

В режиме портов ввода-вывода максимальная достигнутая тактовая частота 8 МГц. Это связано с тем, что дешифрация сигналов линии РС производилась в модуле, установленном в крейте VME и на большей частоте (10 МГц). Задержка, определяемая временем прохода сигналов через выходные формирователи, линию связи, дешифратор, превышала максимально допустимую для выставления адаптером сигнала IOCS16. По этой же причине пришлось отказаться от применения гальванической развязки, так как при использовании доступных оптопар с минимальной задержкой (30 нс) суммарная задержка оказывается все-таки большой.

В адаптере отсутствует возможность передачи данных путем прямого доступа к памяти. Как сообщается в [3], максимальная скорость обмена в режиме ПДП для машины PC/AT составляет 400...800 Кбайт/с, в то же время скорость, достигнутая в адаптере без применения канала прямого доступа, составляет 550 Кбайт/с (режим памяти, блочная передача), что сопоставимо со скоростью обмена по каналу ПДП.

В настоящее время разработана и находится в процессе изготовления плата адаптера, в которой устранен ряд недостатков, присущих первому образцу: 1) за счет переноса блока управления из вставки в крейт VME во вставку в РС увеличена тактовая частота для обоих режимов до 10 МГц; 2) до четырех увеличено число поддерживаемых крейтов; 3) переключение режимов работы (порты — память) программное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лю Ю-Чжен, Гибсон Г. Микропроцессоры семейства 8086/8088.— М.: Радио и связь, 1987.
2. COMPAQ DESKPRO 386 Technical Reference Guide.
3. Филлис Б. Выбор шины для построения системы сбора данных на базе персонального компьютера // Электроника.— 1989.— № 10.

Поступило в редакцию 9 февраля 1990 г.

УДК 62-50

Ю. Г. ЗОЛОТАРЕВ, М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Большинство производственных процессов описывается уравнениями с запаздывающим аргументом. Причем в большом количестве случаев запаздывание сильно влияет на динамику процесса и пренебречь им нельзя. Неучет этого обстоятельства ведет к созданию малоэффективных систем управления и обработки информации. В литературе в силу трудностей теоретического характера рассмотрены лишь простейшие системы с запаздыванием вида

$$W(s) = \frac{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} e^{-\mu s} = W_0(s) e^{-\mu s}, \quad \mu \geq 0. \quad (1)$$

Однако уже простейший случай обработки сигнала от одного источника, поступающего по двум каналам, имеющим разные передаточные функции $W_{01}(s) e^{-\mu_1 s}$ и $W_{02}(s) e^{-\mu_2 s}$, приводит к тому, что общая передаточная функция $W_0(s) = W_{01}(s) e^{-\mu_1 s} + W_{02}(s) e^{-\mu_2 s}$ по структуре не совпадает с (1). Легко представить себе объект $W_0(s) = Q_0(s)/P_0(s)$, в обратной связи которого имеется запаздывание $e^{-\mu s}$. Передаточная функция такого объекта будет вида $Q_0(s)/[P_0(s) + Q_0(s) e^{-\mu s}]$, отличающегося от (1).

Естественно, при решении задач анализа и синтеза систем обработки информации и управления встают традиционные вопросы поиска соответствующих алгоритмов и критериев, но применительно к объектам с более сложным математическим описанием. В общем случае система может описываться дифференциальным уравнением вида

$$Q_0(x(t)) + \sum_{i=1}^r Q_i(x(t - \tau_i)) = F_0(y(t - \mu)) + \sum_{i=1}^l F_i(y(t - \mu - \nu_i)), \quad (2)$$

здесь $\nu_i > 0$, $\tau_i > 0$, $\mu \geq 0$ — постоянные числа, а $Q_i(x)$, $F_i(y)$ — линейные диффе-

амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) $W(j\omega)$ охватывала $m/2$ раз точку с координатами $-1, j0$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Перейдем к доказательству. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$Q(s) + F(s)e^{-sT} = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим передаточную функцию

$$W_0(s) = \frac{Q(s)}{Q(s) + F(s)e^{-sT}} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (12)$$

Эта передаточная функция в силу условий (7), (8) удовлетворяет соотношениям (113) приложения 1. Поэтому при изменении ω от нуля до бесконечности вектор $W_0(j\omega)$ повернется вокруг нулевой точки $(m_1 - m)/2$ раз (m — число нулей, m_1 — число полюсов функции $W_0(s)$, лежащих в правой полуплоскости комплексного переменного). Для того чтобы разомкнутая система была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно отсутствие у функции $W_0(s)$ полюсов в правой полуплоскости и на мнимой оси, т. е. $m_1 = 0$. Следовательно, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от нуля до бесконечности вектор $W_0(j\omega)$ повернулся вокруг нулевой точки $-m/2$ раз. Это равносильно тому, что вектор $W_0(j\omega)^{-1}$ повернется вокруг нулевой точки плоскости комплексного переменного в положительном направлении $m/2$ раз. Учитывая, что поворот вектора $1 + W(j\omega)$ вокруг начала координат равносильно повороту вектора $W(j\omega)$ вокруг точки $-1, j0$, приходим к сформулированному критерию.

