной оценки, $D_{\delta P}$ — ковариационная матрица ошибок определения матрицы априорных ковариаций P_0: «+» — знак псевдообращения [4]. Рекуррентные уравнения (7) решают триединую задачу, позволяя осуществить оптимальное среднеквадратическое оценивание как ошибки в определении возмущенной матрицы апостериорных ковариаций, так и ошибки возмущенной оценки, а также истинной оценки вектора состояния. Выбор начальных условий уравнений (7) осуществляется исходя из ковариаций ошибок определения начальных условий фильтрации, что позволяет учесть степень неопределенности в задании априорной информации фильтра Калмана (т. е. «неопределенность априорной неопределенности»). Тем самым реализация алгоритма (7) исчерпывает оба рассмотренных выше аспекта проблемы возмущенной калмановской фильтрации.

В заключение рассмотрим пример, иллюстрирующий возможность практического использования полученных результатов.

Пример. Векторное уравнение движения плоского гироскопического маятника, рассмотренное в [5], с учетом принятых обозначений имеет вид

$$\mathbf{X}_i = \Phi\mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{W}_i,\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0,$$

$$\mathbf{X}_i = |\alpha_i \beta_i|^T,$$

где

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\chi}{H_\text{г}}\Delta\tau \\ -\dfrac{lP_\text{м}}{H_\text{г}}\Delta\tau & 1 - \dfrac{M}{H_\text{г}}\Delta\tau \end{vmatrix},$$

$\mathbf{W}_i$ — гауссовый белый шум с нулевым матожиданием и матрицей интенсивностей:

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{b}{H_г}\Delta\tau\right)^2 q \end{vmatrix} \delta_{ij}.$$

Здесь α_i — угол отклонения маятника от вертикали; β_i — угол поворота гироскопа вокруг оси его кожуха; $H_г$ — кинетический момент гироскопа; $lP_м$ — статический момент маятника; M — крутизна момента радиальной коррекции; χ — жесткость пружины, связывающей кожух гироскопа с маятником.

Измеритель описывается уравнением

$$Y_i = H\mathbf{X}_i + V_i,$$

где $H = |01|$; V_i — гауссовый белый шум с нулевым матожиданием и интенсивностью $r\delta_{ij}$.

При моделировании движения объекта и процесса измерений параметры системы имели следующие значения:

$$\frac{lP_м}{H_г} = 0{,}02\ с^{-1}, \frac{\chi}{H_г} = 0{,}005\ с^{-1}, \frac{M}{H_г} = \frac{b}{H_г} = 0{,}01\ с^{-1},$$

$$\Delta\tau = 0{,}1\ с,\ q = 0{,}5\cdot 10^{-6}\ с,\ r = 10^{-7}\ с,\ \mathbf{X}_0 = \left|9\cdot 10^{-3} \vdots 1{,}8\cdot 10^{-2}\right|^T рад.$$

Интегрирование уравнений фильтра в обычном и возмущенном случаях осуществлялось с шагом 1 с при начальных значениях [5] $\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}_0$, $P_0 = 0$. Возмущения в фильтр вносились отклонением элементов матрицы Φ и дисперсии q от действительных значений:

$$\max\left(\frac{M}{H_г}\right)_{возм} = 1{,}5\,\frac{M}{H_г},\ \max(q)_{возм} = 2q.$$

На рис. 1 приведены графики ошибок оценивания текущего значения угла α: кривая *1* (сплошная линия) — ошибка оценки невозмущенного фильтра; кривая *2* (штриховая) — возмущенного фильтра.

Ошибка $\delta\hat{\alpha}_i$ возмущенного фильтра оценивалась с использованием алгоритма (7).

Начальные условия задачи возмущенной фильтрации были приняты нулевыми. Графики изменения ошибки оценки $\delta\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i - \alpha_i^0$ и ее оценки $\delta\hat{\hat{\alpha}}_i$ приведены на рис. 2: сплошная линия *1* соответствует $\delta\hat{\alpha}_i$, а штриховая *2* — ее оценке $\delta\hat{\hat{\alpha}}_i$. Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о возможности практического использования предложенного подхода.

