роля проходящей мощности гиротрона // Применение вычислительной техники в физическом эксперименте.— Горький: ИПФ АН СССР, 1987.
7. **Киреев В. А.** Программно аппаратные средства для сбора и предварительной обработки однородных температурных параметров // Тез. докл. III Респ. конф. «Автоматизация научных исследований».— Киев: ИК АН УССР, 1986.
8. **Компанец В. К., Логвинов А. В., Райков Б. К. и др.** КАМАК-модули для преобразования сигналов однородных датчиков // Тез. докл. VII Всесоюз. симп. «Модульные информационно-вычислительные системы».— Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1989.
9. **Скубачевский Л. С.** Испытания воздушно-реактивных двигателей.— М.: Машиностроение, 1972.
10. **Зайцев Ю. Ф., Марченко А. Н., Ващенко И. И.** Полупроводниковые резисторы в электротехнике.— М.: Энергоатомиздат, 1988.
11. **Измерительные** преобразователи — современное состояние и развитие // Контрольно-измерительная техника: экспресс-информация. 1990.— № 1.
12. **А. с. 154037 СССР.** Измеритель больших перемещений/О. П. Скобелев.— Опубл. 1963, Бюл. № 8.
13. **А. с. 1392350 СССР.** Устройство для измерений больших перемещений/Ю. Н. Секисов, О. П. Скобелев, К. Д. Сосняков и др.— Опубл. 30.04.88, Бюл. № 16.
14. **Захаров В. И., Олеск А. О., Шефтель И. Т.** Пленочные терморезисторы для гибридных микросхем и устройств микроэлектроники // Приборы и системы управления.— 1986.— № 6.
15. **Гораздовский Т. Я., Истомин Н. М., Леончик В. В. и др.** Миниатюрные преобразователи для сенсорных устройств робототехники // Приборы и системы управления.— 1988.— № 1.
16. **А. с. 862060 СССР.** Матричный преобразователь магнитных полей/А. А. Абакумов.— Опубл. 07.09.81, Бюл. № 33.
17. **Хадацкий В. Е.** Управляющие машины и их применение.— М.: Энергия, 1976.

Поступила в редакцию 31 июля 1990 г.

УДК 681.518.3

А. Н. ПЛАХОТНЮК
(Краснодар)

СИНТЕЗ УСТОЙЧИВЫХ МОДЕЛЕЙ КОСВЕННЫХ МНОГОПАРАМЕТРОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

К линейным моделям косвенных многопараметровых измерений в непрерывной

$$\int_a^b K(u, v)\, x(u)\, du \cong b(v), \quad v \in [c, d], \tag{1}$$

или дискретной

$$Ax \cong b \tag{2}$$

формах приводят многочисленные некорректные обратные задачи естествознания, связанные с инструментальной диагностикой, неразрушающим контролем, параметрической идентификацией и автоматическим управлением сложными объектами и системами [1—4], где $x(u)$ и $x \in R_n$ — искомые векторы интересующей физической характеристики (параметра); $K(u, v)$ — интегральный (ядро) и $A \in R_{m\times n}$ — матричный операторы прямой задачи ($m \geqslant n$); $b(v)$ и $b \in R_m$ — векторы значений оператора (отклика). При этом в общем случае системы (1) и (2) несовместны вследствие определенной степени неадекватности модели реальной системе, т. е. существования принципиально неустранимой методической погрешности, свойственной физической природе косвенных многопараметровых измерений [4], а элементы оператора и правой части содержат инструментальные (аппроксимативные) погрешности.

Линейные модели (1) и (2) обычно являются локальными приближениями реальных нелинейных обратных задач [2—4] в некоторой ограниченной окрестности, и вектор решения x в этом случае используется в виде поправки, прибавляемой к текущему номинальному решению нелинейной задачи. Это обстоятельство служит принципиальным основанием для поиска устойчивых решений систем (1) и (2) на множестве векторов x минимальной длины (нормы), приводящим к достаточно малым погрешностям невязки систем [3, 4], что увеличивает вероятность остаться в окрестности, где линейное приближение имеет смысл [5, 6].

