УДК 621.391.172

В. П. СИЗОВ

(Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ОБОБЩЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ

Метод наименьших квадратов широко используется при статистической обработке экспериментальных данных [1, 2] для оценивания параметров наблюдаемого объекта по совокупности приближенных измерений. Математическая формализация соответствующей процедуры привела к понятию псевдообращения [3, 4], упростившему алгоритм получения оценок в частном случае статистически эквивалентных ошибок измерений.

В настоящей работе представлено обобщение операции псевдообращения применительно к задаче оптимальной линейной фильтрации неравноточных измерений.

Равноточные измерения и псевдообращение. Пусть выходные сигналы датчиков, предназначенных для наблюдения за поведением некоторого объекта, объединены в вектор измерения z, связанный с вектором состояния x этого объекта линейной зависимостью

$$z = Hx + v, \tag{1}$$

где H — отличная от нуля матрица измерения; v — вектор случайной ошибки измерения. Ставится задача оптимального в некотором смысле оценивания вектора состояния x по измерениям (1).

Если предположить, что такая оценка $\widehat{x}$ уже известна и подана на вход измерителя (1), то в идеальном случае (при нулевой ошибке v) его выходной сигнал будет иметь значение $H\widehat{x}$, отличающееся от фактического измерения z на величину «невязки» $\tilde{z}$:

$$\tilde{z} = H\widehat{x} - z. \tag{2}$$

В методе наименьших квадратов при равноточных измерениях [1—4], когда корреляционная матрица ошибки v имеет вид $E[vv^T] = \sigma^2 I$ (E — оператор усреднения, I — единичная матрица, σ^2 — скаляр, T — операция транспонирования), невязка (2) используется в качестве аргумента функции потерь:

$$J(\tilde{z}) = \tilde{z}^T\tilde{z} = (H\widehat{x} - z)^T(H\widehat{x} - z). \tag{3}$$

Оценка $\widehat{x}$, минимизирующая данную квадратичную форму, называемую обычно критерием качества, принимается за оптимальную. Когда H — невырожденная матрица, оценка $\widehat{x} = H^{-1}z$, являющаяся решением уравнения

$$Hx = z, \tag{4}$$

оптимальна, поскольку для нее $J(\tilde{z}) = 0$.

Если H — прямоугольная матрица полного ранга с количеством строк, меньшим количества столбцов (а следовательно, и количества неизвестных, представленных компонентами вектора x), то система (4) имеет бесконечное множество решений, каждое из которых обращает в нуль критерий качества (3). В этом случае за оптимальную оценку $\widehat{x}$ принимается решение с минимальной нормой, называемое псевдорешением [3, 4].

Если в матрице H полного ранга количество строк превышает количество столбцов, то в общем случае произвольного z система (4) несовместна и оптимальная оценка $\widehat{x}$ вектора состояния x доставляет минимум критерию качества (3), не обращая его в нуль. Эту последнюю оценку также относят к псевдорешениям системы (4).

Произвольная матрица H может быть представлена своим скелетным разложением [4]:

$$H = H_1H_2, \tag{5}$$

где H_1 и H_2 — матрицы полного ранга. В первой из них количество столбцов не превышает количества строк, а во второй — количество строк не превышает количество столбцов. Подстановка (5) в (4) позволяет свести отыскание оптимальной оценки $\widehat{x}$ к последовательному псевдорешению уравнений $H_1y = z$ и $H_2x = y$ с использованием на каждом шаге критерия типа (3). Получаемая при этом оптимальная оценка имеет вид [3, 4]

$$\widehat{x} = H^+z, \tag{6}$$

где

$$H^+ = H_2\left(H_2H_2^T\right)^{-1}\left(H_1^TH_1\right)^{-1}H_1^T. \tag{7}$$

По аналогии с обратной матрицей H^{-1}, фигурирующей в точном решении уравнения (4), матрица H^+ псевдорешения (6) называется псевдообратной.