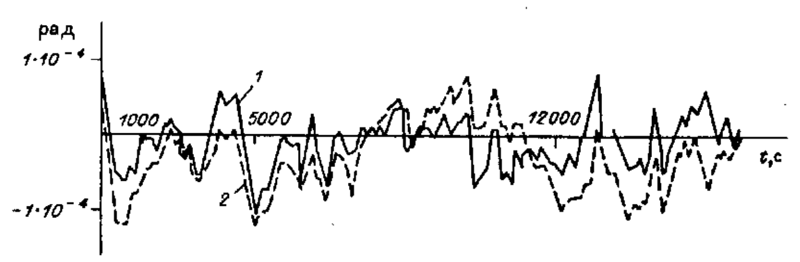

Рис. 1

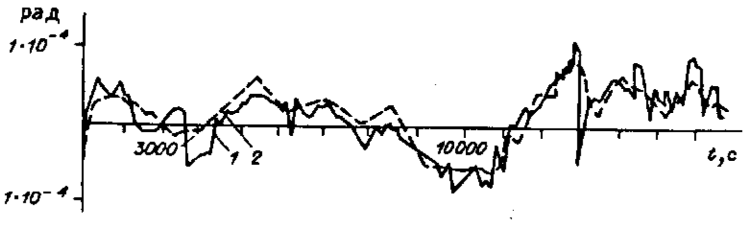

Рис. 2

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Если $\mathbf{U} = |u_1 \dots u_P|^T$, то по определению [3]

$$\frac{DF}{D\mathbf{U}} = \left| \frac{\partial F}{\partial u_1} \vdots \frac{\partial F}{\partial u_2} \vdots \dots \vdots \frac{\partial F}{\partial u_P} \right|, \qquad (\text{П}1)$$

откуда

$$\delta \mathbf{F}^{(v)} = \left| \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)^{(v)} \vdots \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^{(v)} \vdots \dots \vdots \left(\frac{\partial F}{\partial u_P}\right)^{(v)} \right| \delta \mathbf{U}. \qquad (\text{П}2)$$

Пусть $F = AQB$, тогда [1, 3]

$$\frac{DF}{DQ^{(v)}} = A \frac{DQ}{DQ^{(v)}} \hat{\otimes} B, \qquad (\text{П}3)$$

где из (П1) имеем

$$\frac{DQ}{DQ^{(v)}} = \Big| E_{n(1)} \otimes E_m^{(1)} \vdots E_{n(2)} \otimes$$

$$\otimes E_m^{(1)} \vdots \dots \vdots E_{n(n)} \otimes E_m^{(1)} \vdots E_{n(1)} \otimes E_m^{(2)} \vdots \dots \vdots E_{n(n)} \otimes E_m^{(m)} \Big|, \qquad (\text{П}4)$$

где $E_k^{(j)}$ — j-я строка единичной матрицы E_k размерностью $k \times k$; $E_{k(j)}$ — j-й столбец.

Обозначая i-й блок матрицы (П4) как Q_i, для i-го блока матрицы (П3) F_i получаем выражение $F_i = AQ_iB$, а формируя, согласно (П2), вектор $\mathbf{F}_i^{(v)}$, — соответственно

$$\mathbf{F}_i^{(v)} = (\mathbf{AQ}_i\mathbf{B})^{(v)} = (\mathbf{AEQ}_i\mathbf{B})^{(v)} = (B^T Q_i^T \otimes A)\mathbf{E}^{(v)}, \qquad (\text{П}5)$$

где размерность единичной матрицы E соответствует размерности матрицы A и используется свойство кронекеровского произведения из [3].

Учитывая, что $(E_{n(i)} \otimes E_m^{(j)})^T = E_n^{(i)} \otimes E_{m(j)}$, и определяя матрицу E_{V1} как

$$E_{V1} = \Big| E_n^{(1)} \otimes E_{m(1)} \vdots E_n^{(2)} \otimes E_{m(1)} \vdots \dots \vdots E_n^{(n)} \otimes E_{m(m)} \Big|,$$

имеем

$$\delta \mathbf{F}^{(v)} = [(B^T E_{V1} \otimes A) \hat{\otimes} \mathbf{E}^{(v)}] \delta \mathbf{Q}^{(v)}.$$

