Для проверки применимости формулы (*) в каждой точке, где проводились серии измерений (до 36 измерений подряд), по значениям, полученным методом медиан, брался средний арифметический результат. При его определении сильно отклонившиеся значения исключались. Так, в точке 1 не учитывалось пятое измерение, а в точке 2 — четвертое, седьмое. Затем по каждому измерению, включая не учитываемые при определении среднего, находилось отклонение от среднего и проверялось, укладывается ли оно в определенную автоматически для этого измерения по формуле (*) 95%-ную доверительную границу погрешности. Процент попаданий в 95%-ные доверительные интервалы по различным точкам колебался от 80 до 100 %, составив в среднем 93 %, что показывает допустимость применения формулы (*) для оценки достоверности полученных методом медианы результатов.

В методе попарного сравнения отклонившиеся измерения уверенно отбраковывались по резкому увеличению значения δ_*.

И по результатам полевых испытаний, и по результатам моделирования метод попарного сравнения выглядит несколько предпочтительнее, чем метод медианы, хотя окончательный категорический вывод делать преждевременно: нужны более длительные испытания в полевых условиях, в том числе при больших уровнях помех. Оба упомянутых метода показали себя гораздо более помехоустойчивыми, чем метод накопления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Харкевич А. А.** Борьба с помехами.— М.: Гос. издат. физ.-мат. лит-ры, 1963.
2. **Дрейзин Ю. А.** О применении метода накопления в электромагнитных исследованиях // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1982.— № 2.
3. **Мариненко В. А., Мариненко М. А., Тишин П. И.** Применение алгоритмов нелинейной фильтрации для статистической обработки геоэлектрических сигналов // Автометрия.— 1987.— № 3.
4. **Человечков А. И., Яковлев А. А., Добронравов М. Ю.** Алгоритм цифровой фильтрации сигналов для электроразведки // Электрометрические исследования на рудных месторождениях.— Свердловск: УрО АН СССР, 1988.— Деп. в ВИНИТИ 18.01.88, № 387—888.
5. **Парзен Э.** Перспективы использования функции плотности квантилей для устойчивого оценивания // Устойчивые статистические методы оценки данных.— М.: Машиностроение, 1984.

Поступило в редакцию 28 июня 1989 г.

УДК 621.317

О. Н. СИЗЫХ

(Красноярск)

ОБ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ ВИНЕРА И ХАРДИ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ РЕШЕТКИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В прикладной математике и физике часто встречается проблема восстановления функций из класса Винера W_α (т. е. такой функции $f(t_1, t_2)$ из $L^2[\mathbf{R}^2]$, двумерное преобразование Фурье * которой

$$\widehat{f}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2)\exp(-2\pi i(x_1t_1 + x_2t_2))\,dt_1dt_2$$

обращается в нуль вне некоторого квадрата $|x_j| \leqslant \alpha$, $j = 1, 2$) по ее значениям (отсчетам) в узлах решетки в полярных координатах. Во многих случаях это наиболее естественный способ задания исходных данных.

Для равномерной решетки в полярной системе координат известная теорема Котельникова неверна [4]. Это подтверждает и такой простой пример. Пусть

$$F(x_1, x_2) = \widehat{\varphi}(x_1, x_2)\prod_{n=1}^{s}\left(x_1 - x_2 \operatorname{tg}\frac{2\pi n}{s}\right),$$

где $\widehat{\varphi}(x_1, x_2)$ — преобразование Фурье финитной функции φ с носителем $\{x : |x_j| \leqslant \alpha, j = 1, 2\}$, имеющей абсолютно интегрируемые в $\mathbf{R}^2$ частные производные $(s + 2)$-го

---

* Именно такой вид преобразования Фурье используют стандартные программы для ЭВМ [1—3].

порядка. В таком случае $\widehat{\varphi}(x_1, x_2)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-s/2}$ [5, с. 226]. Этот факт следует из известного свойства преобразования Фурье [6] как обобщение этого свойства на двумерный случай. Тогда $F(x_1, x_2)$ принадлежит классу W_α, обращается в нуль на лучах вида $x_1=x_2 \operatorname{tg} \frac{2\pi n}{s}$, $n = 1, \ldots, s$, но не равна нулю тождественно.