Известные методы синтеза устойчивых линейных моделей с учетом априорной неопределенности данных [5, с. 137—160] используют ее лишь частично и взаимно несогласованно, ограничиваясь информацией о погрешностях оператора, правой части и поведении решения [5, с. 139] (последнее обычно бывает неизвестно). Доминирующая часть кажущейся скрытой (из-за погрешностей оператора) априорной информации о мере несовместности (неадекватности) модели [6, с. 223—233] при этом не используется, что усугубляет некорректность задачи в целом и расширяет множество потенциально возможных решений [5, с. 153—160] при наличии единственного устойчивого решения, оптимально согласованного с исходной априорной неопределенностью задачи [6].

Рассмотрим дискретную форму модели (2) с приближенными данными, к которой сводится на этапе вычислений большинство задач косвенных многопараметровых измерений:

$$\tilde{A}x \cong \tilde{b}, \tag{3}$$

$\tilde{A} \in R_{m\times n}$, $\tilde{b} \in R_m$, $x \in R_n$ при $m \geqslant n$; данные получаются в результате измерений (аппроксимации оператора), с евклидовыми нормами погрешностей $\|\tilde{A} - \bar{A}\| \leqslant h$, $\|\tilde{b} - \bar{b}\| \leqslant \delta$. При этом точная система

$$\bar{A}x \cong \bar{b} \tag{4}$$

и ее мера несовместности [6]

$$\bar{\mu} = \inf_x \|\bar{b} - \bar{A}x\| \tag{5}$$

неизвестны.

В общем случае точная система (4) имеет единственное нормальное псевдорешение $\bar{x}$, устойчивое к погрешностям правой части и неустойчивое к погрешностям оператора [6]; аналогично ведет себя мера несовместности [6, 7]. Поэтому задачи определения по приближенным данным (3) меры несовместности (предельной оценки) и решения (нормального псевдорешения) уравнения (4) являются некорректно поставленными (неустойчивыми) [6].

Мажорантная оценка меры несовместности, непрерывная от исходных данных задачи [6, 7], определяется соотношением

$$\hat{\mu} = \inf_x \sup_{(A,b)\in\Sigma} \|b - Ax\|, \tag{6}$$

где $\Sigma = \{(A, b) \in W : \|A - \tilde{A}\| \leqslant h, \ \|b - \tilde{b}\| \leqslant \delta\}$ — класс эквивалентных по точности данных (по А. Н. Тихонову).

Из неравенства для норм

$$\|\bar{b} - \bar{A}x\| \leqslant \|\tilde{b} - \tilde{A}x\| + \|\tilde{b} - \bar{b}\| + \|(\tilde{A} - \bar{A})x\| \leqslant \|\tilde{b} - \tilde{A}x\| + \delta + h\|x\|$$

и (5) следуют оценки:

$$\begin{gathered} \tilde{\mu} = \inf_x \{\|\tilde{b} - \tilde{A}x\|\} \leqslant \hat{\mu}; \\ \bar{\mu} \leqslant \hat{\mu} = \inf_x \{\|\tilde{b} - \tilde{A}x\| + \delta + h\|x\|\}, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\hat{\mu}$ вычисляется до решения основной задачи.

Используя информацию об априорной неопределенности задачи, находим устойчивую модель косвенных многопараметровых измерений методом оптимальной невязки В. А. Морозова с вектором решения $\breve{x}$:

$$\|\breve{x}\| = \min_x \|x\|, \tag{8}$$

удовлетворяющим условию суммарной невязки

$$\Delta_\Sigma = \|\widetilde{b} - \widetilde{A}\breve{x}\| = \widehat{\mu} + \delta + h\|\breve{x}\|. \tag{9}$$

Следует заметить, что обычно оптимальное устойчивое решение задачи $\breve{x}$ (из-за различия невязок) существенно отличается от решения $\widehat{x}$ из (7):

$$\widehat{x} = \arg\inf_x \{\|\widetilde{b} - \widetilde{A}x\| + \delta + h\|x\|\},$$

