УДК 621.391 : 53.08

В. П. БАКАЛОВ, Н. П. РУССКИХ
(Москва)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО БЕЗОПОРНОЙ ГОЛОГРАММЕ, ИСКАЖЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ АТМОСФЕРЫ

Восстановление изображений космических или астрономических объектов обычно осложняется влиянием атмосферной турбулентности, искажающей волновой фронт отраженной от объекта волны. Часто восстановление целесообразно производить по дифракционной картине, зарегистрированной, например, на фотопластинке в выходном зрачке телескопа, являющейся безопорной голограммой и называемой также голограммой интенсивности [1]. Известно, что при слабой турбулентности искажается только фазовая информация об объекте, амплитудная — сохраняется. Турбулентные условия распространения световой волны принято характеризовать параметром

$$\beta_0^2 = 1{,}23 C_n^2 k^{7/6} h^{11/6},$$

где C_n^2 — структурная характеристика показателя преломления; k — $2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина световой волны; L — длина атмосферного участка. Если $\beta_0^2 < 1$, турбулентность считается слабой. При $\beta_0^2 > 1$ [2] влияние турбулентности велико и амплитудная информация об объекте оказывается искаженной.

Рассмотрим задачу восстановления изображения объекта по голограмме интенсивности, искаженной сильной турбулентностью.

Пусть $g(i)$, $g_1(i)$, $g_2(i)$ — пространственно-ограниченные в общем случае комплексные решетчатые функции обобщенной переменной $i = (i_1, i_2)$, представляющие искаженное изображение объекта, неискаженное изображение и импульсную характеристику атмосферы. Пусть также $\sigma(\omega)$, $\sigma_1(\omega)$, $\sigma_2(\omega)$ есть спектры соответственно $g(i)$, $g_1(i)$ и $g_2(i)$ и $\sigma(\omega) = \sum_i g(i) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} i\omega\right)$ (N — число отсчетов $g(i)$). Тогда

$$\sigma(\omega) = \sigma_1(\omega)\sigma_2(\omega), \tag{1}$$

где ω — (ω_1, ω_2) — обобщенная пространственная частота. Зарегистрированная голограмма интенсивности есть

$$|\sigma(\omega)|^2 = |\sigma_1(\omega)\sigma_2(\omega)|^2. \tag{2}$$

Отметим, что в случае слабой турбулентности

$$|\sigma(\omega)|^2 \equiv |\sigma_1(\omega)|^2. \tag{3}$$

При сильной турбулентности атмосферы (3) не выполняется, так как $|\sigma_2(\omega)|$ не может считаться постоянным. Перепишем (2) в виде

$$|\sigma(\omega)|^2 = [\sigma_1(\omega)\sigma_2(\omega)][\overset{*}{\sigma}_1(\omega)\overset{*}{\sigma}_2(\omega)] = [\sigma_1(\omega)\overset{*}{\sigma}_1(\omega)][\sigma_2(\omega)\overset{*}{\sigma}_2(\omega)]. \tag{4}$$

Здесь $\overset{*}{\sigma}_1(\omega)$ и $\overset{*}{\sigma}_2(\omega)$ являются функциями, комплексно сопряженными с $\sigma_1(\omega)$ и $\sigma_2(\omega)$.

Применение процедуры обратного преобразования Фурье к (4) дает следующее выражение для искаженного изображения объекта:

$$g(i) = [g_1(i) \otimes \overset{*}{g}_1(-i)] \otimes [g_2(i) \otimes \overset{*}{g}_2(-i)], \tag{5}$$

где $\overset{*}{g}_1(-i)$ и $\overset{*}{g}_2(-i)$ — комплексно сопряженные и центрально-симметричные копии $g_1(i)$ и $g_2(i)$; i принимает целочисленные значения; $\otimes$ — символ операции свертки. Каждая свертка, записанная в (5) в квадратных скобках, представляет собой автокорреляционную функцию: первая — неискаженного сигнала, вторая — импульсной характеристики атмосферы.

Как следует из (5) и (4), искаженное изображение или его спектр формируется из четырех сомножителей, которые должны быть определены для восстановления неискаженного изображения, когда $g_1(i)$ и $g_2(i)$ неизвестны. В [3] показано, что решение уравнения свертки при неизвестном ядре возможно с точностью до постоянного множителя, если выполняется одно из эквивалентных условий: $g_1(i)$ и $g_2(i)$ непредставимы в виде свертки двух или более пространственно-ограниченных функций, спектры $\sigma_1(\omega)$, $\sigma_2(\omega)$ не могут быть факторизованы на множители, являющиеся целыми функциями, или же все нули в каждом из этих спектров функционально связаны.

Эти условия, как известно, выполняются практически для всех реальных сигналов. В случае (5) выполнение их относительно $g_1(i)$ и $g_2(i)$ или их спектров приводит к возможному разложению свертки автокорреляции на четыре составляющих, т. е. к решению этого уравнения относительно $g_1(i)$ и $g_2(i)$.