При линейной независимости столбцов матрицы H ее скелетное разложение имеет вид $H = HI$, т. е. $H_1 = H$ и $H_2 = I$, что упрощает (7) до

$$H^+ = (H^T H)^{-1} H^T, \tag{8}$$

а при линейной независимости строк матрицы H имеем скелетное разложение $H = IH$, откуда $H_1 = I$, $H_2 = H$ и, следовательно,

$$H^+ = H^T (H H^T)^{-1}. \tag{9}$$

Неравноточные измерения и обобщенное псевдообращение. При неравноточных измерениях (1) практическое применение находит «обобщенный» метод наименьших квадратов [5, 6], согласно которому оптимальная оценка $\widehat{x}$ вектора состояния x получается минимизацией критерия качества

$$J_G(\widetilde{z}) = \widetilde{z}^T G \widetilde{z} = (H\widehat{x} - z)^T G (H\widehat{x} - z) \tag{10}$$

с симметрической положительно определенной весовой матрицей

$$G = [E(vv^T)]^{-1} = V^{-1}. \tag{11}$$

В этой связи представляется целесообразным такое обобщение операции псевдообращения (7), которое бы учитывало матрицу G, позволяя трактовать оптимальную оценку $\widehat{x}$ как псевдорешение уравнения (4), минимизирующее критерий качества (10).

Для решения данной задачи продифференцируем $J_G(\widetilde{z})$ по вектору $\widehat{x}$ и приравняем результат к нулю. В результате получим

$$H^T G H \widehat{x} = H^T G z. \tag{12}$$

Вектор $\widehat{x}$, удовлетворяющий этому уравнению, минимизирует (10), поскольку, как нетрудно убедиться, любое его приращение на величину $\Delta x \neq 0$ приводит к возрастанию $J_G(\widetilde{z})$.

Используя скелетное разложение (5), представим (12) в виде

$$H_2^T H_1^T G H_1 H_2 \widehat{x} = H_2^T H_1^T G z.$$

Умножая далее обе части этого равенства на H_2 слева и замечая, что при линейной независимости столбцов в H_1 и строк в H_2 матрицы $\left(H_2 H_2^T\right)$ и $\left(H_1^T G H_1\right)$ положительно определены, приходим к соотношению

$$H_2 \widehat{x} = y, \tag{13}$$

где

$$y = \left(H_1^T G H_1\right)^{-1} H_1^T G z. \tag{14}$$

Количество строк в H_2 не превосходит количество столбцов. Поэтому, как уже отмечалось, система (13) имеет бесконечное множество решений. Для нахождения среди них решения с минимальной нормой минимизируем критерий качества

$$J(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{x} + \mu^T (y - H_2 \widehat{x}),$$

где μ — вектор неопределенных множителей Лагранжа. При этом из условия равенства нулю производных от $J(\widehat{x})$ по $\widehat{x}$ и μ имеем

$$2\widehat{x} - H_2^T \mu = 0, \quad y = H_2 \widehat{x} = 0.$$

Первое из уравнений дает $\widehat{x} = H_2^T \mu / 2$, вследствие чего из второго уравнения имеем $\mu = 2\left(H_2 H_2^T\right)^{-1} y$. Подставляя найденное значение μ в первое уравнение, получаем

$$\widehat{x} = H_2^T \left(H_2 H_2^T\right)^{-1} \left(H_1^T G H_1\right)^{-1} H_1^T G z. \tag{15}$$

Данную оценку можно рассматривать как псевдорешение уравнения (4). Поэтому по аналогии с обычным решением (имеющим место при невырожденной матрице H) можем написать:

$$\widehat{x} = H_G^+ z, \tag{16}$$

где

$$H_G^+ = H_2^T \left(H_2 H_2^T\right)^{-1} \left(H_1^T G H_1\right)^{-1} H_1^T G \tag{17}$$

— обобщенная (G — взвешенная) псевдообратная к H матрица.

В частном случае линейной независимости строк матрицы H, как и при $G = I$, из (17) следует (8), т. е. обобщенное псевдообращение совпадает с обычным [3, 4], а при линейной независимости столбцов оно имеет специфический вид:

$$\hat{x} = H_G^+ z = (H^T G H)^{-1} H^T G z. \tag{18}$$

Из (12) нетрудно получить два других эквивалентных определения обобщенного псевдообращения, полезных при его теоретических исследованиях, заметив, что матрица $(H^T G H + \delta^2 I)$ положительно определена при любом скалярном $\delta^2 > 0$ и, следовательно,

$$H_G^+ = \lim_{\delta \to 0} (H^T G H + \delta^2 I)^{-1} H^T G. \tag{19}$$

Поскольку, с другой стороны,

$$H^T G H H^T G + \delta^2 H^T G = H^T G (H H^T G + \delta^2 I) = (H^T G H + \delta^2 I) H^T G$$