определяющего мажорантную оценку меры несовместимости и ошибочно $\widetilde{A}$ в (3) (без предварительного традиционного перехода к системе нормальных уравнений) на основе сингулярного разложения [5]. Это позволяет улучшить обусловленность задачи, упростить анализ получаемых соотношений и воспользоваться существующими, высокоэффективными программными средствами, например подпрограммой сингулярного разложения SVD и ее модификациями [5]. Для матрицы $\widetilde{A}$ имеем

$$\widetilde{A} = U_{(m\times m)} \left[\frac{S_{(n\times n)}}{O_{(m-n)\times n}}\right] V^T_{(n\times n)}, \tag{10}$$

где $m \geqslant n$; $\operatorname{rank} \widetilde{A} = k \leqslant n$; $S = \operatorname{diag}(S_1, \ldots, S_n)$ — упорядоченная по $S_1 \geqslant S_2 \geqslant \ldots \geqslant S_n \geqslant 0$ диагональная матрица сингулярных чисел (некоторые из них могут быть равны нулю при $k < n$); U и V — ортогональные матрицы левых и правых собственных векторов. Подставляя (10) в (3), получим

$$U\left[\frac{S}{O}\right] V^T x \cong \widetilde{b}, \tag{11}$$

откуда при $\xi = V^T x$ и $\beta = U^T\widetilde{b}$ — нормированных векторах решения и правой части с учетом свойства ортогональных матриц сохранять норму при преобразовании

$$\|\xi\| = \|x\|, \ \|\beta\| = \|\widetilde{b}\|, \ \left\|\beta - \left[\frac{S}{O}\right]\xi\right\| = \|\widetilde{b} - \widetilde{A}x\|$$

имеем

$$\left[\frac{S}{O}\right]\xi \cong \beta. \tag{12}$$

При полном ранге матрицы $\widetilde{A}$ (то же для S), $k = n$,

$$\left[\frac{S_{(n\times n)}}{O_{(m-n)\times n}}\right]\xi_{(n\times 1)} \cong \left[\frac{\beta^{(1)}_{(n\times 1)}}{\beta^{(2)}_{(m-n)\times 1}}\right]$$

следует, что норма невязки системы равна

$$\omega = \|\widetilde{b} - \widetilde{A}x\| = \|\beta^{(2)}\| = \left[\sum_{i=n+1}^{m} \beta_i^2\right]^{1/2}, \tag{13}$$

а компоненты вектора псевдорешения ξ и его норма определяются выражениями

$$\xi_i = \beta_i/S_i, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{14}$$

$$\gamma = \|\xi\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{S_i}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{15}$$

из которых видно, что нормальное псевдорешение ξ имеет ограниченные компоненты лишь для $S_i > 0$ и неустойчиво к изменению элементов $\tilde{A}$.

Можно показать, что вычисление оптимального устойчивого решения $\breve{x}$ из (8) и (9) эквивалентно параметрической регуляризации по А. Н. Тихонову нормальной системы к (12):

$$(S^2 + \alpha I_n)\breve{\xi}_\alpha = S\beta^{(1)} \tag{16}$$

— с параметром регуляризации $\alpha \in [0, \infty)$, управляющим нормами решения

$$\gamma(\alpha) = \|\breve{x}_\alpha\| = \|\breve{\xi}_\alpha\| = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i\beta_i}{S_i^2+\alpha}\right)^2\right]^{1/2} \tag{17}$$

и невязки

$$\omega(\alpha) = \|\tilde{b} - \tilde{A}\breve{x}_\alpha\| = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha\beta_i}{S_i^2+\alpha}\right)^2 + \sum_{i=n+1}^{m}\beta_i^2\right]^{1/2} \tag{18}$$

и обеспечивающим устойчивое вычисление компонентов регуляризованного решения $\breve{\xi}_\alpha$:

$$\breve{\xi}_{\alpha i} = \frac{S_i\beta_i}{S_i^2+\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Если $\operatorname{rank}\tilde{A} = k < n$, то суммирование в (17) и (18) производится по $i = 1, \ldots, k$ и $i = k+1, \ldots, m$, а $\breve{\xi}_{\alpha i} = 0$ при $i > k$.

