данные помещаются в файл на винчестере, что дает возможность их последующей обработки при помощи любых статистических критериев и методов. Описанная организация комплекса позволяет оптимальным образом сочетать осмысленный эксперимент по накоплению данных в режиме реального времени с последующей тщательной обработкой результатов.

Подводя итоги, можно сказать, что создан аппаратно-программный спецпроцессор статистической обработки сигналов, имеющий высокую производительность (работа в режиме реального времени при частотах до 75 МГц) и позволяющий накапливать и анализировать весьма большую выборку объемом более 10^{12} событий.

Спецпроцессор в составе комплекса успешно прошел испытания и находится в опытной эксплуатации. Весь спецпроцессор питается напряжениями -2, $-4{,}5$ и $+5$ В, потребляет мощность порядка 200 Вт и требует воздушного охлаждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Касперович А. Н., Шалагинов Ю. В.** Двухканальный регистратор широкополосных сигналов // Автометрия.— 1990.— № 6.
2. **Вьюхин В. Н., Танн Ю. Л.** Адаптер шины PC/AT - VME // Автометрия.— 1990.— № 6.
3. **Turbo** Pascal: Reference Guide. V 5.0.— Borland International, 1988.

Поступила в редакцию 7 февраля 1990 г.

УДК 621.391 : 53.08

Б. А. КРАВЦОВ, Р. Ф. МИНЕНКОВА

(Красноярск)

О РЕСТАВРАЦИИ СИГНАЛОВ И СВЕРХРАЗРЕШЕНИИ

Введение. Работа посвящена реставрации сигнала — классической проблеме, поставленной Рэлеем свыше ста лет назад. Повышенный интерес к ней сегодня объясняется, по-видимому, внедрением ряда новых перспективных теоретических методов [1—4].

Измеряемый сигнал взаимодействует с физическим прибором (без такого взаимодействия измерение вообще невозможно) и как следствие искажается. Задача состоит в восстановлении исходного сигнала на входе прибора по искаженному выходному сигналу и характеристикам прибора.

Дается постановка проблемы реставрации в частном случае линейного прибора. Обсуждаются прикладные аспекты формулы аналитического продолжения, предложенной Л. А. Айзенбергом, и показывается конструктивность этого подхода к проблеме реставрации. Основные идеи продемонстрированы в вычислительном эксперименте.

Основные теоретические положения. Обозначим через $x(t)$ входной сигнал, измеряемый прибором, а через $y(t)$ выходной сигнал или отклик, фиксируемый экспериментатором. Для простоты и определенности рассматриваются действительные одномерные сигналы, зависящие от времени.

Введем $h(t, \tau)$ — отклик прибора на единичный импульс, поданный на вход в момент времени τ. Функция $h(t, \tau)$ исчерпывающе характеризует поведение линейного прибора и в зависимости от предметной области именуется по-разному: в е с о в а я   ф у н к ц и я, аппаратная функция,

функция рассеяния точки и т. д.

По определению,

$$h(t, \tau) = L[\delta(t - \tau)],$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция. Представим входной сигнал как сумму смещенных единичных импульсов $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t - \tau)\,d\tau$. Тогда, по принципу суперпозиции, на выходе прибора имеем

$$L[x(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,L[\delta(t - \tau)]\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)\,x(\tau)\,d\tau = y(t). \qquad (1)$$

Полученное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром $h(t, \tau)$ представляет общее соотношение, связывающее воедино входной сигнал, выходной сигнал и весовую функцию $h(t, \tau)$. Логично предположить, что величина отклика прибора зависит лишь от промежутка времени, прошедшего с момента подачи импульса (условие однородности), т. е. $h(t, \tau) = h(t - \tau)$. С учетом этого допущения уравнение (1) сводится к основному уравнению линейного однородного прибора — уравнению типа свертки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)\,x(\tau)\,d\tau = h(t) * x(t) = y(t). \qquad (1а)$$

Так как фурье-образ свертки двух функций равен произведению их фурье-образов, из (1а) следует:

$$H(f)\,X(f) = Y(f), \qquad (2)$$

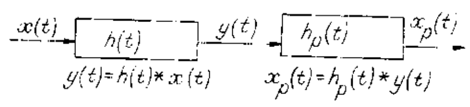
откуда получаем решение основного уравнения

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(f)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(f)}{H(f)} \exp(i2\pi f t)\,df \qquad (3)$$

при $H(f) \neq 0$.