3. Комментарий к критерию Найквиста. Если попробовать применить критерий Найквиста, то оказывается, что не хватает информации о количестве корней квазиполинома, лежащих в правой полуплоскости. Так как количество корней у квазиполинома бесконечно, то выделить из них конечное число корней, лежащих справа, обычным способом, т. е. отысканием численно всех корней, невозможно. Ниже приведено решение задачи отыскания количества корней квазиполинома в правой полуплоскости и численного значения самих корней.

4. Отыскание числа корней квазиполинома, лежащих в правой полуплоскости. Необходимо найти число корней квазиполинома $Q(s)$, лежащих в правой полуплоскости. Рассмотрим передаточную функцию

$$U(s) = \frac{(s+a)^{n_1}}{Q_0(s) + \sum_{l=1}^r Q_l(s)e^{-lTs}} = \frac{R(s)}{Q(s)}, \quad a > 0. \quad (13)$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям, полагаемым на функцию $U(s)$ из приложения 2, где показано, что вектор $U(j\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности повернется вокруг нулевой точки на $n_2 - n_3$ оборотов (здесь n_2, n_3 — число корней полиномов $Q(s)$ и $R(s)$ в правой полуплоскости комплексного переменного соответственно). В нашем случае $n_3 = 0$. Из изложенного следует: пусть $Q(s)$ из (13) не имеет нулей на мнимой оси. Тогда число корней этого квазиполинома, расположенных в правой полуплоскости, равно удвоенному числу оборотов вокруг нулевой точки вектора $U(j\omega) = R(j\omega)/Q(j\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности. Естественно, вместо полинома $R(s) = (s+a)^{n_1}$ можно взять любой квазиполином, имеющий нулей на мнимой оси и в правой полуплоскости. При этом необходимо, чтобы степени старших членов полиномов $R(s)$ и $Q(s)$ совпадали.

Пример 4.1. Система имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k(k_1 + e^{-sT})}{(s+1) + k(k_1 + e^{-sT})}.$$

Найти количество корней квазиполинома знаменателя $W(s)$, находящихся в правой полуплоскости, при $k = 4, k_1 = 0,25, T = 1$. Для решения этой задачи рассмотрим передаточную функцию

$$U(s) = \frac{(s+1) + 0,5e^{-s}}{(s+1) + k(k_1 + e^{-sT})} = \frac{s+1 + 0,5e^{-s}}{s+2 + 4e^{-s}}.$$

Легко усмотреть, что полином $s+1+0,5e^{-s}$ корней в правой полуплоскости не содержит. Амплитудно-фазовая характеристика $U(j\omega)$ приведена на рис. 2 (кривая a). Из него видно, что вектор $U(j\omega)$ вокруг нулевой точки совершает один полный оборот. Таким образом, квазиполином $s+2+4e^{-s}$ имеет в правой полуплоскости два корня. Рассмотрим функцию другого вида:

$$U(s) = \frac{s+1}{(s+1) + k(k_1 + e^{-sT})} = \frac{s+1}{s+2 + 4e^{-s}}.$$

АФХ $U(j\omega)$ приведена на рис. 2 (кривая b) и совершает один полный оборот. Таким образом, квазиполином $s+2+4e^{-s}$ имеет в правой полуплоскости два корня. Ниже будет дана методика определения конкретных значений этих корней.