Аналогичные выводы можно сделать для непрерывного аналога (5) — интегрального уравнения, описывающего свертку автокорреляционных функций в случае непрерывных сигналов.

Для восстановления $g_1(i)$ при неизвестном $g_2(i)$ могут быть использованы алгебраические и градиентные методы. Последние оказываются более устойчивыми к ошибкам регистрации и вычислений.

Рассмотрим более подробно процедуру восстановления с применением градиентных методов. Выберем в качестве целевой функции

$$B = N^{-2} \sum_{\omega} [\delta(\omega) - |S_1(\omega)|\,|S_2(\omega)|]^2, \tag{6}$$

где $\sigma^2(\omega)$ — голограмма интенсивности; $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$ — текущие оценки спектров восстанавливаемых сигнала и импульсной характеристики атмосферы.

Целевая функция (6) не является аналитической функцией восстанавливаемых комплексных $s_1(i)$, $s_2(i)$, поэтому ее градиенты определятся отдельно для действительных и мнимых частей $s_1(i)$ и $s_2(i)$. В соответствии с изложенным процедура восстановления производится при многократном последовательном осуществлении итерации, реализуемой по правилу

$$\begin{aligned} s_1^{k+1}(i) &= s_1^k(i) - \alpha^k \left(\frac{\partial B}{\partial s_{1R}(i)} + j\, \frac{\partial B}{\partial s_{1I}(i)} \right); \\ s_2^{k+1}(i) &= s_2^k(i) - \alpha^k \left(\frac{\partial B}{\partial s_{2R}(i)} + j\, \frac{\partial B}{\partial s_{2I}(i)} \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь α^k — параметр, характеризующий длину шага итерации в направлении антиградиента, вычисляемого для принятой целевой функции B; $\dfrac{\partial B}{\partial s_{1(2)R}(i)}$ и $\dfrac{\partial B}{\partial s_{1(2)I}(i)}$ — составляющие градиентов, вычисляемые по действительным и мнимым частям $s_1(i) = \mathrm{Re}\, s_1(i) + j\,\mathrm{Im}\, s_1(i)$ и $s_2(i) = \mathrm{Re}\, s_2(i) + j\,\mathrm{Im}\, s_2(i)$.

Вычисления сумм составляющих градиентов дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial s_{1R}(i)} + j\,\frac{\partial B}{\partial s_{1I}(i)} &= 2N^{-2} \sum_{\omega} |\sigma(\omega) - |S_1(\omega)|\,|S_2(\omega)|\,| \times \\ &\quad \times \frac{S_1(\omega)}{|S_1(\omega)|}\, |S_2(\omega)| \exp\left(-j\,\frac{2\pi i\omega}{N}\right); \\ \frac{\partial B}{\partial s_{2R}(i)} + j\,\frac{\partial B}{\partial s_{2I}(i)} &= 2N^{-2} \sum_{\omega} |\sigma(\omega) - |S_2(\omega)|\,|S_1(\omega)|\,| \times \\ &\quad \times \frac{S_2(\omega)}{|S_2(\omega)|}\, |S_1(\omega)| \exp\left(-j\,\frac{2\pi i\omega}{N}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

При использовании метода наискорейшего спуска величина α^k выбирается оптимальной для минимизации целевой функции на каждом шаге итерации. Выбор величины α^k_{opt} осуществляется одним из известных способов одномерной оптимизации [4].

Градиентный метод наискорейшего спуска обладает низкой скоростью сходимости в окрестности точки минимума целевой функции B вследствие малости нормы градиента. Процедура формирования оценок $s_1(i)$ и $s_2(i)$ может быть осуществлена методом сопряженных градиентов, обладающим лучшей сходимостью. При этом (7) остаются справедливыми, но вместо частных производных, определяющих антиградиент, используются сопряженные градиенты, которые легко могут быть вычислены с учетом приведенных соотношений (8).

Таким образом, принципиально возможно восстановление изображений космических и астрономических объектов по безопорной голограмме в случае сильной турбулентности атмосферы, вызывающей искажения не только фазы, но и амплитуды дифракционной картины. Восстановление может быть осуществлено методами градиентного поиска с помощью приведенных соотношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Устинов Н. Д., Матвеев И. Н., Протопопов В. В.** Методы обработки оптических полей в лазерной локации.— М.: Наука, 1983.
2. **Сигналы** и помехи в лазерной локации/Под ред. В. Е. Зуева.— М.: Радио и связь, 1985.
3. **Бакалов В. П., Русских Н. П.** О возможности решения уравнения свертки при неизвестном ядре в случае многомерных пространственно-ограниченных сигналов // Автометрия.— 1985.— № 5.
4. **Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.** Оптимизация в технике.— М.: Мир, 1986.— Кн. 1.

Поступило в редакцию 25 июля 1990 г.