Пусть $D_\sigma = \{z : \operatorname{Im} z_j > -\sigma,\ \sigma > 0,\ j = 1,\ 2\} \subset \mathbf{C}^2$ — произведение полуплоскостей. Голоморфная функция f принадлежит классу Харди $H^2(D_\sigma)$, если

$$\int\limits_{R_2} |f(x+iy)|^2\, dx \leqslant C,$$

где $x = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$; $dx = dx_1 \wedge dx_2$; $-\sigma < y_j < \infty$, $j = 1, 2$. Заметим, что существует связь между классами Винера и Харди. Во-первых, если $f(t_1, t_2) \in W_\alpha$, то $f(t_1, t_2)\exp(-2\pi i\alpha(t_1+t_2)) \in H^2(D_\sigma)$. Во-вторых, преобразование Фурье финитной функции с носителем в положительном октанте (это есть функция из W_α) входит также в класс H^2.

Рассмотрим задачу экстраполяции функции из $H^2(D_\sigma)$ для случая неравномерной решетки в полярных координатах.

Пусть на действительном подпространстве $\mathbf{R}^2(x_1, x_2) \subset D_\sigma$ заданы последовательность прямых $l_1, l_2, \ldots$, проходящих через нуль с углами наклона $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ к оси OX_1, и последовательность прямых $m_1, m_2, \ldots$, проходящих через точки $(x_{11}, 0)$, $(x_{12}, 0), \ldots$ параллельно оси OX_2. Точки пересечения указанных прямых образуют множество единственности для функций из класса $H^2(D_\sigma)$, если [7, с. 150; 8]

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{x_{1k}^2} = \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(\operatorname{tg}\alpha_n)^2} = \infty. \tag{1}$$

Здесь штрих означает, что из суммы выброшены слагаемые, знаменатель которых равен нулю. Требуется восстановить функцию f из $H^2(D_\sigma)$ по этому множеству единственности.

Для решения задачи восстановим сначала функцию f на каждой прямой m_k, $k = 1, 2, \ldots$, по множеству точек пересечения m_k с прямыми l_n, $n = 1, 2, \ldots$, затем на любой прямой, параллельной оси OX_1 и проходящей через точку (O, x_2), по множеству точек пересечения этой прямой с прямыми m_k, $k = 1, 2, \ldots$. Из (1) следует, что оба этих множества являются множествами единственности для функций класса $H^2(D_\sigma)$. При этом можно дважды воспользоваться одномерным вариантом экстраполяционной формулы из [9], так как $f \in H^2$ в сечениях, параллельных осям. Этот факт утверждается в [10, лемма 5], но поскольку там допущена опечатка, то приведем исправленный вариант леммы.

Пусть I_p — упорядоченный по возрастанию набор p различных чисел из $(1, 2, \ldots, n)$, $z(I_p)$ — вектор, у которого координата с номером i_l есть z_{i_l}, $l = 1, \ldots, p$, а остальные координаты ζ_j, $j \in (1, \ldots, n)$, $j \notin I_p$.

Лемма. Если $D_{\sigma+h} = \{z : \operatorname{Im} z_j > -\sigma - h,\ j = 1, \ldots, n,\ h > 0\}$, $f \in H^2(D_{\sigma+h})$ и I_p фиксирован (здесь $1 \leqslant p \leqslant n-1$), то для всех $\zeta_j \in D_\sigma$, $j \in (1, \ldots, n)$, $j \notin I_p$, функция $f(z(I_p))$ входит по $z \in D_{\sigma+h}$ в аналогичный класс, а ее норма там не превосходит $\frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\, \|f\|_{H^2(D_{\sigma+h})}$.

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай, когда $n = 2$ и $f \in H^2$ в произведении верхних полуплоскостей D_0. Докажем, что тогда для любой фиксированной прямой $x_2 = x_2^0 + ih$ функция $f\left(x_1, x_2^0 + ih\right) \in H^2_{x_1}$.

Если $g(t_1, t_2)$ — преобразование Фурье для $f(x_1, x_2)$, $G(t_1, x_2)$ — обратное преобразование Фурье для $g(t_1, t_2)$ по переменной t_2, то

$$f(x_1, x_2) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty g(t_1, t_2) \exp(2\pi i(x_1t_1 + x_2t_2))\, dt_1\, dt_2 = \int\limits_0^\infty G(t_1, x_2) \exp(2\pi i x_1 t_1)\, dt_1.$$

Здесь мы воспользовались известным свойством функций из H^2: преобразование Фурье каждой из них обращается в нуль на отрицательной части действительного подпространства [7, гл. VI].