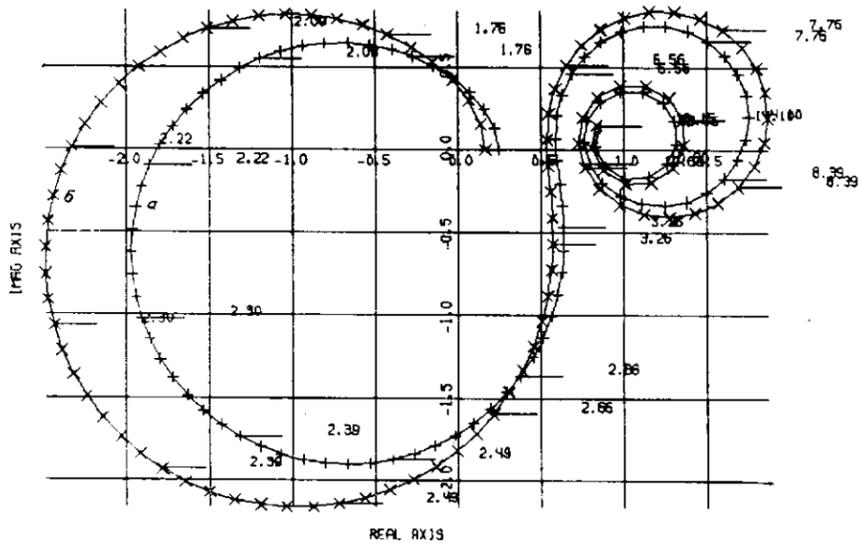


Рис. 2

5. **Критерий устойчивости.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (2) с запаздывающим аргументом. Этому дифференциальному уравнению соответствует передаточная функция (5). Характеристическое уравнение в (5) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n_0} b_{i_0} s^{n_0-i} + \sum_{l=1}^r \left(\sum_{i=0}^{n_l} b_{i_l} s^{n_l-i} \right) e^{-\tau_l s} = 0. \quad (14)$$

Из изложенного в п. 4 следует критерий устойчивости. Если характеристическое уравнение (14) не имеет нулевых и чисто мнимых корней, то для асимптотической устойчивости системы, описываемой уравнением (2), необходимо и достаточно, чтобы АФХ

$$U(j\omega) = R(j\omega)/Q(j\omega) \quad (15)$$

при изменении ω от нуля до бесконечности совершила вокруг нулевой точки меньше половины оборота. При этом $R(s)$ — полином степени n_1 , имеющий корни только в левой полуплоскости. В качестве $R(s)$ может быть взят и квазиполином, как в примере 4.1.

6. **Приближенные методы решения задач для систем с запаздыванием.** При решении различного рода прикладных задач приходится иметь дело с уравнениями, в которые входят функции e^{-st} . Точное их решение представляет большие трудности. В некоторых случаях такие уравнения неразрешимы. Для того чтобы их решить, приходится прибегать к приближенным методам. Изложенное поясним примером.

Пример 6.1. Отраженный от объекта случайный сигнал имеет вид $x(t) = c_0 m(t) + a_0 m(t-T)$. На сигнал $x(t)$ наложена помеха $n(t)$. Необходимо построить фильтр, выделяющий отраженный сигнал $m(t)$. Фильтр, формирующий сигнал $x(t)$,

описывается следующим образом: $\Phi(s) = \frac{c_0 + a_0 e^{-sT}}{s + b_0}$. Помеха $n(t)$ является белым шумом. Из изложенного следует, что спектральная плотность сигнала с наложенной на него помехой имеет вид

$$S_{\varphi\varphi}(s) = \frac{c_0 + a_0 e^{-sT}}{s + b_0} \frac{c_0 + a_0 e^{+sT}}{-s - b_0} + d_0^2.$$

Взаимная спектральная плотность желаемого сигнала и сигнала с наложенной на него помехой запишется так:

$$S_{m\varphi}(s) = \frac{1}{s + b_0} \frac{c_0 + a_0 e^{+sT}}{-s - b_0}.$$

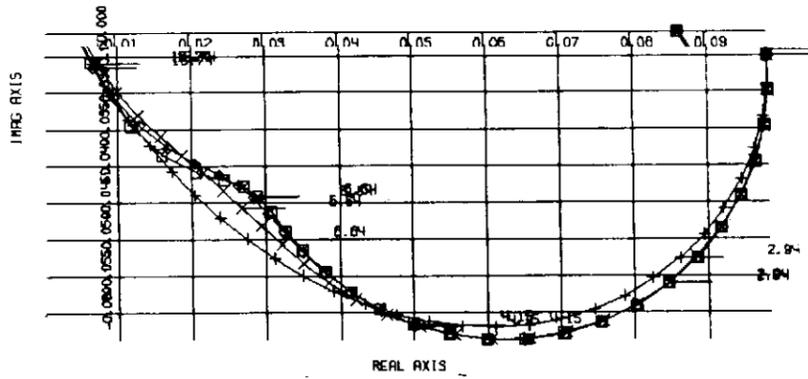


Рис. 3

Помеха $n(t)$ с сигналом $x(t)$ не коррелирована. Уравнение Винера — Хонфа с учетом исходных данных будет иметь вид

$$W(s) \left[\frac{c_0 + a_0 e^{-sT}}{s + b_0} - \frac{c_0 + a_0 e^{+sT}}{-s + b_0} + d_0^2 \right] = \frac{1}{s + b_0} \frac{c_0 + a_0 e^{+sT}}{-s + b_0} = \Gamma(s),$$

$W(s)$ — искомая передаточная функция фильтра; $\Gamma(s)$ — неизвестная функция с полюсами только в правой полуплоскости.

