УДК 681.3.142

А. Л. Резник

(Новосибирск)

ПРОГРАММЫ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается задача локализации нескольких импульсных точечных объектов. Приводятся и обосновываются расчеты, проведенные с помощью ЭВМ, лежащие в основе построения оптимальных по быстродействию алгоритмов поиска и локализации.

Основная задача, которая будет рассмотрена ниже, может быть сформулирована следующим образом. На отрезке $[0, L]$ находится n точечных объектов. Об их местоположении не имеется никаких априорных сведений, так что можно считать, что n точек равномерно распределены на отрезке $[0, L]$. Каждый объект в случайные моменты времени производит мгновенные импульсы (типа дельта-функций), паузы между которыми имеют показательное распределение с параметром λ. Как и в [1], импульс фиксируется, если активный объект, инициировавший «вспышку», находится в «окне обзора» регистрирующего устройства. В дальнейшем окно сужается, в результате чего при регистрации очередной «вспышки» положение источника уточняется. Требуется за минимальное время отыскать все источники с точностью ε.

Вообще говоря, построение оптимальной стратегии многоцелевого поиска можно свести к многоэтапной процедуре, а именно: на первом этапе определяется местоположение одного из n источников, после этого ищется один из $(n - 1)$ оставшихся и т. д. Здесь возможны два различных подхода: либо на каждом последующем этапе используется информация, накопленная на всех предыдущих, либо такого накопления информации не происходит. Использование предыдущей информации приводит к чрезмерному усложнению алгоритмов поиска и самой сканирующей системы, поскольку в этом случае она должна обладать дополнительной памятью для хранения промежуточных данных. Рассматриваемые ниже алгоритмы построены в предположении о том, что регистрирующая аппаратура не имеет памяти, так что поставленная выше задача сводится к нахождению оптимальной по быстродействию стратегии поиска одного из n точечных объектов с заранее заданной точностью ε.

Процедуру поиска на каждом из n этапов, в свою очередь, тоже можно рассматривать как многошаговый процесс. Так как первоначально не имеется никаких априорных сведений о расположении n источников внутри отрезка $[0, L]$, то на первом шаге поисковое усилие должно быть равномерно распределено между всеми точками $x \in [0, L]$. Реализовать такое усилие можно, например, сканированием всего отрезка некоторой щелью шириной l_1. Затем (при регистрации импульса) поиск продолжается внутри выделенного окна шириной l_1 некоторой другой щелью, имеющей ширину l_2, и т. д. На последнем этапе (а их количество зависит от n, ε и L) поиск ведется щелью шириной ε. Задача теперь заключается в том, чтобы для заданных значений n, ε и L определить оптимальное число этапов сканирования $k(n, \varepsilon, L)$, а также ширину сканирующего окна на каждом из них. После нахождения одного из объектов значение n уменьшается на единицу и поиск повторяется для $n = n - 1$ и т. д.

Введем в рассмотрение функцию $g(x)$ — плотность распределения центра щели в момент регистрации первого импульса-вспышки. Если предположить, что n источников расположены в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а сканирование проводится щелью шириной l, то для $g(x)$ справедливо соотношение

$$g(x) = \frac{1}{nl} \sum_{i=1}^{n} 1\,[x - (x_i - 0{,}5l)]\,1\,[(x_i + 0{,}5l) - x], \tag{1}$$

где $1[x]$ — функция единичного скачка:

$$1[x] = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем нам потребуется знание распределения числа обьектов в щели в момент регистрации импульса. Для этого нужно вычислить $P_n(k, l)$ — вероятность того, что в щели в момент вспышки окажется ровно k (k — 1, 2, ..., n) источников, включая обьект, давший вспышку.