Затем, используя неравенство Коши — Буняковского и теорему Планшереля, запишем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f\left(x_1, x_2^0 + ih\right)\right|^2 dx_1 = \int\limits_0^\infty \left|G\left(t_1, x_2^0 + ih\right)\right|^2 dt_1 =$$

$$= \int^{\infty} \left| \int^{\infty} g(t_1, t_2) \exp\left(2\pi i \left(x_2^0 + ih\right) t_2\right) dt_2 \right|^2 dt_1 \leqslant$$

Поскольку очевидно, что класс Харди инвариантен относительно сдвигов вдоль мнимых осей, то лемма доказана и для области D_σ, $\sigma > 0$.

Итак, для любой точки $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ получаем

$$f(x_1, x_2) = \lim_{m\to\infty} \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} f(x_{1k}, x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_n) \varphi_{n,s}(x_{1k}, x_2) \psi_{k,m}(x_1), \tag{2}$$

где

$$\varphi_{n,s}(x_{1k}, x_2) = \frac{2i\sigma}{x_2 - x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_n + 2i\sigma} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{s} \frac{(x_2 - x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_j)(x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_n - x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_j + 2i\sigma)}{(x_2 - x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_j + 2i\sigma)(x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_n - x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_j)};$$

$$\psi_{k,m}(x_1) = \frac{2i\sigma}{x_1 - x_{1k} + 2i\sigma} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \frac{(x_1 - x_{1j})(x_{1k} - x_{1j} + 2i\sigma)}{(x_1 - x_{1j} + 2i\sigma)(x_{1k} - x_{1j})}.$$

Оценим $R_{s,m}(x_1, x_2)$ — остаточный член в формуле (2), т. е. разность между $f(x_1, x_2)$ и суммой в правой части при фиксированных s и m в $K = \{(x_1, x_2) : |x_j| \leqslant a,\ a > 0,\ j = 1, 2\}$. Для этого перепишем (2):

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{s} f(x_{1k}, x_{1k} \operatorname{tg} \alpha_n) \varphi_{n,s}(x_{1k}, x_2) \psi_{k,m}(x_1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} u_s(x_{1k}, x_2) \psi_{k,m}(x_1) + v_m(x_1, x_2),$$

где $u_s(x_{1k}, x_2)$ и $v_m(x_1, x_2)$ — остаточные члены, как в одномерной экстраполяционной формуле из [9]. Ее можно применить к выражению

$$\sum_{k=1}^{m} u_s(x_{1k}, x_2) \psi_{k,m},$$

так как $u_s \in H^2$ по переменной x_1, т. е.

$$\sum_{k=1}^{m} u_s(x_{1k}, x_2) \psi_{s,m}(x_1) = u_s(x_1, x_2) - u^1_{s,m}(x_1, x_2),$$

где $u^1_{s,m}(x_1, x_2)$ — также остаточный член.

Таким образом,

$$R_{s,m}(x_1, x_2) = u_s(x_1, x_2) - u^1_{s,m}(x_1, x_2) + v_m(x_1, x_2). \tag{3}$$

Для $u_s(x_1, x_2)$ фиксировано x_1, для $u^1_{s,m}$ и v_m фиксировано x_2.

Каждая из этих трех величин — одномерный остаточный член в формуле типа экстраполяционной формулы из [9], следовательно, они оцениваются в области $D_{\sigma+h}$, $0 < h < \sigma$, с помощью теоремы 3 из [9, 10]. Воспользуемся ею и обозначим

$$S_1^{x_1}(A_1) = \int_{|x_2| \geqslant A_1} |f(x_1, x_2)|^2 \, dx_2;$$

$$P_1^{x_1}(A_1) = \max_{\substack{j=1,\dots,s \\ |x_2| \leqslant A_1 \\ \operatorname{Im} z_2 = -\sigma - h}} \frac{|z_2 - x_1 \operatorname{tg} \alpha_j + 2i\sigma|}{|z_2 - x_1 \operatorname{tg} \alpha_j|} < 1.$$

Чтобы избежать зависимости от параметра x_1, возьмем $\max\limits_{x_1\in K} S_1^{x_1}(A_1) = S_1(A_1)$, $\max\limits_{x_1\in K} P_1^{x_1}(A_1) = P_1(A_1)$. Первый максимум существует, так как по лемме $f(x_1, x_2) \in H^2$ по x_2, и все эти интегралы равномерно ограничены по x_1.