Полученное уравнение может быть решено лишь приближенно. Для его решения необходимо разложить входящую в него функцию e^{-sT} в ряд Пада [2, с. 400—403]. Тогда оно примет обычный вид, так как все исходные данные будут заданы в виде дробно-рациональных функций, а методы решения таких уравнений хорошо известны [3]. Наиболее употребительным является приближение

$$e^{-p} \approx G_n(-p)/G_n(p), \quad (16)$$

где

$$G_n(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k; \quad a_{2m} = \frac{1}{2^m (2m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n-m-k-1}{2n-2k-1} \right); \quad (17)$$

$$a_{2m+1} = \frac{1}{2^{m+1} (2m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n-m-k-1}{2n-2k-1} \right). \quad (18)$$

Здесь используются обычные предположения $\prod_{k=a}^b \gamma_k = 1$ при $a > b$, $0! = 1$. Величина n задается такой, что два решения при n и $n+1$ были бы достаточно близкими. В этих условиях, когда величина n может быть любой, необходимо убедиться, что при произвольном n корни полинома $G_n(p)$ выходят только в левой полуплоскости комплексного переменного, т. е. передаточная функция, приближающая звезду чистого запаздывания, всегда устойчива. В приложении 3 показано, что это действительно имеет место.

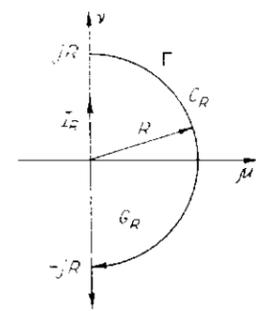


Рис. 4

Пример 6.2. Решить, используя разложение функции e^{-sT} в ряд Пада, полученное в примере 6.1 уравнение Винера — Хонфа. Определить необходимое количество членов в разложении. На рис. 3 приведены графики $W_n(j\omega)$ при $c_0 = 1$, $a_0 = 4$, $b_0 = 1$, $T = 1$, $d_0^2 = 1$. Из них следует заключить, что $W_2(j\omega)$ и $W_3(j\omega)$ уже достаточно близки. Можно при разложении в ряд Пада ограничиться $n = 3$.

Пример 6.3. Найти приближенное значение лежащих в правой полуплоскости корней квазиполинома $s + 2 + 4e^{-s}$. Ранее, в примере 4.1, было установлено, что таких корней два. Теперь необходимо найти их величину.

n=14		n=15		n=14		n=15	
Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
—	—	-122,721	0	-1,664	20,443	-1,638	20,438
-71,608	57,201	-33,870	-62,875	-1,267	-14,189	-1,267	-14,129
-71,608	57,201	-33,870	62,875	-1,267	14,189	-1,267	14,189
-41,847	42,748	-6,948	38,156	-0,708	-8,014	-0,708	8,014
-11,847	-42,748	-6,948	-38,156	-0,708	8,014	-0,708	8,014
-3,123	27,685	-2,427	27,027	0,218	2,331	0,218	2,331
-3,123	-27,685	-2,427	-27,027	0,218	-2,331	0,218	-2,331
-1,664	20,443	-1,638	20,438				

Для этого воспользуемся разложением e^{-st} в ряд Лада. В результате найдем дробно-рациональную функцию. В таблице при $n = 14$ и $n = 15$ приведены значения корней числителя этого полинома. Совпадающие корни при $n = 14$ и $n = 15$ и будут корнями полинома. В таблице имеются и два искоемых правых корня.