Определение значения параметра регуляризации $\breve{\alpha}_0$ для вычисления оптимального устойчивого решения $\breve{\xi}_{\alpha 0}$ и $\breve{x}_{\alpha 0}$ целесообразно осуществлять методом Ньютона из уравнения

$$F(\alpha) = \omega(\alpha) - [\hat{\mu} + \delta + h\gamma(\alpha)] = 0, \tag{20}$$

полученного из (9) на основе (17) и (18). При начальном приближении $\breve{\alpha}_{(0)} = \hat{\alpha}_{\max}$, определение которого рассматривается ниже, наблюдалась быстрая сходимость итерационного процесса. Компоненты $\breve{\xi}_{\alpha 0}$ при $\breve{\alpha}_0$ и $\breve{x}_{\alpha 0} = V\breve{\xi}_{\alpha 0}$ вычисляются из (19).

Для вычисления оптимального устойчивого решения прежде всего необходимо доопределить задачу, вычислив оценку меры несовместности из (7); для этого воспользуемся выражениями (17) и (18), откуда

$$\hat{\mu}(\alpha) = \inf_{\alpha}\{\omega(\alpha) + \delta + h\gamma(\alpha)\}. \tag{21}$$

Исследуем функцию $\{\ldots\}$ в (21), определив производную

$$\hat{\mu}'_\alpha(\hat{\alpha}) = \left[\frac{\hat{\alpha}}{\omega(\hat{\alpha})} - \frac{h}{\gamma(\hat{\alpha})}\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i^2\beta_i^2}{(S_i^2+\hat{\alpha})^3}. \tag{22}$$

Если при $\hat{\alpha} \in [0, \infty)$ найдется $\hat{\alpha}_0$, при котором $\hat{\mu}'_\alpha(\hat{\alpha}) = 0$, то в (21) inf соответствует min и из (22) следует, что при $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0$ существует соотношение

$$\hat{\alpha}_0\|\hat{x}_{\alpha 0}\| = h\|\tilde{b} - \tilde{A}\hat{x}_{\alpha 0}\|, \tag{23}$$

из которого можно определить $\hat{\alpha}_{(0)}$ итерационным методом:

$$\hat{\alpha}_{(j)} = h\omega(\hat{\alpha}_{(j-1)})/(\gamma(\hat{\alpha}_{(j-1)})), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

При начальном приближении $\hat{\alpha}_{(0)} = \hat{\alpha}_{\max}$ обеспечивалась достаточно быстрая сходимость итерационного процесса.

Представляется возможным оценить интервал существования $\hat{\alpha} \in [0, \hat{\alpha}_{\max}]$, для которого выполняется соотношение (23). Из неравенства для норм выражения (16)

$$\|\xi_\alpha\| \geqslant \|S\beta^{(1)}\|/(\|S\|^2+\alpha),$$

справедливого и для $\widehat{\alpha}_0$, уравнения (23) и неравенства

$$\|\widetilde{b}-\widetilde{A}\widehat{x}_\alpha\| \leqslant \|\widetilde{b}\| = \|\beta\|,$$

получим верхнюю предельную оценку для $\widehat{\alpha}_0$:

$$0 \leqslant \widehat{\alpha}_0 \leqslant \widehat{\alpha}_{\max} = \frac{h\|\beta\|\|S\|^2}{\|S\beta^{(1)}\| - h\|\beta\|}, \tag{25}$$

которая справедлива при $\|S\beta^{(1)}\| > h\|\beta\|$.

Если $\|S\beta^{(1)}\| \leqslant h\|\beta\|$, то естественно принять $\widehat{\alpha}_0 \to +\infty$, что соответствует $\widehat{\xi}_{\alpha 0} = \widehat{x}_{\alpha 0} = 0$, оценке меры несовместности $\widehat{\mu} = \|\beta\| + \delta$ и решению задачи $\widetilde{\xi}_\alpha = \widetilde{x}_\alpha = 0$.