Пусть далее $A_1 = S_1^{-1}(\varepsilon^2/2)$, $\varepsilon > 0$, $\mathbf{R}^2(\sigma + h) = \{z : \operatorname{Im} z_j = -\sigma - h,\ j = 1, 2\}$. Тогда по теореме 3 из [9, 10]: если

$$s > \frac{\ln 2 - 2 \ln \varepsilon + 2 \ln \dfrac{1}{2\sqrt{\pi h}} \| f \|_{L^2(\mathbf{R}^2(\sigma+h))}}{-2 \ln P_1(A_1)}, \tag{4}$$

то $\| u_s(x_1, x_2) \|_{x_2} \leqslant 2\varepsilon$ для любого $x_1 \in K$.

Остаток $v_m(x_1, x_2)$ оценивается аналогично. Обозначим

$$S_2^{x_2}(A_2) = \int\limits_{|x_1| \geqslant A_2} | f(x_1, x_2) |^2 \, dx_1;$$

$$P_2(A_2) = \max_{\substack{j=1,\ldots,m \\ |x_1| \leqslant A_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = -\sigma - h}} \frac{| z_1 - x_{1j} + 2i\sigma |}{| z_1 - x_{1j} |}.$$

Возьмем $\max\limits_{x_2 \in K} S_2^{x_2}(A_2) = S_2(A_2)$. Заметим, что в общем случае задание узлов в полярных координатах $P_2(A_2)$ зависит и от x_2.

Пусть $A_2 = S_2^{-1}(\varepsilon^2/2)$. Тогда если

$$m > \frac{\ln 2 - 2 \ln \varepsilon + 2 \ln \dfrac{1}{2\sqrt{\pi h}} \| f \|_{L^2(\mathbf{R}^2(\sigma+h))}}{-2 \ln P_2(A_2)}, \tag{5}$$

то $\| v_m(x_1, x_2) \|_{x_1} \leqslant 2\varepsilon$ для любого $x_2 \in K$.

В отличие от предыдущих остаток $u_{s,m}^1$ зависит не прямо от функции f, а от $u_s(x_1, x_2)$. Запишем

$$S_3^{x_2}(A_3, s) = \int\limits_{|x_1| \geqslant A_3} | u_s(x_1, x_2) |^2 \, dx_1 \leqslant (s+1) \Bigg(\int\limits_{|x_1| \geqslant A_3} | f(x_1, x_2) |^2 \, dx_1 + \\ + \sum_{n=1}^{s} \int\limits_{|x_1| \geqslant A_3} | f(x_1, x_1 \operatorname{tg} \alpha_n) |^2 \, | \varphi_{n,s} |^2 \, dx_1 \Bigg). \tag{6}$$

Последнее неравенство следует из формулы, аналогичной экстраполяционной формуле из [9], восстанавливающей функцию на прямой, проходящей через точку (x_1, O) параллельно оси OX_2.

Оценим сверху $|\varphi_{n,s}(x_1, x_2)|^2$ при $x_2 \in K$, $|x_1| \geqslant A_3$:

$$| \varphi_{n,s}(x_1, x_2) |^2 \leqslant M_{n,s}(A_3) = \frac{4\sigma^2}{\min\limits_{x_2 \in K} (x_2 - A_3 \operatorname{tg} \alpha_n)^2 + 4\sigma^2} \times \\ \times \left[\frac{\max\limits_{\substack{j=1,\ldots,s \\ j \neq n \\ x_2 \in K}} (x_2 - A_3 \operatorname{tg} \alpha_j)^2 \left(A_3^2 \max\limits_{\substack{j=1,\ldots,s \\ j \neq n}} (\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_j)^2 + 4\sigma^2 \right)}{\left(\min\limits_{\substack{j=1,\ldots,s \\ j \neq n \\ x_2 \in K}} (x_2 - A_3 \operatorname{tg} \alpha_j)^2 + 4\sigma^2 \right) A_3^2 \min\limits_{\substack{j=1,\ldots,s \\ j \neq n}} (\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_j)^2} \right]^{s-1}.$$

Тогда правая часть (6) не превосходит

$$(s+1) \Bigg(\int\limits_{|x_1| \geqslant A_3} | f(x_1, x_2) |^2 \, dx_1 + \sum_{n=1}^{s} M_{n,s}(A_3) \int\limits_{|x_1| \geqslant A_3} | f(x_1, x_1 \operatorname{tg} \alpha_n) |^2 \, dx_1 \Bigg).$$

Для этого выражения найдем максимум по $x_2 \in K$ (он существует, так как по лемме подынтегральные функции из класса H^2 по x_1 и интегралы равномерно ограничены по x_2). Получим величину $S_3(A_3, s)$.