По формуле (2) можно вычислить спектр входного сигнала только внутри полосы пропускания прибора. Однако в случае удачной экстраполяции как бы увеличивается частота среза прибора и пропорционально улучшается его разрешение. В этом состоит идея сверхразрешения.

К сожалению, решение задачи реставрации по формуле (3) на практике усложняется обычной зашумленностью выходного сигнала $y(t)$. Представим процесс реставрации, как преобразование в другой линейной системе, последовательно соединенной с исходной:



Здесь $x_р(t)$ и $h_р(t)$ — соответственно выходной сигнал и весовая функция системы реставрации. Поскольку $x_р(t) = [h_р(t) * h(t)] * x(t)$ и при полном восстановлении $x_р(t) = x(t)$, имеем $h_р(t) * h(t) = \delta(t)$ и $H_р(f) = 1/H(f)$. Коэффициент усиления исходной системы $|H(f)|$ убывает с ростом частоты, поэтому система реставрации компенсирует это соответственным увеличением $|H_р(f)|$. Таким образом, если на выходной сигнал $y(t)$ накладывается высокочастотная помеха, она заметно усиливается при реставрации. Очевидный способ борьбы с таким явлением состоит в корректировке $|H_р(f)|$ на высоких частотах. Коэффициент усиления здесь можно плавно уменьшать до нуля или просто занулить начиная с определенной частоты среза $f_с$.

Запишем

$$H_p(f) = \frac{1}{H(f)} W(f),$$

где $W(f)$ — корректирующий множитель. Разные методы, основанные на фильтрации высокочастотных помех, отличаются конкретным выбором $W(f)$ при единой схеме реставрации:

$$x_p(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_p(f)\, Y(f)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{Y(f)}{H(f)} W(f)\right]. \qquad (4)$$

А. $W(f) = 1$ — инверсная фильтрация. Метод сверхчувствителен к шуму при высокой эффективности обработки сигнала и применяется, когда отсутствует ограничение по полосе частот.

Б. $W(f) = \mathrm{rect}(f/f_c)$ — инверсная фильтрация с ограничением полосы частот; f_c — частота среза. По данной методике осуществляется простейший способ борьбы с шумами, приводящий к паразитным осцилляциям реставрированного сигнала $x_p(t)$ вследствие явления Гиббса [5, 6].

В. $W(f) = |H(f)|^2/(|H(f)|^2 + \alpha f^{2r})$ — метод регуляризации Тихонова; α — параметр регуляризации; r — натуральное. В отличие от предыдущего метод Тихонова обеспечивает плавный спад $|H_p(f)|$ с ростом частоты: параметры α и r определяют при этом эффективную полосу частот. Паразитные осцилляции выражены слабо.

Общий недостаток всех методов фильтрации обусловлен сокращением эффективной полосы частот, при этом возникает известный компромисс между зашумленностью и разрешением сигнала. Как следствие только высокочастотный шум, когда сокращение полосы частот не превышает разумных пределов, составляет сферу применимости указанных методов. Высокочастотный шум порождается, в частности, при оцифровке сигналов в аналого-цифровых преобразователях систем автоматизации и при компьютерной обработке, т. е. связан с квантованием (округлением) сигнала в соответствии с разрядностью цифровых устройств.

Кроме шумов квантования, возникающих в самой установке, возможно и проникновение шумов извне в виде помехи определенного частотного диапазона. В этом случае можно воспользоваться идеями сверхразрешения: правильная экстраполяция спектра сигнала с незашумленного участка на частотный диапазон, занимаемый помехой, полностью устраняет помеху, нисколько не поступившись разрешением. Не играет роли и соотношение сигнал/шум.

К сожалению, данный подход неприменим в наиболее распространенном случае — шумах квантования. Хотя, как отмечалось, такой шум проявляется в основном на высоких частотах, но в определенной степени искажаются и все остальные.