Поскольку при реализации равномерного поискового усилия с помощью щелевого сканирования отрезка $[0, L]$ возникают нежелательные краевые эффекты, то для того, чтобы последующее изложение сделать более строгим, будем считать отрезок свернутым в окружность длиной L. При этом без ограничения общности можно считать, что $L = 1$, а $0 < l \leq 1$. Пусть обьекты расположены в точках $x_1, x_2, ..., x_n$. Считая точку x_1 началом отсчета, упорядочим все остальные источники, двигаясь от точки $x_1 = 0$ по часовой стрелке. Вероятность $P_n(k, l)$ складывается из вероятностей того, что в момент вспышки в щель попадают точки $x_1, ..., x_k$, $x_2, ..., x_{k+1}$ либо $x_3, ..., x_{k+2}$ и т. д. Таких комбинаций всего n. Если предположить, что при регистрации импульса в щели находится ровно k обьектов, то, учитывая (1),

$$P_n(k, l) = \frac{(n-1)! \times k \times 2}{l} \times$$

$$\times \int\limits_D \ldots \int \min\{l - x_k;\, x_{k+1} - x_k;\, x_{k+1} - l + 1 - x_n\} dx_2 \ldots dx_n, \tag{2}$$

где область D задается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < 1, \\ x_{k+1} - x_k \leq 1 - x_n, \\ x_{k+1} + (1 - x_n) > l, \\ x_k < l. \end{cases} \tag{3}$$

Удвоение коэффициента в соотношении (2) происходит из-за того, что в систему ограничений (3) включено неравенство $x_{k+1} - x_k < 1 - x_n$, геометрический смысл которого заключается в том, что один из интервалов, на которые n случайно брошенных точек разбивают единичную окружность, больше другого. Так как вероятность такого события равна 1/2, то в выражении для $P_n(k, l)$ появляется сомножитель 2 (заметим, что в случае $k = n$ неравенство $x_{k+1} - x_k < 1 - x_n$ превращается в тождественное, поэтому оно просто исключается из системы (3), а из соотношения (2) удаляется удваивающий множитель).

Интеграл (2) по области (3) может быть представлен как сумма трех интегралов, соответствующих по форме выражениям, аналитическое вычисление которых на ЭВМ было изложено в [2]:

$$P_n(k, l) = \frac{2k(n-1)!}{l} \Bigg\{ \int\limits_{D_1} \ldots \int (l - x_k) dx_2 \ldots dx_n +$$

$$+ \int\limits_{D_2} \ldots \int (x_{k+1} - x_k) dx_2 \ldots dx_n + \int\limits_{D_3} \ldots \int (x_{k+1} - l + 1 - x_n) dx_2 \ldots dx_n \Bigg\}. \tag{4}$$

Здесь областям D_1, D_2, D_3 соответствуют следующие системы линейных неравенств с одним свободным параметром l:

$$D_1 = \begin{cases} x_1 = 0 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < 1 = x_{n+1}, \\ x_{k+1} - x_k < 1 - x_n, \\ x_{k+1} + (1 - x_n) > l, \\ x_k < l, \\ x_{k+1} - l > 0, \\ x_k + x_{k+1} - x_n + 1 - 2l > 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$D_2 = \begin{cases} x_1 = 0 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < 1 = x_{n+1}, \\ x_{k+1} - x_k < 1 - x_n, \\ x_{k+1} + (1 - x_n) > l, \\ x_k < l, \\ l - x_{k+1} > 0, \\ x_k - x_n + 1 - l > 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$D_3 = \begin{cases} x_1 = 0 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < 1 = x_{n+1}, \\ x_{k+1} - x_k < 1 - x_n, \\ x_{k+1} + (1 - x_n) > l, \\ x_k < l, \\ -x_k - x_{k+1} + x_n - 1 + 2l > 0, \\ -x_k + x_n - 1 + l > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Проведенные на ЭВМ расчеты (при фиксированных значениях n и k) показали, что в общем случае

$$P_n(k, l) = \binom{n-1}{k-1} l^{k-1} (1 - l)^{n-k}. \tag{8}$$

Фактически это означает, что мы имеем дело со смещенной схемой Бернулли: проводится $(n - 1)$ независимых испытаний с вероятностью «успеха» $p = l$ и вероятностью «неуспеха» $q = 1 - l$, а формула (8) соответствует вероятности того, что будет зарегистрировано ровно $k - 1$ «успехов». Теперь, когда программно рассчитанное выражение для вероятности $P_n(k, l)$ известно, можно построить и содержательное доказательство правильности проведенных на ЭВМ вычислений.