Пусть $A_3 = S_3^{-1}(\varepsilon^2/2, s)$. Здесь s уже определено с помощью (4). Тогда по теореме 3 из [9, 10]: если

$$m > \frac{\ln 2 - 2 \ln \varepsilon + 2 \ln \left[\dfrac{s+1}{2\sqrt{\pi h}} \| f \|_{L^2(\mathbf{R}^2(\sigma+h))} \left(1 + \sum\limits_{n=1}^{s} M_{n,s}(A_3) \right) \right]}{-2 \ln P_2(A_3)}, \tag{7}$$

то $\| u_{s,m}^1 \|_{x_1} \leqslant 2\varepsilon$ для любого $x_2 \in K$.

Теперь, если выбрать m больше максимума правых частей (7) и (5), а s такое, как в (4), то из (3) будет следовать:

$$\|R_{s,m}\|_{H^2(D_{\sigma+h})} < 6\varepsilon \text{ в } K.$$

Итак, проведено восстановление функции из класса Харди H^2. Если же $f(t_1, t_2) \in W_\alpha$, то функция $f(t_1, t_2) \exp(-2\pi i(t_1 + t_2)) \in H_2$ восстанавливается изложенным методом.

Полученную оценку остаточного члена можно использовать для сравнения возможностей восстановления функции по различным решеткам. Например, пусть первая решетка состоит из точек вида $(1/k, 1/n)$, $k, n = 1, 2, \ldots$. Точки второй решетки расположены реже: $(1/2s, 1/2m)$, $s, m = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что узлы обеих решеток удовлетворяют условию (1). Из формул (4), (5) и (7) видно, что необходимая точность достигается быстрее в первом случае, т. е. когда узлы решетки располагаются чаще.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность проф. Л. А. Айзенбергу за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзенберг Л. А.** Аналог теоремы Котельникова для неравномерных отсчетов. Экстраполяция и интерполяция амплитуды спектра Фурье финитных сигналов // ДАН СССР.— 1988.— **300**, № 2.
2. **Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А.** Вычислительный эксперимент по аналитическому продолжению спектра Фурье одномерных финитных сигналов. Сверхразрешение // Автометрия.— 1989.— № 1.
3. **Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А., Шаимкулов Б. А.** Об интерполяции сигналов с финитным спектром Фурье. Вычислительный эксперимент // Автометрия.— 1989.— № 4.
4. **Трофимов О. Е.** О теореме Котельникова в полярных координатах // Автометрия.— 1985.— № 5.
5. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1969.— Т. III.
6. **Колмогоров А. М., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.
7. **Кусис П.** Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне.— М.: Мир, 1984.
8. **Айзенберг Л. А.** Множества единственности для классов Винера. Аналог теоремы Котельникова для неравномерных отсчетов. Обращение преобразования Радона по неполным данным.— Красноярск.— 1987.— (Препр./ИФ СО АН СССР; 38М).
9. **Айзенберг Л. А.** Экстраполяция функций, голоморфных в произведении полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра // ДАН СССР.— 1986.— **290**, № 2.
10. **Айзенберг Л. А.** Экстраполяция функций, голоморфных в произведении полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра // СМЖ.— 1988.— **29**, № 4.

Поступило в редакцию 14 сентября 1989 г.

УДК 535.345

Ю. В. ТРОИЦКИЙ

(Новосибирск)

ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ПРИ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА ОТ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗЕРКАЛ

Потери в диэлектрических многослойных покрытиях могут иметь различную физическую природу и локализацию. Естественно, что от конкретного вида потерь зависит их влияние на важные свойства многослойной системы, например на спектральные, угловые и поляризационные характеристики, на лучевую прочность и т. д. В [1] сравниваются два вида поглощения: в объеме диэлектриков и поверхностное, сосредоточенное на границах слоев («пограничное»). Расчеты для трех типов многослойных покрытий — зеркала из равнотолщинных слоев, фильтра Фабри — Перо и просветляющего покрытия — показали, что оба указанных вида потерь дают очень похожие спектральные характеристики. Два из рассмотренных объектов исследованы в сравнительно узком диапазоне частот, а третий — просветляющее покрытие — в широком, однако анализ последнего не обнаружил резких спектральных особенностей и вследствие этого его следует считать малоинформативным. Поэтому возникает необходимость в исследовании широкополосной системы с более «выразительной» характеристикой, сильно зависящей от поглощения. Такой системой может быть,