УДК 681.3.06

В. М. Ефимов, Ю. Н. Золотухин, А. Л. Резник

(Новосибирск)

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНАЯ ДЕКОРРЕЛЯЦИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАВНООТСТОЯЩИХ ОТСЧЕТОВ СИГНАЛА

Предложен и обоснован метод отыскания оптимального линейного декоррелирующего преобразования последовательности равноотстоящих отсчетов сигнала. Приведены полученные с помощью аналитических расчетов на ЭВМ примеры конкретных оптимальных преобразований для сигналов различной степени гладкости — от недифференцируемых (в среднеквадратичном) до абсолютно гладких.

Рассматриваемая задача имеет непосредственное отношение к определению скорости создания сообщений [1], где был, в сущности, сформулирован один из принципов сжатия сигналов путем предварительной декорреляции и последующего экономного кодирования при фиксированной точности воспроизведения. Технически такой подход получил развитие и успешно реализуется за рубежом [2]. При этом основное внимание уделяется дискретному косинусному преобразованию (ДКП), поскольку такая предварительная операция наиболее близка к преобразованию Карунена — Лоэва для марковских сигналов. Ниже будет показано, что эта близость является асимптотической при высокой степени корреляции сигнала, а также описывается методика, с помощью которой получен ряд наборов асимптотически оптимальных собственных векторов сигнала (при тех же условиях).

Декорреляция случайной стационарной последовательности равноотстоящих отсчетов сигнала $\{x_k\}$, где $x_k = x(k\Delta)$, $k = \overline{0,\ 2N-1}$, сводится к нахождению собственных векторов и собственных чисел этой последовательности из соотношений

$$A\varphi_k - \lambda\varphi_k = 0 \quad (k = \overline{0, 2N-1}\,). \tag{1}$$

Эта система уравнений вытекает из условия минимума дисперсии собственного вектора $\langle \varphi_k^2 \rangle$. Элементы матрицы A есть не что иное, как соответствующие значения корреляционной функции: $a_{ij} = R((i-j)\Delta)$.

В принципе можно найти аналитическое решение (1) при любом N путем представления определителя системы (1) и соответствующих миноров через суммы произведений значений корреляционной функции. Однако такое решение не дает конструктивных результатов, поскольку не конкретизирован вид корреляционной функции.

Нами рассматривается случай, когда отсчеты сигнала коррелированы очень сильно. Это позволило, используя степенное разложение корреляционной функции в окрестности нуля

$$R(\tau) = \sigma^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |\tau|^k\right), \tag{2}$$

продвинуться достаточно далеко в решении (1) и получить асимптотические значения собственных векторов для различных типов сигнала. Предварительно для понижения порядка системы (1) последовательность отсчетов преобразуется в две некоррелированные последовательности:

$$x_k^+ = (x_k + x_{2N-1-k})/\sqrt{2} \quad (k = \overline{0,\ N-1}),$$
$$\qquad (3)$$
$$x_k^- = (x_k - x_{2N-1-k})/\sqrt{2} \quad (k = \overline{0,\ N-1}).$$

Первая последовательность определяет «четные» собственные векторы, вторая — «нечетные». В соответствии с (3) вычисляются элементы корреляционных матриц для четных и нечетных собственных векторов, составляющие которых определяются очевидными соотношениями

$$\varphi_{ki} = \lim_{\tau\to 0} \Delta_{0i}(\lambda_k)/\sqrt{2\sum_{i=0}^{N-1}\Delta_{0i}^2(\lambda_k)} \quad \text{при } k = 0, 2, ..., 2N-2 \qquad (4а)$$

и

$$\varphi_{ki} = \lim_{\tau\to 0} \Delta_{1i}(\lambda_k)/\sqrt{2\sum_{i=0}^{N-1}\Delta_{1i}(\lambda_k)} \quad \text{при } k = 1, 3, ..., 2N-1. \qquad (4б)$$

В (4) величины λ_k являются собственными числами (дисперсиями трансформант) и определяются как корни соответствующего «векового» уравнения.