Приложение 4. Пусть $Q(s)$, $P(s)$ — квазиполиномы, $Q(s)$ определяется из соотношений (6) и (5):

$$P(s) = P_0(s) + \sum_{k=1}^p P_k(s) e^{-\sigma_k s}, \quad (\text{П1})$$

здесь σ_k — положительные постоянные; функции $P_k(s)$ — полиномы с действительными коэффициентами:

$$P_k(s) = a_{0k} s^{m_k} + a_{1k} s^{m_k-1} + \dots + a_{m_k-1} s + a_{m_k}, \quad k = 0 \div p, \quad (\text{П2})$$

причем

$$m_0 = n_0, m_0 > m_k, \quad k = 1 \div p, n_0 > n_l, \quad l = 1 \div r. \quad (\text{П3})$$

Определим функцию

$$U(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = W_0^{-1}(s), \quad (\text{П4})$$

C_R — дуга окружности, показанная на рис. 4. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{U'(s)}{U(s)} ds = 0.$$

Приведем доказательство этого соотношения. Имея в виду (П4), получим

$$\frac{U'(s)}{U(s)} = \frac{P'(s)Q(s) - P(s)Q'(s)}{P(s)Q(s)} = \frac{\Phi_1(s) + \Phi_2(s)}{P(s)Q(s)}. \quad (\text{П5})$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= P_0'(s)Q_0(s) - P_0(s)Q_0'(s); \\ \Phi_2(s) &= \sum_{k=1}^p (P_k'(s)Q_0(s) - P_k(s)Q_0'(s) - \sigma_k P_k(s)Q_0(s)) e^{-\sigma_k s} + \\ &+ \sum_{l=1}^r (P_0'(s)Q_l(s) - P_0(s)Q_l'(s) - \tau_l P_0(s)Q_l(s)) e^{-\tau_l s} + \\ &+ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r (Q_l(s)P_k'(s) - Q_l'(s)P_k(s) + (\tau_l - \sigma_k)P_k(s)Q_l(s)) e^{-(\sigma_k + \tau_l)s}. \end{aligned}$$

Так как по условию $m_0 = n_0$, то

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= (m_0 a_{00} s^{m_0-1} + (m_0 - 1) a_{10} s^{m_0-2} + \dots + a_{m_0-1}) (b_{00} s^{m_0} + \dots \\ &\dots + b_{m_0}) - (a_{00} s^{m_0} + \dots + a_{m_0}) (m_0 b_{00} s^{m_0-1} + (m_0 - 1) b_{10} s^{m_0-2} + \dots \\ &\dots + b_{m_0}) = (a_{00} b_{10} - a_{10} b_{00}) s^{2m_0-2} + \dots + (a_{m_0-1} b_{m_0} - a_{m_0} b_{m_0-1}) = \\ &= c_0 s^{2m_0-2} + c_1 s^{2m_0-3} + \dots + c_{2m_0-2}. \end{aligned}$$

Поэтому на окружности $|s| = R$ при достаточно больших R имеем

$$|\Phi_1(s)| \leq |s|^{2m_0-2} \left(|c_0| + \frac{|c_1|}{|s|} + \dots + \frac{|c_{2m_0-2}|}{|s|^{2m_0-2}} \right) \Big|_{|s|=R} \leq R^{2m_0-2} (|c_0| + 1). \quad (\text{П6})$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} \Phi_2(s) = & \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^{2m_0} c_{i_{k-1}} s^{2m_0-i} \right) e^{-\sigma_k s} + \sum_{l=1}^r \left(\sum_{i=1}^{2m_0} d_{i_{l-1}} s^{2m_0-i} \right) e^{-\tau_l s} + \\ & + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r \left(\sum_{i=2}^{2m_0} h_{i_{kl}-2} s^{2m_0-i} \right) e^{-(\sigma_k + \tau_l) s}. \end{aligned}$$

Отметим, что некоторые из коэффициентов при s со старшей степенью равны нулю. В области $\operatorname{Re} s > a$ имеем $|e^{-\psi_{kl} s}| \leq e^{-\psi_{kl} a} |e^{-j\psi_{kl} b}| \leq e^{-\alpha a}$, $\psi_{kl} = (\sigma_k, \tau_l, \sigma_k + \tau_l)$, $\alpha = \min(\sigma_1 + \sigma_p, \tau_1 + \tau_r)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\Phi_2(s)| \leq & e^{-\alpha \operatorname{Re} s} |s|^{2m_0-1} \left\{ \sum_{k=1}^p |c_{0k}| + \sum_{l=1}^r |d_{0l}| + \right. \\ & + \frac{1}{|s|} \left(\sum_{k=1}^p |c_{1k}| + \sum_{l=1}^r |d_{1l}| + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r |h_{0k,l}| \right) + \dots \\ & \left. \dots + \frac{1}{|s|^{2m_0-1}} \left(\sum_{k=1}^p |c_{(2m_0-1)k}| + \sum_{l=1}^r |d_{(2m_0-1)l}| + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r |h_{(2m_0-2)k,l}| \right) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что на дуге окружности C_R справедливо равенство $\operatorname{Re} s = R \cos \varphi$, $(-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$. Поэтому, если радиус окружности R достаточно велик, то на C_R будет справедливо неравенство