Другой крайний случай возникает, когда при любом $\widehat{\alpha} \in [0, \widehat{\alpha}_{\max}]$ производная $\mu'_\alpha(\alpha) > 0$, т. е. из (22) следует

$$\widehat{\alpha}\|\widehat{x}_\alpha\| - h\|\widetilde{b} - \widetilde{A}\widehat{x}_\alpha\| > 0 \tag{26}$$

и для $\widehat{\mu}$ из (21) существует inf при $\widehat{\alpha}_0 = 0$, равный

$$\widehat{\mu} = \|\beta^{(2)}\| + h\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{S_i}\right)^2\right]^{1/2} + \delta. \tag{27}$$

Если rank $\widetilde{A} = k < n$ и $S_i \cong 0$ для $i > k$, то компоненты в (27) с весьма малыми S_i отбрасываются. Возможно также использовать классическую регуляризующую оценку (21) при $\widehat{\alpha}_0 = \varepsilon > 0$.

Таким образом, при данной постановке задачи рассмотрены все возможные на практике случаи получения устойчивых оценок меры несовместности и оптимальных решений задачи косвенных многопараметровых измерений, согласованных с априорной неопределенностью исходных данных. Если погрешности элементов матрицы и правой части (3) существенно неоднородны, то следует выполнить нормирование в соответствии с рекомендациями [5, с. 137—145].

На основе стандартной подпрограммы сингулярного разложения SVD [5] и представленной в настоящей статье методики разработан программный пакет для моделирования и синтеза оптимальных устойчивых систем косвенных многопараметровых измерений для комплексного неразрушающего электромагнитного контроля поверхностного и объемного упрочнений ферромагнитных изделий.

Алгоритм и программа апробированы на специальном тест-примере из [5, с. 153—160]; благодаря этому обстоятельству представилась возможность сравнить эффективность предложенной методики с множеством наиболее известных современных методик, широко применяемых в нашей стране и за рубежом: сингулярного анализа, псевдоранга, пошаговой и гребневой регрессий. Так, для рассматриваемого примера: $m = 15$, $n = 5$, $h = 4{,}3 \cdot 10^{-8}$, $\delta = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$ — выполняется соотношение $\|S\beta^{(1)}\| \gg h\|\beta\|$, поэтому $\widehat{\alpha}_0 \in [0, \widehat{\alpha}_{\max}]$, где из (25) $\widehat{\alpha}_{\max} = 4{,}43 \cdot 10^{-8}$ и из (24) за 3—4 итерации находим $\widehat{\alpha}_0 = 1{,}17 \cdot 10^{-12}$ — оптимальное значение параметра регуляризации для оценки меры несовместности $\widehat{\mu} = 3{,}2954 \cdot 10^{-4}$, которая оказалась примерно в 2 раза больше δ-погрешности отклика. Оценка $\widehat{\mu}$, являясь наименьшей оценкой полной невязки, при невязке системы $\widehat{\omega}_{\alpha 0} = 1{,}3932 \cdot 10^{-4}$ имеет место для

$$\widehat{x}_{\alpha 0} = \begin{bmatrix} -2{,}8373911 \\ 0{,}59819891 \\ -0{,}37354642 \\ 0{,}39464945 \\ 3{,}9353651 \end{bmatrix}; \quad \|\widehat{x}_{\alpha 0}\| = 4{,}9184.$$

Из (9) вычисляем допустимую невязку: $\Delta_\Sigma = 5{,}1954 \cdot 10^{-4} + 4{,}3 \times \times 10^{-8} \|x_\alpha\|$, по которой из (20) методом Ньютона с $\breve{\alpha}_{(0)} = \widehat{\alpha}_{max}$ на 3—4 итерации находим $\breve{\alpha}_0 = 1{,}234 \cdot 10^{-6}$ — оптимальное значение параметра регуляризации единственного (оптимального) устойчивого решения задачи из (19):

$$\breve{x}_{\alpha 0} = \begin{bmatrix} -2{,}4691 \\ -0{,}51787 \\ -0{,}16122 \\ 1{,}6034 \\ 3{,}4189 \end{bmatrix}; \quad \|\breve{x}_{\alpha 0}\| = 4{,}5443; \quad \breve{\omega}_{\alpha 0} = 5{,}1 \cdot 10^{-4} \cong \Delta_\Sigma.$$

[5, с. 155, 156]:

$$\breve{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} -2{,}4857328 \\ -0{,}52913252 \\ -0{,}18414114 \\ 1{,}6156794 \\ 3{,}4547871 \end{bmatrix}; \quad \|\breve{x}_{(3)}\| = 4{,}5868; \quad \breve{\omega}_{(3)} = 1{,}4 \cdot 10^{-4},$$

при котором невязка $\breve{\omega}_{(3)}$, хотя и меньше $\breve{\omega}_{\alpha 0}$ (одного порядка), но само решение $\breve{x}_{(3)}$ менее устойчиво, чем $\breve{x}_{\alpha 0}$, так как не согласовано с уровнем Δ_Σ [6].