Корреляционная функция квантованной по уровню с шагом q последовательности отсчетов сигнала обязательно содержит в (2) слагаемое с $\alpha_1 \neq 0$ или даже слагаемое, пропорциональное $|\tau|^{1/2}$ [3]. Это слагаемое, строго говоря, будет определять поведение собственных векторов последовательности при $\tau \to 0$, в частности, тогда, когда средний квадрат ошибки квантования по уровню превосходит дисперсию приращения последовательности $2(R(0) - R(\tau))$. Однако если $q^2/12 \leq 2(R(0) - R(\tau))$, то шум квантования можно считать белым шумом, который индифферентен к виду ортогонального разложения [3] и, следовательно, не влияет на искомое решение. Асимптотическое поведение собственных векторов зависит от достаточно общих свойств разложения (2). При этом сигналы подразделяются на классы по следующим признакам:

1. $\alpha_1 \neq 0$ — сигнал не имеет первой среднеквадратичной производной;
2. $\alpha_1 = 0$; $\alpha_3 \neq 0$ — сигнал однократно дифференцируем в среднеквадратичном, т. е. более «гладок»;
3. $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$; $\alpha_5 \neq 0$ — сигнал имеет вторую среднеквадратичную производную, т. е. еще более «гладок», и т. п.

Для ускорения трудоемких и рутинных вычислений, связанных с нахождением входящих в (4) определителей и собственных чисел, когда корреляционная функция имеет вид (2), была составлена программа для проведения аналитических выкладок на ЭВМ. Приведем в качестве примера результаты ее работы для случая, когда $2N = 8$ и $\alpha_1 \neq 0$. В табл. 1 приведены выражения для входящих в (4) определителей (члены, не влияющие на поведение φ_{ki} при $\tau \to 0$, опущены). «Вековые» уравнения для четных и нечетных собственных векторов, полученные на компьютере, имеют следующий вид (слагаемые более высокого порядка малости относительно τ опущены):

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 - 40\lambda^2(\alpha_1\tau) - 48\lambda(\alpha_1\tau)^2 - 16(\alpha_1\tau)^3 = 0,$$
$$\text{если } k = 0, 2, ..., 2N-2;$$

Таблица 1

Пример аналитического расчета на ЭВМ определителей, необходимых для нахождения собственных векторов асимптотически оптимального декоррелирующего преобразования. Случай недифференцируемого процесса ($\alpha 1 \neq 0$). Количество отсчетов 2N = 8

	$+16\lambda(\alpha_1\tau)$ $+8(\alpha_1\tau)^2$	$-8(\alpha_1\tau)^2$		
$\Delta_{1i}(\lambda)$	$-\lambda^3$ $-9\lambda^2(\alpha_1\tau)$ $-12\lambda(\alpha_1\tau)^2$ $-4(\alpha_1\tau)^3$	$+5\lambda^2(\alpha_1\tau)$ $+10(\alpha_1\tau)^2$ $+4(\alpha_1\tau)^3$	$+3\lambda^2(\alpha_1\tau)$ $+2\lambda(\alpha_1\tau)^2$	$\lambda^2(\alpha_1\tau)$

$$\lambda^4 + 16\lambda^3(\alpha_1\tau) + 40\lambda^2(\alpha_1\tau)^2 + 32\lambda(\alpha_1\tau)^3 + 8(\alpha_1\tau)^4 = 0,$$

$$\text{если } k = 1, 3, \ldots, 2N - 1.$$

Этим уравнениям удовлетворяют следующие значения корней:

$$\lambda_0 = 8,\ \lambda_2 = -(2+\sqrt{2})(\alpha_1\tau),\ \lambda_4 = -(\alpha_1\tau),\ \lambda_6 = -(2-\sqrt{2})(\alpha_1\tau),$$

$$\lambda_1 = 2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,/(3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}),$$

$$\lambda_3 = 2\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\,/(3\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}),$$

$$\lambda_5 = 2\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\,/(3\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}),$$

$$\lambda_7 = 2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,/(3\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что в этом случае асимптотически оптимальным является дискретное косинусное преобразование.