$$|\Phi_2(s)| \leq e^{-\alpha R \cos \varphi} A R^{2m_0-1}, \quad (\text{П7})$$

где

$$A = \sum_{k=1}^p |c_{0k}| + \sum_{l=1}^r |d_{0l}| + 1.$$

Рассмотрим знаменатель соотношения (П5). В области $\operatorname{Re} s > 0$ получим

$$|P(s)Q(s)| \geq |s|^{2m_0} \left(|a_{00}| |b_{00}| - \frac{1}{|s|} h_1 - \dots - \frac{1}{|s|^{2m_0}} h_{2m_0} \right).$$

Здесь $h_1 \dots h_{2m_0}$ — некоторые неотрицательные постоянные, которые без труда определяются из соотношений для $P(s)$ и $Q(s)$. Из последнего неравенства видно, что при достаточно больших R на окружности C_R справедливо неравенство

$$|P(s)Q(s)| \geq R^{2m_0} \frac{|a_{00}| |b_{00}|}{2}. \quad (\text{П8})$$

Используя неравенства (П6), (П7) и (П8) на дуге окружности C_R , при достаточно больших значениях R из равенства (П5) получим

$$\left| \frac{U'(s)}{U(s)} \right| \leq \frac{|\Phi_1(s)| + |\Phi_2(s)|}{|P(s)Q(s)|} \leq \frac{2(|c_0| + 1)}{|a_{00}| |b_{00}|} \frac{1}{R^2} + \frac{A}{R} e^{-\alpha R \cos \varphi}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{U'(s)}{U(s)} ds \right| & \leq \int_{C_R} \left| \frac{U'(s)}{U(s)} \right| |ds| = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{U'(s)}{U(s)} \right| d\varphi \leq \\ & \leq \frac{2(|c_0| + 1)\pi}{R |a_{00}| |b_{00}|} + 2A \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \cos \varphi} d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{П9})$$

но

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \psi} d\psi,$$

так как на интервале $0 \div \pi/2$ при $\varphi = \pi/2 - \psi$ $\cos \varphi = \sin \psi$. В силу неравенства $\sin \psi \geq 2/\pi \psi$ при $0 \leq \psi \leq \pi/2$

можно записать

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \psi} d\psi \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\alpha}{\pi} R \psi} d\psi = \frac{\pi}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) < \frac{\pi}{2\alpha}$$

переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, найдем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{U'(s)}{U(s)} ds \right| = 0. \quad (\text{П10})$$

Приложение 2. Пусть квазиполиномы $P(s)$ и $Q(s)$, удовлетворяющие всем условиям, сформулированным в приложении 1, имеют в правой полуплоскости N_1 и N_2 корней соответственно. На мнимой оси корни отсутствуют. Функция $U(s)$ определяется равенством (П4). Тогда при изменении частоты ω от нуля до бесконечности АФХ $U(j\omega) = P(j\omega)/Q(j\omega)$ охватывает начало координат комплексной плоскости $(N_2 - N_1)/2$ раз в положительном направлении.

Для доказательства этого положения обратимся к рис. 4. Здесь Γ — замкнутый контур, образованный отрезком мнимой оси $J_R = \{s : s = jv, -R \leq v \leq R\}$ и полуокружностью $C_R \{s : |s| = R, \operatorname{Re} s > 0\}$. Будем считать, что число R выбрано столь большим, что все корни функций $P(s)$ и $Q(s)$, лежащие в области G_R , ограничены кривой Γ . Тогда по теореме о логарифмическом вычете [4, с. 83] справедливо равенство

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma^-} \frac{U'(s)}{U(s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \left(\int_{-jR}^{jR} \frac{U'(s)}{U(s)} ds + \int_{C_R} \frac{U'(s)}{U(s)} ds \right), \quad (\text{П11})$$

Γ^- означает, что контур обходится по часовой стрелке. Отметим, что

$$\frac{U'(s)}{U(s)} ds = d(\ln U(s)) = d(\ln |U(s)| + j \arg U(s)),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-jR}^{jR} \frac{U'(s)}{U(s)} ds &= \int_{-jR}^{jR} d(\ln |U(s)|) + j \int_{-jR}^{jR} d(\arg U(s)) = \\ &= \ln \frac{|U(jR)|}{|U(-jR)|} + j(\arg U(jR) - \arg U(-jR)). \end{aligned}$$