Недавно Л. А. Айзенбергом была получена простая формула аналитического продолжения для определенного класса функций, аналитических в произведении полуплоскостей или полос [7, 8]. В частности, эта формула применима и для экстраполяции спектра Фурье финитного сигнала, заданного на отрезке положительного луча. Если значение спектра f известно на отдельных частотах $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то его можно оценить на любой частоте по формуле Айзенберга:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \frac{-2i\sigma}{x - x_k - 2i\sigma} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \frac{(x - x_j)(x_k - x_j - 2i\sigma)}{(x - x_j - 2i\sigma)(x_k - x_j)}, \qquad (5)$$

$\sigma > 0$ — параметр, i — мнимая единица.

Полученные ниже следствия могут быть полезными при практическом использовании формулы Айзенберга [9].

1. Пусть значения спектра известны на первых m частотах $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_{m-1}$, взятых с постоянным шагом Δ, т. е. $x_k = k\Delta$, $k = 0, 1, \ldots, m -$

— 1. Этот случай наиболее распространен на практике. Тогда

$$f_b(l\Delta) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(l)} f(k\Delta), \quad l = 0, 1, \ldots; \tag{5а}$$

$$c_k^{(l)} = \frac{\rho}{k - l + \rho} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m-1} \frac{j(j-k-l) + kl + \rho(j-l)}{j(j-k-l) + kl + \rho(j-k)}, \quad \rho = \frac{2i\sigma}{\Delta}.$$

Здесь $f_b(l\Delta)$ — вычисленное значение спектра на частоте $l\Delta$, которое несколько отличается от точного значения $f(l\Delta)$ вследствие конечности m. При $l = 0, 1, \ldots, m-1$ получаем заданные значения f, затем при $l = m, m+1, \ldots$ имеет место экстраполяция на один, два и т. д. отсчетов.

2. Чтобы не пересчитывать коэффициенты c_k для каждого следующего отсчета, можно использовать предварительно вычисленные значения спектра. При этом диапазон правильной экстраполяции незначительно сокращается, зато резко возрастает скорость вычислений.

Полагая в (5а) $l = m$,

$$f_b(m\Delta) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(m)} f(k\Delta); \tag{5б}$$

$$c_k^{(m)} = \frac{\rho}{k - m + \rho} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m-1} \frac{j(j-k-m) + km + \rho(j-m)}{j(j-k-m) + km + \rho(j-k)}$$

и с учетом инвариантности к сдвигу

$$f_b(n\Delta + m\Delta) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(m)} f_b(n\Delta + k\Delta),$$

(5б) можно представить в виде линейного разностного уравнения m-го порядка:

$$\begin{gathered} f_b(n\Delta + m\Delta) - a_1 f_b[n\Delta + (m-1)\Delta] - \ldots - a_m f_b(n\Delta) = 0; \\ a_{m-k} \equiv c_k^{(m)}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{gathered} \tag{6}$$

с начальными условиями $f_b(0) = f(x_0)$, $f_b(\Delta) = f(x_1)$, $\ldots$, $f_b[(m-1)\Delta] = f(x_{m-1})$. Теперь экстраполяция сводится к численному решению (6) для $n = 0, 1, \ldots$. При этом обычно пользуются рекурсией, но можно выписать решение в аналитическом виде.

Решение (6) ищем в форме $f_b(n\Delta) = z^n$, где z — комплексная постоянная, отличная от нуля. Последующая подстановка приводит к характеристическому уравнению

$$z^m - a_1 z^{m-1} - \ldots - a_m = 0,$$

и в случае простых корней $z_1, z_2, \ldots, z_m$ общее решение (6) принимает вид

$$f(n\Delta) = b_1 z_1^n + b_2 z_2^n + \ldots + b_m z_m^n,$$

где коэффициенты b_i определяются из начальных условий. Для устойчивости решения, очевидно, необходимо $|z_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В свою очередь, это налагает условие при выборе параметров экстраполяции m и ρ, от которых зависят коэффициенты разностного уравнения. Для нахождения b_i запишем

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= b_1 + b_2 + \ldots + b_m; \\ f(x_1) &= b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_m z_m; \\ &\vdots \\ f(x_{m-1}) &= b_1 z_1^{m-1} + b_2 z_2^{m-1} + \ldots + b_m z_m^{m-1}. \end{aligned}\right\}$$

Определитель Вандермонда полученной системы уравнений допускает эффективное вычисление

$$\det = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant m} (z_i - z_j),$$

и, следовательно, при близости корней система плохо обусловлена.