Метод псевдоранга [5, табл. 26.2] дает модель, близкую к варианту (3) сингулярного анализа.

В пошаговой и гребневой регрессиях не учитывается погрешность оператора, поэтому неверно оценивается мера неадекватности модели; в гребневой регрессии отсутствует надежный метод определения параметра регуляризации (Левенберга — Марквардта).

Во всех рассмотренных альтернативных методах, как следует из проведенного анализа, отсутствует объективный количественный критерий отбора моделей, согласованных с неопределенностью исходных данных h, δ и $\widehat{\mu}$.

В статье не рассматривается теоретическая метрологическая оценка погрешности предлагаемого регулярного метода по норме $\|\breve{x}_{\alpha 0} - \bar{x}\|$, которая в общем случае достаточно сложно представляется через оценочную функцию и минимум которой при h, $\delta \to 0$ по сравнению с другими методами гарантируется [6, с. 72—88].

Для эффективной численной реализации изложенного метода необходимо теоретически обосновать устойчивую сходимость итерационных схем определения оптимальных значений параметров регуляризации для оценки параметров модели $\breve{\alpha}_0$ и меры несовместности $\widehat{\alpha}_0$.

В соответствии с методом Ньютона из (20) для $j = 1, 2, \ldots$ имеем сходящуюся к точке $\breve{\alpha} = \breve{\alpha}_0$ последовательность

$$\breve{\alpha}_{(j)} = \breve{\alpha}_{(j-1)} - \frac{F\left(\breve{\alpha}_{(j-1)}\right)}{F'_\alpha\left(\breve{\alpha}_{(j-1)}\right)}, \tag{28}$$

так как из (17) и (18) следует, что $F(\alpha) = \omega(\alpha) - [\widehat{\mu} + \delta + h\gamma(\alpha)]$ — монотонно возрастающая функция от α, поскольку $\omega(\alpha)$ — возрастающая, а $\gamma(\alpha)$ — убывающая функции с производной

$$F'_\alpha(\alpha) = \left[\frac{\alpha}{\omega(\alpha)} + \frac{h}{\gamma(\alpha)}\right] \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i^2 \beta_i^2}{\left(S_i^2 + \alpha\right)^3} > 0,$$

и выполняется соотношение

$$\frac{F(\alpha)}{F'_{\alpha}(\alpha)}=\begin{cases}=0 \text{ при } \alpha=\breve{\alpha}_0;\\ <0 \text{ при } \alpha<\breve{\alpha}_0;\\ >0 \text{ при } \alpha>\breve{\alpha}_0.\end{cases} \tag{29}$$

Устойчивую сходимость при произвольном начальном приближении обеспечивают также модифицированный метод Ньютона [6, с. 219] и более простой в применении метод последовательных приближений, основанный на равенстве (9), для которого последовательность ($j=1, 2, \ldots$)

$$\breve{\alpha}_{(j)}=\frac{\breve{\alpha}_{(j-1)}\left[\widehat{\mu}+\delta+h\gamma\left(\breve{\alpha}_{(j-1)}\right)\right]}{\omega\left(\breve{\alpha}_{(j-1)}\right)}=\breve{\alpha}_{(j-1)}\Phi\left(\breve{\alpha}_{(j-1)}\right) \tag{30}$$

будет сходящейся к точке $\breve{\alpha}=\breve{\alpha}_0$, так как функция $\Phi(\alpha)$ монотонно убывает от α и выполняется соотношение

$$\Phi(\alpha)=\begin{cases}=1 \text{ при } \alpha=\breve{\alpha}_0;\\ >1 \text{ при } \alpha<\breve{\alpha}_0;\\ <1 \text{ при } \alpha>\breve{\alpha}_0,\end{cases} \tag{31}$$