и матрица $(H H^T G + \delta^2 I)$ невырождена, когда $\delta^2 > 0$, то справедливо также

$$H_G^+ = \lim_{\delta \to 0} H^T G (H H^T G + \delta^2 I)^{-1}. \tag{20}$$

Соотношениями (19) и (20) операция обобщенного псевдообращения естественным образом распространяется на нулевую матрицу H, для которой получается $H_G^+ = 0$ при любой весовой матрице G.

Оценка состояния линейной динамической системы. В качестве примера использования обобщенного псевдообращения рассмотрим задачу оценивания методом наименьших квадратов вектора состояния $x(n)$ дискретной линейной динамической системы с переходной матрицей состояния $\Phi(n, n-1)$ и матрицей $\Gamma(n, n-1)$ возмущения $\xi(n-1)$:

$$x(n) = \Phi(n, n-1) x(n-1) + \Gamma(n, n-1) \xi(n-1) \tag{21}$$

для $n = 1, 2, \ldots$ с начальным условием $x(0)$. При этом измерения типа (1), выполняемые в те же дискретные моменты времени, имеют вид

$$z(n) = H(n) x(n) + v(n). \tag{22}$$

Задача состоит в отыскании оптимальной оценки $\hat{x}(n|n)$ вектора состояния $x(n)$ системы (21) по совокупности $\{z(k);\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ измерений (22).

Данную задачу нетрудно свести к уже рассмотренной, если учесть, что из известного [7] решения

$$x(n) = \Phi(n, k) x(k) + \sum_{i=k+1}^{n} \Phi(n, i) \Gamma(i, i-1) \xi(i-1)$$

уравнения (21) для любых $n \geqslant k \geqslant 0$ следует

$$x(k) = \Phi^{-1}(n, k) \left[x(n) - \sum_{i=k+1}^{n} \Phi(n, i) \Gamma(i, i-1) \xi(i-1) \right],$$

и, следовательно, измерения $\{z(k);\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ можно представить в виде*, аналогичном (1):

$$\bar{z}(n) = \bar{H}(n) x(n) + \bar{v}(n), \tag{23}$$

где

$$\bar{z}(n) = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}, \quad \bar{H}(n) = \begin{bmatrix} H(1) \Phi^{-1}(n, 1) \\ H(2) \Phi^{-1}(n, 2) \\ \vdots \\ H(n) \end{bmatrix}; \tag{24}$$

$$\bar{v}(n) = \begin{bmatrix} v(1) - H(1) \Phi^{-1}(n, 1) \sum_{i=2}^{n} \Phi(n, i) \Gamma(i, i-1) \xi(i-1) \\ v(2) - H(2) \Phi^{-1}(n, 2) \sum_{i=3}^{n} \Phi(n, i) \Gamma(i, i-1) \xi(i-1) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

---

* Здесь и далее чертой сверху отмечаются векторы и матрицы, размеры которых увеличиваются с ростом n.

Отсюда, согласно (16), (19), (20) и (11), имеем

$$\hat{x}(n\,|\,n) = \overline{H}_G^{+}(n)\,\overline{z}(n), \tag{26}$$

где

$$\overline{H}_G^{+}(n) = \lim_{\delta\to 0}[\overline{H}^T(n)\,\overline{G}(n)\,\overline{H}(n) + \delta^2 I]^{-1}\,\overline{H}^T(n)\,\overline{G}(n) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\overline{H}^T(n)\,\overline{G}(n)\,[\overline{H}(n)\,\overline{H}^T(n)\,\overline{G}(n) + \delta^2 I]^{-1},$$

$$\overline{G}^{-1}(n) = E[\overline{v}(n)\overline{v}^T(n)] = \overline{V}(n). \tag{27}$$

Оценка (26) практически полезна лишь в тех случаях, когда система (21), (22) полностью наблюдаема [7, 8], необходимым и достаточным условием чего является равенство ранга матрицы наблюдаемости

$$\overline{H}_{\Phi} = \begin{bmatrix} H(1)\,\Phi(1,0) \\ H(2)\,\Phi(2,0) \\ \vdots \\ H(n)\,\Phi(n,0) \end{bmatrix} \tag{28}$$