3. Любые последовательные m отсчетов точной функции $f(l\Delta)$ хорошо согласуются с (6), а вычисленные по (5а) последовательные отсчеты $f_b(l\Delta)$ согласуются с (6) в случае корректной экстраполяции. Поэтому для контроля вычислений целесообразно ввести функцию ошибки

$$\mathrm{err}\,(l\Delta) = \left| f_b(l\Delta) - \sum_{k=1}^{m} a_k f_b(l\Delta - k\Delta) \right|, \quad l = m, m+1, \ldots, \tag{7}$$

малость которой дает необходимое условие применимости (5а). Параметры экстраполяции m и ρ подбираются таким образом, чтобы (7) оставалось малой при возможно больших l.

В [6] работоспособность (7) подтверждается конкретным примером.

4. Для изучения линейных формул численного анализа удобен частотный подход, предложенный Хеммингом [5, 6]. Следуя ему, представим (6) в форме нерекурсивного фильтра:

$$u(n\Delta) = f(n\Delta) - \sum_{k=1}^{m} a_k f(n\Delta - k\Delta), \quad n = m, m+1, \ldots. \tag{8}$$

Теперь процесс экстраполяции можно трактовать как прохождение последовательности отсчетов функции f через цифровой фильтр. Найдем передаточную функцию этого фильтра (не путать с передаточной функцией прибора), для чего на его вход подадим одиночную гармонику $f_s(n\Delta) = \exp(i2\pi\nu n\Delta)$. На выходе имеем

$$u(n\Delta) = \sum_{k=1}^{m} a_k \exp[i2\pi\nu(n\Delta - k\Delta)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k \exp[-i2\pi\nu k\Delta] \exp[i2\pi\nu n\Delta],$$

и, таким образом, амплитуда гармоники частоты ν изменяется в $H(\nu) = \sum_{k=1}^{m} a_k \exp(-i2\pi\nu k\Delta)$ раз. Передаточная функция $H(\nu)$ описывает изменение спектра экстраполируемой функции в процессе экстраполяции.

По аналогии выпишем передаточную функцию алгоритма экстраполяции (5а)

$$H(\nu) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(l)} \exp(i2\pi\nu k\Delta).$$

Экспериментально показано, что с возрастанием l (при постоянных m и ρ) диапазон частот, передаваемых без искажений, сужается. Кроме того, из вида $H(\nu)|_{\nu=0}$ следует

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(l)} = 1.$$

Вычислительный эксперимент. В ходе вычислительного эксперимента моделировалось прохождение входного сигнала в виде двух прямоугольных импульсов

$$x(t) = \begin{cases} 8, & t \in a; \\ 0, & t \notin a; \end{cases} \quad a\colon\ [7;\ 7{,}5) \cup [8{,}5;\ 9)$$

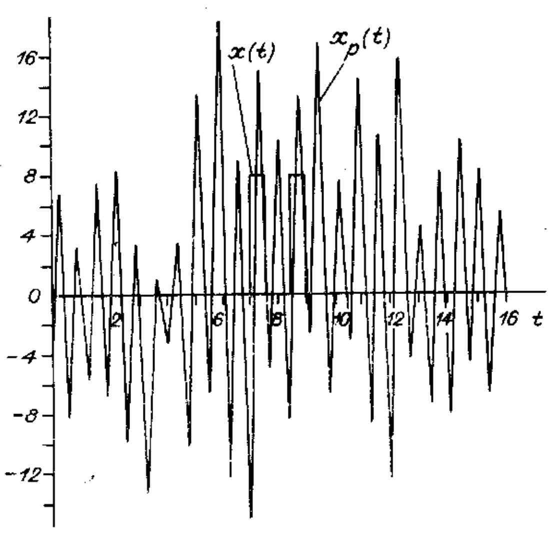


Рис. 1. Реставрация методом инверсной фильтрации при квантовании выходного сигнала $y(t)$

через прибор с гауссовой весовой функцией

$$h(t-\tau)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\times$$

$$\times\left[-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right]$$

при $\tau=8$, $\sigma=3$. Дискретизация функций производилась на интервале $t\in[0,16]$ с шагом $\Delta t=0{,}125$ с. Шум квантования порождался округлением выходного сигнала $y(t)$ до второго знака после запятой.

Неприменимость реставрации по методу инверсной фильтрации при зашумленном $y(t)$ иллюстрирует рис. 1.