а функция $\alpha\Phi(\alpha)$ — монотонно возрастающая от α, что доказывается аналогично [9]. Тогда при $\breve{\alpha}_{(0)}<\breve{\alpha}_0$ выполняется соотношение $\breve{\alpha}_{(0)}<\breve{\alpha}_{(1)}=$ $=\breve{\alpha}_{(0)}\Phi(\breve{\alpha}_{(0)})<\breve{\alpha}_{(0)}=\breve{\alpha}_0\Phi(\breve{\alpha}_0)$, откуда следует сходимость (30) к $\breve{\alpha}_0$ снизу (при $\breve{\alpha}_{(0)}>\breve{\alpha}_0$ — сверху).

Вычисление оптимального значения параметра регуляризации $\widehat{\alpha}_0$ для оценки $\widehat{\mu}$ осуществлялось методом последовательных приближений; из (23) для $j=1, 2, \ldots$ имеем сходящуюся последовательность к точке $\widehat{\alpha}=\widehat{\alpha}_0$:

$$\widehat{\alpha}_{(j)}=\frac{h\omega\left(\widehat{\alpha}_{(j-1)}\right)}{\gamma\left(\widehat{\alpha}_{(j-1)}\right)}=\widehat{\alpha}_{(j-1)}\Psi\left(\widehat{\alpha}_{(j-1)}\right), \tag{32}$$

так как

$$\Psi(\alpha)=\frac{h}{\gamma(\alpha)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i^2}{\left(S_i^2+\alpha\right)^2}+\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=r+1}^{m}\beta_i^2\right]^{1/2}$$

— убывающая функция, поскольку $[\ldots]^{1/2}$ и $\gamma(\alpha)$ — убывающие функции, принимающие равные значения в точке $\widehat{\alpha}_0$. Поэтому выполняется соотношение

$$\Psi(\alpha)=\begin{cases}=1 \text{ при } \alpha=\widehat{\alpha}_0;\\ >1 \text{ при } \alpha<\widehat{\alpha}_0;\\ <1 \text{ при } \alpha>\widehat{\alpha}_0,\end{cases} \tag{33}$$

а функция $\alpha\Psi(\alpha)$, очевидно, монотонно возрастающая. Как показал вычислительный эксперимент, рассмотренные итерационные схемы имеют быструю сходимость при начальном приближении $\breve{\alpha}_{(0)}=\widehat{\alpha}_{(0)}=\alpha_{\max}$ из (25).

В заключение выражаю глубокую признательность В. А. Морозову за постоянное внимание к работе и В. Н. Кармазину за обсуждение и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Некорректные** задачи естествознания/Под ред. А. Н. Тихонова, А. В. Гончарского.— М.: Изд-во МГУ, 1987.
2. **Морозов В. А., Кармазин В. Н., Плахотнюк А. Н.** Об устойчивом восстановлении характеристик распределенной системы, моделируемой уравнением Риккати // Численные методы и автоматизация исследований: Тез. докл. науч.-техн. конф.— Сочи: КГУ, 1988.

3. **Плахотнюк А. Н.** Идентификация характеристик распределений комплексной магнитной проницаемости и электропроводности ферромагнитного изделия // Аппаратные и программные средства магнитных измерений и контроля: Сб. статей.— Омск: Омский политехн. ин-т, 1988.
4. **Плахотнюк А. Н.** Модификация шагового метода синтеза оптимальных регрессионных моделей многопараметровых измерений // Измерение электрических и магнитных параметров: Сб. статей.— Омск: Омский политехн. ин-т, 1986.
5. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов.— М.: Наука, 1986.
6. **Морозов В. А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.— М.: Наука, 1987.
7. **Левин А. М.** О вычислении меры несовместности операторных уравнений I рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1986.— **26**, № 4.
8. **Дрейзин В. Э.** О статистическом подходе к решению многопараметровых метрических задач неразрушающего контроля // Дефектоскопия.— 1981.— № 3.
9. **Полуэктов А. Р.** Метод последовательных приближений выбора параметра регуляризации при численном решении некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1989.— **29**, № 11.

Поступила в редакцию 28 марта 1989 г.