Аналогично, если $F = AQ^T B$, а из (П1) по определению

$$\frac{DQ^T}{DQ^{(v)}} = \left|(E_{n(1)} \otimes E_m^{(1)})^T \vdots (E_{n(2)} \otimes\right.$$

$$\left.\otimes E_m^{(1)})^T \vdots \ldots \vdots (E_{n(n)} \otimes E_m^{(1)})^T \vdots \ldots \vdots (E_{n(n)} \otimes E_m^{(m)})^T\right|,$$

то, определяя матрицу E_{V2} как

$$E_{V2} = \left|E_{n(1)} \otimes E_m^{(1)} \vdots E_{n(2)} \otimes E_m^{(1)} \vdots \ldots \vdots E_{n(n)} \otimes E_m^{(1)} \vdots \ldots \vdots E_{n(n)} \otimes E_m^{(m)}\right|,$$

с учетом (П5) имеем

$$\delta F^{(v)} = [(B^T E_{V2} \otimes A) \hat{\otimes} E^{(v)}]\delta Q^{(v)}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

1. Определение матрицы B_0.
Так как

$$\frac{DP_{i+1}}{DP_i^{(v)}} = (E - K_{i+1}H_{i+1})\frac{DP_{i+1/i}}{DP_i^{(v)}} - \frac{DK_{i+1}}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} H_{i+1}P_{i+1/i},$$

где

$$\frac{DP_{i+1/i}}{DP_i^{(v)}} = \Phi_{i+1/i}\frac{DP_i}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} \Phi_{i+1/i}^T,$$

$$\frac{DK_{i+1}}{DP_i^{(v)}} = \frac{DP_{i+1/i}}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} H_{i+1}^T S^{-1} - K_{i+1}\frac{DS}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} S^{-1} = \Phi_{i+1/i}\frac{DP_i}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes}$$

$$\hat{\otimes} \Phi_{i+1/i}^T H_{i+1}^T S^{-1} - K_{i+1}H_{i+1}\Phi_{i+1/i}\frac{DP_i}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} \Phi_{i+1/i}^T H_{i+1}^T S^{-1},$$

то

$$\frac{DP_{i+1}}{DP_i^{(v)}} = (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}\frac{DP_i}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} \Phi_{i+1/i}^T - \Phi_{i+1/i}\frac{DP_i}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} \Phi_{i+1/i}^T \times$$

$$\times H_{i+1}^T K_{i+1}^T + K_{i+1}H_{i+1}\Phi_{i+1/i}\frac{DP_i}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} \Phi_{i+1/i}^T H_{i+1}^T K_{i+1}^T =$$

$$= (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}\frac{DP_i}{DP_i^{(v)}} \hat{\otimes} \Phi_{i+1/i}^T(E - H_{i+1}^T K_{i+1}^T).$$

Сравнивая полученное выражение с (П3) и пользуясь результатом леммы 1, имеем

$$B_0 = [(E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}E_{V1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}] \hat{\otimes} E^{(v)}.$$

2. Определение матрицы B_1.
Так как

$$\frac{DP_{i+1}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} = (E - K_{i+1}H_{i+1})\frac{DP_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} - \frac{DK_{i+1}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} \overset{\wedge}{\otimes} H_{i+1}P_{i+1/i},$$

где

$$\frac{DP_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} = \frac{D\Phi_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} \overset{\wedge}{\otimes} P_i\Phi^T_{i+1/i} + \Phi_{i+1/i}\, P_i \frac{D\Phi^T_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}},$$

$$\frac{DK_{i+1}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} = \frac{DP_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} \overset{\wedge}{\otimes} H^T_{i+1}S^{-1} - K_{i+1}\frac{DS}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} \overset{\wedge}{\otimes} S^{-1},$$

$$\frac{DS}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1}} = H_{i+1}\frac{DP_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} \overset{\wedge}{\otimes} H^T_{i+1},$$

то

$$\frac{DP_{i+1}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} = (E - K_{i+1}H_{i+1})\frac{D\Phi_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} \overset{\wedge}{\otimes} P_i\Phi^T_{i+1/i}\,(E - H^T_{i+1}K^T_{i+1}) +$$

$$+ (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}\, P_i \frac{D\Phi^T_{i+1/i}}{D\Phi^{(\nu)}_{i+1/i}} \overset{\wedge}{\otimes} (E - H^T_{i+1}K^T_{i+1}).$$

Поступая аналогично предыдущему пункту, имеем

$$B_1 = [(E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}\, P_i E_{V1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})\,] \overset{\wedge}{\otimes} \mathbf{E}^{(\nu)} +$$

$$+ [(E - K_{i+1}H_{i+1})E_{V2} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})\Phi_{i+1/i}\, P_i\,] \overset{\wedge}{\otimes} \mathbf{E}^{(\nu)}.$$

3. Определение матрицы B_2.