Инверсная фильтрация с ограничением полосы частот приведена на рис. 2, *а*. Частота среза равна 0,875 Гц. На рис. 2, *б* показан для сравнения истинный спектр $X(f)$ и $X_p(f)$, рассчитанный по схеме (4). Видно, что шумы квантования практически не затрагивают низкие частоты.

Лучшие результаты дала реставрация по методу Тихонова; параметры $\alpha=10^{-5}$, $r=1$ (рис. 3). Минимальная невязка в этом случае обусловлена в первую очередь меньшим размахом боковых лепестков.

Кроме шумов квантования, изучалось действие внешней помехи в виде паразитной осцилляции $n(t)=A(\sin 2\pi f_1+\sin 2\pi f_2)$, $A=5\cdot 10^{-3}$, $f_1=0{,}3125$, $f_2=0{,}3750$ Гц, накладываемой на выходной сигнал $y(t)$. Методы фильтрации в этом случае оказываются неэффективными, так как зашумлена низкочастотная область спектра. Отфильтровав методом Тихонова только верхнюю частоту f_2, мы необратимо проиграли в разрешении рис. 4.

Реставрация, основанная на аналитическом продолжении спектра, показана на рис. 5. Применялась формула (5а) с параметрами $m=21$, $|\rho|=34{,}5$, отсчеты брались с шагом $\Delta=0{,}0125$ Гц. $X(f)$ экстраполиро-

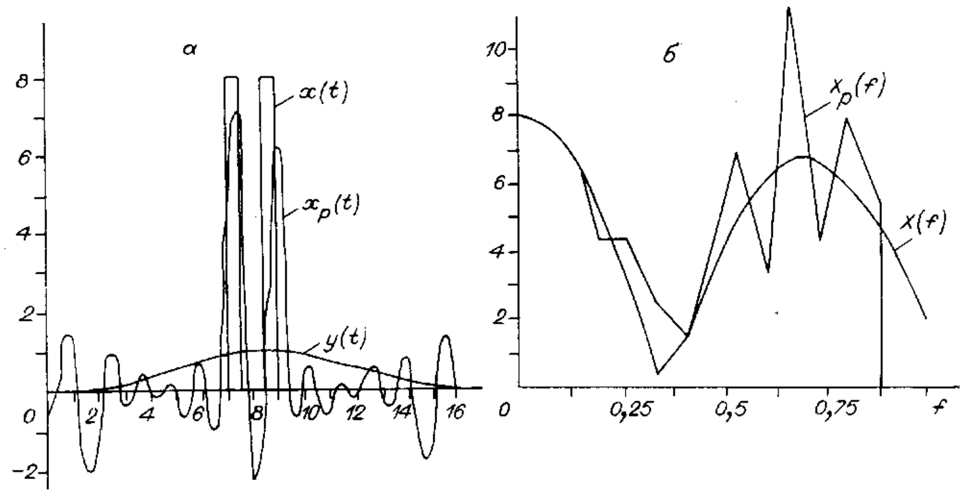
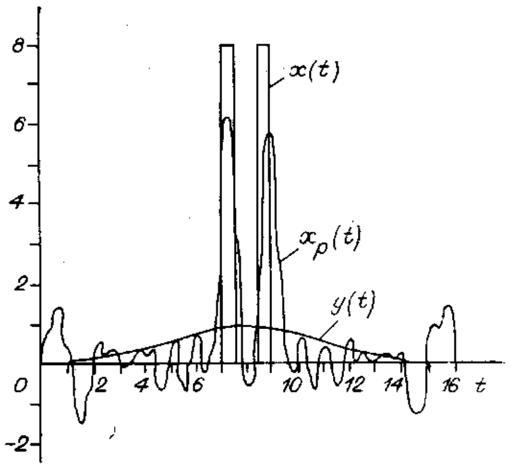


Рис. 2. Реставрация методом инверсной фильтрации с ограничением полосы частот при квантовании выходного сигнала $y(t)$:

результаты реставрации во временной (*а*) и в частотной (*б*) областях

Рис. 3. Реставрация методом Тихонова при квантовании выходного сигнала $y(t)$



вался с незашумленного участка [0; 0,25] Гц до значения $f_2 = 0{,}375$ Гц, что можно трактовать и как расширение полосы пропускания прибора в 1,5 раза. При этом для вычисления спектров не использовались стандартные процедуры быстрого преобразования Фурье. Во-первых, точность БПФ обычно оказывается недостаточной (получаемая функция выходит за границы нужного класса) и, во-вторых, желательно знать спектр Фурье на заданном интервале с произвольным шагом Δ. Поэтому от каждого звена непрерывного сигнала спектр вычислялся точно (как спектр прямоугольника) и затем суммировались полученные элементарные спектры звеньев.