Так как сканирование единичной окружности щелью-дугой, имеющей длину l, создаст равномерное поисковое усилие по всей окружности, то вероятность того, что инициатором импульса будет фиксированный источник x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, одинакова для всех объектов и равна $1/n$. Поэтому по формуле полной вероятности

$$P_n(k, l) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_n(k, l/A_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_n(k, l/A_i) = P_n(k, l/A_1), \tag{9}$$

где событие A_i означает, что инициатором зарегистрированного импульса был объект x_i. Условную вероятность $P_n(k, l/A_1)$ можно интерпретировать следующим образом: «заблокированы» все источники, кроме первого, а в момент регистрации импульса подсчитывается число объектов в щели, включая и первый. Так как остальные $(n - 1)$ источников имеют равномерное распределение на окружности, то вероятность попадания любого из них в щель есть l, а вероятность того, что в щели окажется в точности $(k - 1)$ объектов, исключая первый, как раз и описывается соотношением (8).

Исходя из (8), можно показать, что если последовательно сканировать единичную окружность сначала апертурой l_1, а затем свернутую в окружность дугу l_1 сканировать другой щелью l_2 ($l_2 < l_1$), то вероятность того, что в момент регистрации второго импульса в щели будет ровно k объектов, совпадает с вероятностью попадания в щель в точности k объектов при однократном сканировании единичной окружности щелью l_2. В самом деле, вероятность попадания в щель l_2 ровно k объектов при двукратном сканировании есть

$$\sum_{i=k}^{n} P_n(i, l_1)\, P_i\left(k, \frac{l_2}{l_1}\right) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n-1}{i-1} l_1^{i-1}(1-l_1)^{n-i} \binom{i-1}{k-1} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{k-1} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)^{i-k} = \binom{n-1}{k-1} l_2^{k-1} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{n-i} (l_1 - l_2)^{i-k}(1-l_1)^{n-i} =$$

$$= \binom{n-1}{k-1} l_2^{k-1} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (l_1 - l_2)^{i}(1-l_1)^{n-k-i} =$$

$$= \binom{n-1}{k-1} l_2^{k-1}(1 - l_2)^{n-k}, \tag{10}$$

т. е. не зависит от того, какой апертурой проводилось первое сканирование. Используя соотношения (8) и (10), найдем среднее время локализации одного из n объектов с заданной точностью ε, предполагая, что поиск осуществляется в m этапов последовательно сужающимися щелями $l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}, \varepsilon$. Для этого вычислим сначала среднее время поиска на i-м этапе:

$$\langle \tau_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} l_{i-1}^{k-1}(1 - l_{i-1})^{n-k} l_{i-1}/(l_i k\lambda) =$$

$$= (l_{i-1}/(\lambda l_i)) \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} l_{i-1}^{k}(1 - l_{i-1})^{n-k}/(n l_{i-1}) =$$

$$= (1/(n\lambda l_i))(1 - (1 - l_{i-1})^n). \tag{11}$$

Среднее время поиска одного из n источников есть сумма средних времен поиска на каждом из этапов, поэтому

$$\langle \tau \rangle = (1/(n\lambda)) \sum_{i=1}^{m} (1 - (1 - l_{i-1})^n)/l_i, \tag{12}$$

причем $l_0 = 1$, $l_m = \varepsilon$.

Задача оптимального поиска свелась теперь к нахождению величин $m, l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$, минимизирующих выражение (12). При фиксированном m оптимальные значения $l_1, \ldots, l_{m-1}$ могут быть найдены из системы уравнений

$$l_{i+1} = \frac{n l_i^2 (1 - l_i)^{n-1}}{1 - (1 - l_{i-1})^n} \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{13}$$

которая получена приравниванием нулю всех частных производных $\frac{\partial \langle \tau \rangle}{\partial l_i}$ ($i = 1, \ldots, m-1$) выражения (12).