размерности оцениваемого вектора состояния $x(n)$. Если это условие выполнено, то столбцы матрицы $\overline{H}(n)$ линейно независимы, поскольку из (24) и (27) следует $\overline{H}(n) = \overline{H}_{\Phi}\Phi^{-1}(n,0)$ и $\Phi(n,0)$ — невырожденная матрица. При этом псевдообратная матрица $\overline{H}_G^{+}(n)$ выражается соотношением, аналогичным (18), и оценка (26) принимает вид

$$\hat{x}(n|n) = [\overline{H}^T(n)\overline{G}(n)\overline{H}(n)]^{-1}\overline{H}^T(n)\overline{G}(n)\overline{z}(n). \tag{29}$$

Если известна априорная оценка $\hat{x}(0|0)$ вектора начального состояния $x(0)$ системы (21), то ее удобно также включить в состав измерений (23), положив

$$z(0) = \hat{x}(0|0) = H(0)x(0) + v(0),$$

$$H(0) = I,\quad v(0) = \hat{x}(0|0) - x(0) = \tilde{x}(0|0).$$

Ранг получаемой в этом случае матрицы наблюдаемости

$$\overline{H}_{\Phi}^{*} = \begin{bmatrix} H(0) \\ H(1)\,\Phi(1,0) \\ H(2)\,\Phi(2,0) \\ \vdots \\ H(n)\,\Phi(n,0) \end{bmatrix}$$

определяется рангом единичной матрицы $H(0)$ и, следовательно, совпадает с размерностью вектора состояния $x(n)$.

В заключение покажем, что среди всех псевдорешений (29) уравнения $\overline{z}(n) = \overline{H}(n)x(n)$, соответствующих различным весовым матрицам $\overline{G}(n)$, «наилучшей» в смысле минимума среднеквадратической погрешности $\tilde{x}(n|n) = \hat{x}(n|n) - x(n)$ действительно является оценка

$$\hat{x}(n|n) = [\overline{H}^T(n)\overline{V}^{-1}(n)\overline{H}(n)]^{-1}\overline{H}^T(n)\overline{V}^{-1}(n)\overline{z}(n). \tag{30}$$

Для доказательства подставим в критерий качества

$$J_s(\tilde{x}) = E[\tilde{x}^T(n|n)S(n)\tilde{x}(n|n)]$$

($S(n)$ — произвольная симметрическая весовая матрица) соотношение

$$\tilde{x}(n|n) = [\overline{H}^T(n)\overline{G}(n)\overline{H}(n)]^{-1}\overline{H}^T(n)\overline{G}(n)\overline{v}(n),$$

вытекающее из (29) с учетом (23), и, используя правила скалярно-матричного дифференцирования, данные в приложении, вычислим производную от $J_s(\tilde{x})$ по $\overline{G}(n)$:

$$\frac{dJ_s(\tilde{x})}{dG(n)} = \overline{V}\overline{G}\overline{H}D^{-1}SD^{-1}\overline{H}^T - \overline{H}D^{-1}\overline{H}^T\overline{G}\overline{V}\overline{G}\overline{H}D^{-1}SD^{-1}\overline{H}^T -$$

$$- \overline{H}D^{-1}SD^{-1}\overline{H}^T\overline{G}\overline{V}\overline{G}\overline{H}D^{-1}\overline{H}^T + \overline{H}D^{-1}SD^{-1}\overline{H}^T\overline{G}\overline{V}.$$

Правая часть этого выражения, где для сокращения записи опущены аргументы и использовано обозначение $D = D(n) = \overline{H}^T(n)\overline{G}(n)\overline{H}(n)$, обращается в нуль при условии (27), чем и подтверждается оптимальность оценки (30).

Следствием независимости полученного результата от матрицы $S(n)$ является известная теорема Гаусса — Маркова [6], согласно которой оценка $\hat{y}(n|n)$ вектора

$y(n) = A(n)x(n)$, минимизирующая квадратичную форму

$$J = [\widehat{y}(n|n) - y(n)]^T [\widehat{y}(n|n) - y(n)],$$

при любой матрице $A(n)$ может быть представлена в виде $\widehat{y}(n|n) = A(n)\widehat{x}(n|n)$, где $\widehat{x}(n|n)$ — оценка (30) вектора $x(n)$.