Табл. 2 содержит в качестве примера рассчитанные на ЭВМ при $2N = 8$ компоненты собственных векторов для сигнала, дифференцируемого пять и более раз. Для числа отсчетов последовательности, равного 8, таким сигналом исчерпываются все уровни «гладкости». Приведенный набор собственных векторов является полиномиальным, что позволяет проводить оптимальное декоррелирующее преобразование последовательности отсчетов таких сигналов с использованием только целочисленной арифметики. Следует отметить, что только набор собственных векторов, соответствующий однократно дифференцируемому процессу, является ортонормированным и абсолютно некоррелированным в асимптотике. Для дважды и более раз дифференцируемого в среднеквадратичном сигнала полученные наборы асимптотически частично коррелированы, так как в выражениях для коэффициентов опущены члены, зависящие от интервала дискретизации Δ и констант в разложении корреляционной функции (2).

Таблица 2

Наборы собственных векторов для сигналов различной степени «гладкости»

Степень «гладкости» сигнала	K	i			
		0	1	2	3
	0	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$
$\alpha_7 = 0$,	.	—	—	—	—
$\alpha_9 = 0$)	5	$-7/\sqrt{2184}$	$23/\sqrt{2184}$	$-17/\sqrt{2184}$	$-15/\sqrt{2184}$
	6	$1/\sqrt{264}$	$-5/\sqrt{264}$	$9/\sqrt{264}$	$-5/\sqrt{264}$
	7	$-1/\sqrt{3432}$	$7/\sqrt{3432}$	$-21/\sqrt{3432}$	$35/\sqrt{3432}$

Степень «гладкости» сигнала	K	i			
		4	5	6	7
Пятикратно диффе- ренцируемый сигнал ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_7 = 0$, $\alpha_9 = 0$)	0	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$
	1	$1/\sqrt{168}$	$3/\sqrt{168}$	$5/\sqrt{168}$	$7/\sqrt{168}$
	2	$-5/\sqrt{168}$	$-3/\sqrt{168}$	$1/\sqrt{168}$	$7/\sqrt{168}$
	3	$-3/\sqrt{264}$	$-7/\sqrt{264}$	$-5/\sqrt{264}$	$7/\sqrt{264}$
	4	$9/\sqrt{616}$	$-3/\sqrt{616}$	$-13/\sqrt{616}$	$7/\sqrt{616}$
	5	$15/\sqrt{2184}$	$17/\sqrt{2184}$	$-23/\sqrt{2184}$	$7/\sqrt{2184}$
	6	$-5/\sqrt{264}$	$9/\sqrt{264}$	$-5/\sqrt{264}$	$1/\sqrt{264}$
	7	$-35/\sqrt{3432}$	$21/\sqrt{3432}$	$-7/\sqrt{3432}$	$1/\sqrt{3432}$

Например, для набора, представленного в табл. 2, асимптотическая остаточная корреляция такая же, как и для соответствующих наборов производных сигнала.

В заключение заметим, что предварительный анализ соответствующих характеристик корреляционной функции позволяет выбрать наиболее подходящий набор собственных векторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров А. Н.** Теория передачи информации // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства (15—20 октября 1956 г.): Пленарные заседания АН СССР.—М., 1957.
2. **Андерсен Дж., Фралик С. К., Хамилтон Э. и др.** Кодек для передачи цветной видеоинформации по цифровым телефонным линиям // Электроника.—1984.—№ 2.
3. **Ефимов В. М.** Квантование по времени при измерении и контроле.—М.: Энергия, 1969.

Поступило в редакцию 15 апреля 1991 г.