Так как квазиполиномы $P(s)$ и $Q(s)$ с действительными коэффициентами, то

$$U(-jR) = \bar{U}(jR), \quad \arg U(jR) = -\arg U(-jR).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln \frac{|U(jR)|}{|U(-jR)|} &= \ln \frac{|U(jR)|}{|\bar{U}(jR)|} = \ln 1 = 0; \\ \arg U(jR) - \arg U(-jR) &= 2\arg U(jR). \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{-jR}^{jR} \frac{U'(s)}{U(s)} ds = 2j \arg U(jR).$$

Подставляя полученное соотношение в равенство (П10), найдем

$$\frac{N_2 - N_1}{2} = \frac{1}{4\pi j} \int_{\Gamma^-} \frac{U'(s)}{U(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \arg U(jR) + \frac{1}{4\pi j} \int_{C_R} \frac{U'(s)}{U(s)} ds.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$, в силу (П10) имеем

$$\frac{N_2 - N_1}{2} = \frac{1}{2\pi} \arg U(j\infty). \quad (\text{П12})$$

Однако $\arg U(j\infty)$ равняется полному изменению аргумента функции $U(j\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности. Заметим, что геометрически $\arg U(j\omega)/2\pi$ представляет собой число оборотов вокруг нулевой точки в положительном направлении вектора $U(j\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности.

Приложение 3. Полагая в (16) $p = sT$, получим

$$e^{-sT} \approx G_n(-sT)/G_n(sT). \quad (\text{П13})$$

Из приведенных ниже преобразований

$$G_n(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k = a_n \prod_{i=1}^n (p - \alpha_i) = a_n \prod_{i=1}^n (sT - \alpha_i) = a_n T^n \prod_{i=1}^n \left(s - \frac{\alpha_i}{T}\right) = \sum_{k=0}^n b_k s^k \quad (\text{П14})$$

видно, что корни полинома $G_n(sT)$, $T > 0$ лежат в тех же полуплоскостях комплексного переменного, что и полинома $G_n(p)$. Так как звено с передаточной функцией e^{-sT} является устойчивым, нужно показать, что дробно-рациональная функция $G_n(-sT)/G_n(sT)$ при любом n имеет полюсы только в левой полуплоскости. Покажем, что рациональная дробь $G_n(-p)/G_n(p)$, стоящая в правой части равенства (16), не имеет полюсов в правой полуплоскости. Для этого воспользуемся критерием Рауса. Отметим, что нули $\beta_1 \dots \beta_n$ функции

$$F_n(p) := p^n G_n\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{l=0}^n a_l p^{n-l} = p^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} - \alpha_i\right) = \prod_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{1}{\alpha_i} - p\right) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - p) \quad (\text{П15})$$

связаны с нулями $\alpha_1 \dots \alpha_n$ функции $G_n(s)$ соотношениями $\beta_1 = \alpha_1^{-1} \dots \beta_n = \alpha_n^{-1}$. Функция $F_n(p)$ имеет в левой полуплоскости столько же нулей, что и функция $G_n(p)$. Следовательно, достаточно показать, что уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (\text{П16})$$

коэффициенты $a_0, a_1 \dots a_n$ которого определены по формулам (18), не имеет корней в правой полуплоскости. Применительно к уравнению (П16) схема Рауса описывается следующим образом [5, с. 135]:

$$\begin{aligned} r_0 &= a_0/a_1; & c_{k3} &= a_{2k} - r_0 a_{2k+1}; \\ r_1 &= a_1/c_{13}; & c_{k4} &= a_{2k+1} - r_1 c_{k+1,3}; \\ r_i &= c_{1,i+1}/c_{1,i+2}; & c_{k,i+3} &= c_{k+1,i+2} - r_i c_{k+1,i+2}, \quad i = 2, 3, \dots; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{П17})$$

Для того чтобы все корни уравнения (П16) лежали в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы числа $a_0, a_1, c_{13}, \dots, c_{1,n+1}$ были одного знака.