Соотношения (29) и (30) использовались ранее для построения удобных в вычислительном отношении рекуррентных алгоритмов оптимальной линейной фильтрации при коррелированных ошибках измерений [9], в том числе в условиях априорной статистической неопределенности [10], когда корреляционные матрицы случайных последовательностей $\{\xi(n-1);\ n = 1, 2, \ldots\}$, $\{v(n);\ n = 1, 2, \ldots\}$ и вектора $\bar{x}(0|0)$ не заданы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые правила скалярно-матричного дифференцирования. Под матричной производной скалярной функции f от матричного аргумента Z размером $m \times n$ будем понимать матрицу того же размера, в которой каждый элемент является производной скаляра $f(Z)$ по соответствующему элементу матрицы Z:

$$\frac{df(Z)}{dZ} = \begin{bmatrix} df(Z)/dz_{11} & df(Z)/dz_{12} & \ldots & df(Z)/dz_{1n} \\ df(Z)/dz_{21} & df(Z)/dz_{22} & \ldots & df(Z)/dz_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ df(Z)/dz_{m1} & df(Z)/dz_{m2} & \ldots & df(Z)/dz_{mn} \end{bmatrix}.$$

Из этого определения и правил обычного (скалярного) дифференцирования следует:

$$\frac{df(Z)}{dZ^T} = \left(\frac{df(Z)}{dZ}\right)^T; \qquad (\text{П1})$$

$$\frac{d}{dZ}[\alpha f_1(Z) + \beta f_2(Z)] = \alpha \frac{df_1(Z)}{dZ} + \beta \frac{df_2(Z)}{dZ}; \qquad (\text{П2})$$

$$\frac{d}{dZ}[f_1(Z) f_2(Z)] = \frac{df_1(Z)}{dZ} f_2(Z) + f_1(Z) \frac{df_2(Z)}{dZ}, \qquad (\text{П3})$$

где α и β — произвольные скалярные константы.

Пусть теперь

$$f(Z) = x^T A y, \quad Z \in \{x^T, A, y\}. \qquad (\text{П4})$$

Тогда, как нетрудно убедиться непосредственными вычислениями,

$$\frac{df(Z)}{dx^T} = (Ay)^T, \quad \frac{df(Z)}{dy} = (x^T A)^T, \quad \frac{df(Z)}{dA} = xy^T = (x^T)^T y^T.$$

Сопоставление этих выражений позволяет сформулировать следующее общее правило матричного дифференцирования мультипликативной (билинейной) формы (П4): *производная мультипликативной формы по любой из входящих в нее матриц (векторов) равна произведению транспонированных частей этой формы, расположенных слева и справа от данной матрицы (вектора).*

Существенно, что это правило остается справедливым при дифференцировании и других, более сложных мультипликативных форм. Например, функция

$$f(Z) = x^T A B^T y, \quad Z \in \{x^T, A, B^T, y\} \qquad (\text{П5})$$

имеет следующие матричные производные:

$$\frac{df(Z)}{dx^T} = (AB^T y)^T = y^T B A^T, \quad \frac{df(Z)}{dA} = (x^T)^T (B^T y)^T = xy^T B;$$

$$\frac{df(Z)}{dB^T} = (x^T A)^T y^T = A^T x y^T, \quad \frac{df(Z)}{dy} = (x^T A B^T)^T = B A^T x.$$

Здесь при вычислении первой и последней производных в роли матрицы A билинейной формы (П4) выступило произведение (AB^T), при вычислении второй из них вектор $(B^T y)$ заменил собой вектор y, а при вычислении третьей роли вектор-строки x^T и матрицы A выражения (П4) сыграли соответственно вектор-строка $(x^T A)$ и матрица B^T.

Рассмотрим далее мультипликативную форму вида

$$f(Z) = f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)\big|_{Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_k = Z}, \qquad (\text{П6})$$

в которую одна из матриц (матрица Z) входит k раз в разных позициях, обозначенвых индексами 1, 2, ..., k. Примером такой формы может служить выражение

$$f(A) = x^T ABAy = x^T A_1 B A_2 y \,|_{A_1=A_2=A} = f(Z_1, Z_2)\,|_{Z_1=Z_2=Z} \qquad (\text{П7})$$

с 2-кратным использованием матрицы $A = [a_{ij}]$.