Рассмотренные алгоритмы экстраполяции достаточно чувствительны к точности вычислений. Первоначально, при работе на ЭВМ серии ЕС, успешно применялся стандартный Фортран, но с переходом на мини-ЭВМ, используемую для оперативной обработки экспериментальных данных, возникли затруднения. К сожалению, во всех существующих здесь компиляторах Фортрана, включая Фортран-77, отсутствует комплексная арифметика с двойной точностью. Поэтому удобным оказался переход на оптимизирующий Паскаль-2, с предварительно дописанным к нему соответствующим расширением. Время выполнения программы реставрации, основанной на экстраполяции спектра, составило не более 20 мин работы ЭВМ СМ-4.

Определенные преимущества и в плане эффективности, и в плане реализации имеет язык Си. Отметим также, что во всех версиях ОС Unix содержится библиотека программ для вычислений с произвольной точностью.

Кроме того, метод аналитического продолжения очень хорошо работает в задачах не экстраполяции, а интерполяции, где не нужна большая точность (см. [10]).

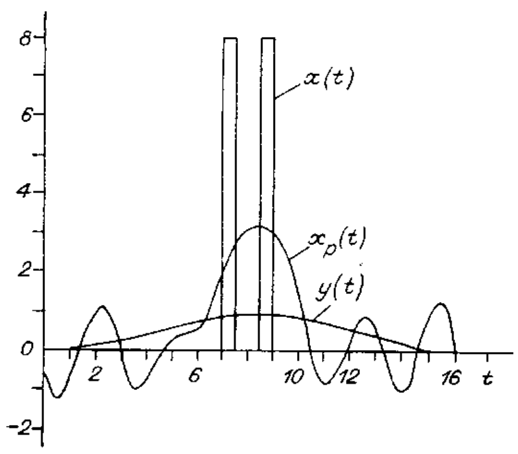


Рис. 4. Реставрация методом Тихонова при наложении внешней помехи на выходной сигнал $y(t)$

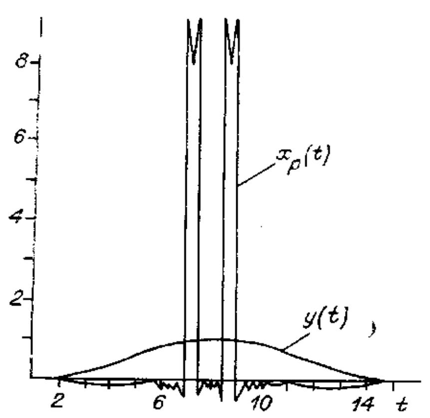


Рис. 5. Реставрация с использованием аналитического продолжения по методу Айзенберга

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
2. **Frieden B. R.** Band-unlimited reconstruction of optical objects and spectra // JOSA.— 1967.— 57.— P. 1013.
3. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике.— М.: Наука, 1971.
4. **Василенко Г. И., Тараторин А. М.** Восстановление изображений.— М.: Радио и связь, 1986.
5. **Айзенберг Л. А.** Экстраполяция функций, голоморфных в произведении полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра // ДАН СССР.— 1986.— **290**, № 2.
6. **Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А.** Вычислительный эксперимент по сверхразрешению физических приборов экстраполяцией спектра Фурье одномерных финитных сигналов // Письма в ЖТФ.— 1987.— **13**, № 9.
7. **Хемминг Р. В.** Численные методы.— М.: Наука, 1972.
8. **Хемминг Р. В.** Цифровые фильтры.— М.: Сов. радио, 1980.
9. **Кравцов Б. А.** Вычислительные аспекты метода экстраполяции Айзенберга // Комплексный анализ и математическая физика.— Красноярск, 1987.
10. **Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А., Шаимкулов Б. А.** Об интерполяции сигналов с финитным спектром Фурье. Вычислительный эксперимент // Автометрия.— 1989.— № 4.

Поступила в редакцию 16 мая 1989 г.