Докажем следующее утверждение. Если коэффициенты $a_0, a_1 \dots a_n$ уравнения (П16) определены равенствами (18), то числа $c_{m+1,l+1}$, вычисляемые по схеме Рауса (П17), могут быть записаны в виде

$$c_{m+1,l+1} = \frac{(m+l)!}{2^m m! (2m+2)!} \prod_{k=0}^{m-1} \binom{n-m-l-k}{2n-2k-1}, \quad (\text{П18})$$

$$l = 2, 3 \dots n; \quad m = 0, 1 \dots \left\lfloor \frac{n-l+1}{2} \right\rfloor.$$

Для доказательства воспользуемся методом полной индукции. Для начала покажем, что если по формулам (П18) вычислить $c_{m+1,1}$ и $c_{m+1,2}$, то справедливы равенства

$$c_{m+1,1} = a_{2m}, \quad m = 0, 1 \dots \lfloor n/2 \rfloor; \quad (\text{П19})$$

$$c_{m+1,2} = a_{2m+1}, \quad m = 0, 1 \dots \lfloor (n-1)/2 \rfloor.$$

Действительно, из (П18) при $l = 0$ имеем

$$c_{m+1,1} = \frac{m!}{2^m m! (2m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \binom{n-m-k}{2n-2k-1} = a_{2m},$$

а при $l = 1$ получим

$$\begin{aligned} c_{m+1,2} &= \frac{(m+1)!}{2^m m! (2m+2)!} \prod_{k=0}^{m-1} \binom{n-m-k-1}{2n-2k-1} = \\ &= \frac{m+1}{2^m (2m+1)! (2m+2)} \prod_{k=0}^{m-1} \binom{n-m-k-1}{2n-2k-1} = a_{2m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $l = 0$ и $l = 1$ формулы (П18) справедливы. Допустим теперь, что формулы (П18) справедливы для $l \leq p-1$ ($p \geq 2$), и покажем, что тогда они справедливы и для $l = p$. Так как по формулам (П18)

$$c_{1,p-1} = \frac{(p-2)!}{(2p-4)!}, \quad c_{1,p} = \frac{(p-1)!}{(2p-2)!},$$

то

$$r_{p-2} = \frac{c_{1,p-1}}{c_{1,p}} = \frac{(p-2)!(2p-2)!}{(p-1)!(2p-4)!} = \frac{(2p-3)(2p-2)}{p-1} = 2(2p-3).$$

Поэтому в соответствии с формулой (П17) имеем

$$\begin{aligned} c_{m+1,p+1} &= c_{m+2,p+1} - r_{p-2} c_{m+2,p} = \frac{(m+p-1)!}{2^{m+1}(m+1)!(2m+2p-2)!} \times \\ &\times \prod_{k=0}^m \frac{n-m+p-1-k}{2n-2k-1} - 2(2p-3) \frac{(m+p)!}{2^{m+1}(m+1)!(2m+2p)!} \prod_{k=0}^m \frac{n-m-p-k}{2n-2k-1} = \\ &= \frac{1}{2n-2m-1} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{n-m-p-k}{2n-2k-1} \frac{(m+p-1)!}{2^{m+1}(m+1)!(2m+2p-2)!} \times \\ &\times \left[(n-m-p+1) - 2(2p-3) \frac{(m+p)(n-2m-p)}{(2m+2p-1)(2m+2p)} \right] = \frac{1}{2n-2m-1} \times \\ &\times \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n-m-p-k}{2n-2k-1} \right) \frac{(m+p-1)! [(n-m-p+1)(2m+2p-1) - (2p-3)(n-2m-p)]}{2^{m+1}(m+1)!(2m+2p-2)!(2m+2p-1)} = \\ &= \frac{(m+p-1)!}{2^{m+1}(m+1)!(2m+2p-2)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n-m-p-k}{2n-2k-1} \right) \frac{(2mn-2m^2-3m+2n-1)}{(2n-2m-1)(2m+2p-1)} = \\ &= \frac{(m+p)!}{2^m(m+1)!2(m+p)(2m+2p-2)!(2m+2p-1)} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n-m-p-k}{2n-2k-1} \right) \times \\ &\times \frac{(2n-2m-1)(m+1)}{(2n-2m-1)} = \frac{(m+p)!}{2^m m! (2m+2p)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n-m-p-k}{2n-2k-1} \right), \end{aligned}$$

это и доказывает, что формулы справедливы при $l = p$. Так как они выполняются при $l = 0$ и $l = 1$, то они справедливы и при любом допустимом значении l . Так как по формулам (П18) все числа c_{11}, c_{12}, \dots положительны, то уравнение (П16) не имеет корней в правой полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием.— М.: Машиностроение, 1974.
2. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления.— М.: Физматгиз, 1960.
3. Зотов М. Г. Аналитическое конструирование стационарных управляющих устройств.— М.: Энергоатомиздат, 1987.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Физматгиз, 1958.
5. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления (часть I).— М.: Энергия, 1965.

Поступило в редакцию 6 июля 1987 г.