Согласно правилу скалярного дифференцирования произведения матриц,

$$\frac{df(A)}{da_{ij}} = x^T \frac{dA}{da_{ij}} BAy + x^T AB \frac{dA}{da_{ij}} y,$$

что позволяет записать матричную производную мультипликативной формы (П7) в виде

$$\frac{df(A)}{dA} = \left[\frac{df(A_1, A_2)}{dA_1} + \frac{df(A_1, A_2)}{dA_2}\right]_{A_1=A_2=A}, \qquad (\text{П8})$$

где $df(A_1, A_2)/dA_1$ и $df(A_1, A_2)/dA_2$ — скалярно-матричные производные мультипликативной формы $f(A_1, A_2)$ с неповторяющимися матрицами, вычисляемые по приведенному выше общему правилу.

Используя (П8), можно показать, что в общем случае (П6) производная мультипликативной формы $f(Z)$ по любой из входящих в нее k раз матриц Z вычисляется по формуле

$$\frac{df(Z)}{dZ} = \left[\frac{df}{dZ_1} + \frac{df}{dZ_2} + \ldots + \frac{df}{dZ_k}\right]_{Z_1=Z_2=\ldots=Z_k=Z}, \qquad (\text{П9})$$

где Z_i — матрица, заменяющая матрицу Z в i-й позиции формы $f(Z)$, и $f = f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$.

Рассмотрим, наконец, правило дифференцирования мультипликативной формы вида $f(Z^{-1})$ по матрице Z.

Пусть, например,

$$f(Z^{-1}) = x^T A^{-1} y, \qquad (\text{П10})$$

где роль Z играет матрица $A = [a_{ij}]$. Тогда, учитывая, что

$$\frac{dA^{-1}}{da_{ij}} = -A^{-1}\frac{dA}{da_{ij}}A^{-1},$$

можно написать:

$$\frac{df(A^{-1})}{dA} = -\frac{d}{dA_1}\left(x^T A^{-1} A_1 A^{-1} y\right)|_{A_1=A}.$$

Производная в правой части этого выражения вычисляется по приведенному выше общему правилу матричного дифференцирования:

$$\frac{df(A^{-1})}{dA} = -(x^T A^{-1})^T (A^{-1}y)^T = -(A^{-1})^T xy^T (A^{-1})^T.$$

Данное свойство матричной производной можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{df(Z^{-1})}{dZ} = -\frac{d}{dZ_1} f\left(Z^{-1} Z_1 Z^{-1}\right)|_{Z_1=Z}.$$

Очевидно, что если вместо матрицы Z используется произведение нескольких матриц, например $D = AZB$, то

$$\frac{df(D^{-1})}{dZ} = \frac{df[(AZB)^{-1}]}{dZ} = -\frac{d}{dZ_1} f\left[(AZB)^{-1} AZ_1B (AZB)^{-1}\right]|_{Z_1=Z}. \qquad (\text{П11})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Щиголев Б. М.** Математическая обработка наблюдений.— М.: Физматгиз, 1962.
2. **Мудров В. И., Кушко В. Л.** Методы обработки измерений.— М.: Сов. радио, 1976.
3. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.— М.: Наука, 1977.
4. **Беклемишев Д. В.** Дополнительные главы линейной алгебры.— М.: Наука, 1983.
5. **Swerling P.** Modern state estimation methods from the viewpoint of the method of least squares // IEEE Trans. on Automatic Control.— 1971.— 16, N 6.— P. 51.

6. **Эльясберг П. Е.** Определение движения по результатам измерений.— М.: Наука, 1976.
7. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Наука, 1973.
8. **Ли Р.** Оптимальные оценки, определение характеристик и управление.— М.: Наука, 1966.
9. **Сизов В. П.** Оптимальная оценка состояния линейных динамических систем при коррелированных ошибках измерений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1984.— № 3.
10. **Сизов В. П.** Алгоритмы оптимальной оценки состояния статистически неопределенных линейных динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1977.— № 6.

Поступило в редакцию 20 января 1987 г.