Так как

$$\frac{DP_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} = -\frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} \overset{\wedge}{\otimes} H_{i+1}P_{i+1/i} - K_{i+1}\frac{DH_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} \overset{\wedge}{\otimes} P_{i+1/i},$$

где

$$\frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} = P_{i+1}\frac{DH^T_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} \overset{\wedge}{\otimes} S^{-1} - K_{i+1}\frac{DH_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} \overset{\wedge}{\otimes} K_{i+1},$$

то

$$\frac{DP_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} = -P_{i+1}\frac{DH^T_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} \overset{\wedge}{\otimes} K^T_{i+1} - K_{i+1}\frac{DH_{i+1}}{D\mathbf{H}^{(\nu)}_{i+1}} \overset{\wedge}{\otimes} P_{i+1}.$$

Следовательно,

$$B_2 = -(K_{i+1}E_{V2} \otimes P_{i+1}) \overset{\wedge}{\otimes} \mathbf{E}^{(\nu)} - (P_{i+1}E_{V1} \otimes K_{i+1}) \overset{\wedge}{\otimes} \mathbf{E}^{(\nu)}.$$

4. Определение матрицы B_3.

Так как

$$\frac{DP_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} = (E - K_{i+1}H_{i+1})\frac{DP_{i+1/i}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} - \frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} H_{i+1}P_{i+1/i},$$

где

$$\frac{DP_{i+1/i}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} = \frac{DG_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}},$$

$$\frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} = \frac{DP_{i+1/i}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} H_{i+1}^{T}S^{-1} - K_{i+1}\frac{DS}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} S^{-1},$$

$$\frac{DS}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} = H_{i+1}\frac{DG_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} H_{i+1}^{T},$$

то

$$\frac{DP_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} = (E - K_{i+1}H_{i+1})\frac{DG_{i+1}}{D\mathbf{G}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} (E - H_{i+1}^{T}K_{i+1}^{T}),$$

и, следовательно,

$$B_3 = [(E - K_{i+1}H_{i+1})E_{V1} \otimes (E - K_{i+1}H_{i+1})] \overset{\wedge}{\otimes} \mathbf{E}^{(v)}.$$

5. Определение матрицы B_4.

Так как

$$\frac{DP_{i+1}}{D\mathbf{R}_{i+1}^{(v)}} = -\frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{R}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} H_{i+1}P_{i+1/i},$$

где

$$\frac{DK_{i+1}}{D\mathbf{R}_{i+1}^{(v)}} = -K_{i+1}\frac{DR_{i+1}}{D\mathbf{R}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} S^{-1},$$

то

$$\frac{DP_{i+1}}{D\mathbf{R}_{i+1}^{(v)}} = K_{i+1}\frac{DR_{i+1}}{D\mathbf{R}_{i+1}^{(v)}} \overset{\wedge}{\otimes} K_{i+1}^{T},$$

а значит,

$$B_4 = (K_{i+1}E_{V1} \otimes K_{i+1}) \overset{\wedge}{\otimes} \mathbf{E}^{(v)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. А., Ястребов В. Д. Возмущения процесса калмановской фильтрации // Космич. исслед.—1984.—22, № 4.
2. Новосельцева Ж. А. Априорная информация в задачах оптимальной фильтрации // АиТ.—1968.—№ 6.
3. Чернов А. А., Ястребов В. Д. Метод оценки возмущений в алгоритмах решения навигационных задач // Космич. исслед.—1984.—22, № 3.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.—М.: Наука, 1974.

5. Ройтенберг Я. Н. Гироскопы.—М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 28 декабря 1990 г.