Система уравнений (13) решалась на ЭВМ при фиксированных значениях n. Оптимальные значения m (т. е. число этапов сканирования) и соот-

Параметры оптимального по быстродействию поиска

ε/L	m, l, T	n					
		2	3	5	10	30	50
10^{-1}	m	2	2	1	1	1	1
	l_1/L	0,26	0,24	0,1	0,1	0,1	0,1
	l_2/L	0,1	0,1	—	—	—	—
	$\lambda\langle\tau\rangle$	4,19	3,26	2,0	1,0	0,33	0,2
10^{-2}	m	4	4	3	3	1	1
	l_1/L	0,23	0,19	0,09	0,07	0,01	0,01
	l_2/L	0,08	0,07	0,03	0,03	—	—
	l_3/L	0,03	0,03	0,01	0,01	—	—
	l_4/L	0,01	0,01	—	—	—	—
	$\lambda\langle\tau\rangle$	10,22	9,02	7,55	5,73	3,33	2,0
10^{-3}	m	6	6	6	5	4	3
	l_1/L	0,21	0,16	0,12	0,06	0,02	0,01
	l_2/L	0,07	0,06	0,043	0,02	0,007	0,003
	l_3/L	0,024	0,02	0,016	0,007	0,003	0,001
	l_4/L	0,008	0,007	0,006	0,003	0,001	—
	l_5/L	0,003	0,003	0,003	0,001	—	—
	l_6/L	0,001	0,001	0,001	—	—	—
	$\lambda\langle\tau\rangle$	16,48	15,22	13,76	11,76	8,77	7,42
10^{-4}	m	9	8	8	7	6	6
	l_1/L	0,24	0,15	0,11	0,05	0,018	0,013
	l_2/L	0,09	0,05	0,04	0,017	0,006	0,005
	l_3/L	0,03	0,02	0,014	0,006	0,002	0,0017
	l_4/L	0,01	0,006	0,005	0,002	0,0008	0,0007
	l_5/L	0,005	0,002	0,002	0,0008	0,0003	0,0003
	l_6/L	0,002	0,0008	0,0007	0,0003	0,0001	0,0001
	l_7/L	0,0007	0,0003	0,0003	0,0001	—	—
	l_8/L	0,0003	0,0001	0,0001	—	—	—
	l_9/L	0,0001	—	—	—	—	—
	$\lambda\langle\tau\rangle$	22,74	21,48	19,97	18,0	14,96	13,6

П р и м е ч а н и е . Символ n — число импульсных объектов (источников); L — длина отрезка, на котором сосредоточены n источников; ε — требуемая точность локализации; λ — параметр, характеризующий интенсивность генерации случайного пуассоновского потока импульсов каждым из источников. Результаты программного расчета: m — количество этапов сканирования для локализации первого из n объектов; l_i — размер сканирующей апертуры на i-м этапе ($i = 1, \ldots, m$); $\langle\tau\rangle$ — среднее время локализации первого из n объектов.

ветствующие им значения $l_1, l_2, ..., l_{m-1}$, при которых среднее время локализации (12) достигает минимума, были рассчитаны на ЭВМ для различных значений n и ε/L и сведены в таблицу, из которой видно, что при высоких требованиях к точности локализации (когда $\varepsilon/L << 1$) среднее время поиска одного из n объектов пропорционально $\ln(L/\varepsilon)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов В. М., Нестеров А. А., Резник А. Л. Алгоритмы оптимального по быстродействию поиска точечных световых объектов // Автометрия.—1980.—№ 3.
2. Ефимов В. М., Резник А. Л. Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n-мерном пространстве // Автометрия.—1976.—№ 1.

Поступила в редакцию 26 июня 1991 г.