градиента поля в узлах текущего изображения по зашумленным опорным измерениям поля.

Установлена связь матриц $\bar{J}^{-1}$ и $I^{-1}(\Delta)$ с матрицами, характеризующими точность совмещения в линеаризованных задачах оценивания, в частности при использовании метода наименьших квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буймов А. Г.** Анализ влияния корреляционных свойств неоднородного яркостного шума на ковариационную матрицу ошибок совмещения изображения // Автометрия.— 1985.— № 4.
2. **Антипин В. В., Буймов А. Г.** Статистический анализ ошибок совмещения изображений по методу наименьших квадратов // Автометрия.— 1985.— № 3.
3. **Буймов А. Г.** Корреляционно-экстремальная обработка изображений.— Томск: ТГУ. 1987.
4. **Mostafavi H., Smith F. W.** Image correlation with geometric distortion // IEEE Trans.— 1978.— AES-14, N 3.— P. I, II.— P. 487.
5. **Андросов В. А., Бойко Ю. В., Бочкарев А. П., Однорог А. П.** Совмещение изображений в условиях неопределенности // Зарубежная радиоэлектрон.— 1985.— № 4.
6. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции.— М.: Сов. радио, 1972.— Т. 1.
7. **Степанов О. А.** Рекуррентный метод вычисления нижней границы точности оценивания в задаче с нелинейными измерениями // Изв. вузов. Приборостроение.— 1986.— № 2.
8. **Розенвассер Е. П.** О построении матрицы Фишера для задачи оценивания параметров конечномерных систем // АиТ.— 1988.— № 2.
9. **Степанов О. А.** Использование неравенства Рао — Крамера в корреляционно-экстремальных системах // Корреляционно-экстремальные системы.— Томск: ТГУ, 1986.
10. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 5 мая 1989 г.

УДК 519.234

В. Г. АЛЕКСЕЕВ
(Москва)

БИСПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ: ВЫБОРКИ БОЛЬШОГО ОБЪЕМА

1. Вопросы, касающиеся статистического оценивания спектральных плотностей стационарных случайных процессов и однородных случайных полей, широко освещаются как в специальных монографиях, так и в большом количестве журнальных статей. В последние годы, однако, все большее внимание исследователей — физиков и математиков — привлекают спектральные плотности высших порядков (в их числе, прежде всего, биспектральные плотности). Обширный список литературы, посвященной статистическому оцениванию биспектральных плотностей (спектральных плотностей 3-го порядка) и практическим приложениям биспектрального анализа стационарных случайных процессов, может быть найден в [1—9].

В настоящей статье основное внимание уделяется методам биспектрального анализа стационарных случайных процессов по выборкам большого объема. Предложена вычислительная процедура, которая может быть интерпретирована следующим образом: исходная выборка из N отсчетов исследуемого случайного процесса разбивается на конечное число неперекрывающихся или частично перекрывающихся массивов меньшего объема, и дальнейшая обработка каждого из полученных массивов проводится отдельно, после чего искомая оценка биспектральной плотности получается в виде среднего арифметического оценок, построенных по каждому из массивов меньшего объема (ср. [1, разд. IV, A]).

Читатель, знакомый с теорией статистического оценивания обычной спектральной плотности $f(\lambda)=f^{(2)}(\lambda)$ стационарного случайного процесса (например, в том виде, как она изложена в [10, § 18] или в [11]), легко убедится в том, что переход от обычной спектральной плотности к биспектральной сопровождается многократным усложнением и увеличением объема выкладок и расчетов. Это и неудивительно: биспектральная плотность $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$ — существенно более сложный объект, чем обычная спектральная плотность. Построение и анализ ее статистических оценок требует от исследователя гораздо большей вдумчивости и осмотрительности, чем в случае оценивания обычной спектральной плотности. Еще бо́льшие трудности (аналитические, геометрические и даже терминологические) ожидают нас при переходе к оцениванию триспектральной плотности $f^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Не может быть сомнения в том, что последовательное преодоление всех этих трудностей (вместе с возрастанием возможностей вычислительной техники) приведет в конечном счете к тому, что биспектральный и триспектральный анализ стационарных случайных процессов будет применяться столь же широко и столь же плодотворно, как в наши дни обычный спектральный анализ.

2. Итак, пусть, как и в [6], $\{\xi(k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ — стационарный до шестого порядка включительно случайный процесс со средним значением 0. Биспектральная плотность $f^{(3)}(\lambda)$, $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)\in\Pi^2$, $\Pi=(-\pi, \pi]$, случайного процесса $\xi(k)$ определяется соотношением

$$f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)=(2\pi)^{-2}\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\exp[-i(l_1\lambda_1+l_2\lambda_2)]\,r_3(l_1, l_2), \tag{1}$$

где

$$r_3(l_1,\ l_2)=\langle\xi(k)\xi(k+l_1)\xi(k+l_2)\rangle=\langle\xi(0)\xi(l_1)\xi(l_2)\rangle \tag{2}$$

и угловые скобки $\langle\ \rangle$ — символ математического ожидания.

В основу построения оценки $f_n^{(3)}(\lambda)$ биспектральной плотности $f^{(3)}(\lambda)$ в [6] положена периодограмма третьего порядка

$$I_n(\omega_1, \omega_2)=C_n\prod_{j=1}^{3}\sum_{k_j=-n}^{n}a(k_j)\,\xi(k_j)\,e^{-ik_j\omega_j}, \tag{3}$$

где $(\omega_1,\ \omega_2)\in\mathbf{R}^2$; $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0 \pmod{2\pi}$; $a(k)$ — мультипликативное окно данных, описываемое соотношением

$$a(k)=1-|k|/n,\quad |k|\leqslant n,$$

и $C_n=n/[2\pi^2(n^2+1)]$ — нормирующий множитель, обеспечивающий асимптотическую (при $n\to\infty$) несмещенность периодограммы (3).

В ходе исследования оценки биспектральной плотности $f^{(3)}(\lambda)$ в [6] рассматривались три компоненты ошибки оценивания: дисперсия оценки $f_n^{(3)}(\lambda)$, смещение вещественной части оценки $f_n^{(3)}(\lambda)$ и смещение ее мнимой части. Причем каждое из двух смещений, в свою очередь, было представлено в виде суммы двух слагаемых: смещения, возникающего за счет смещения периодограммы (3), и смещения, возникающего за счет ее осреднения по аргументу $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ \omega_2)$ с помощью того или иного спектрального окна. В условиях работы [6] главным членом смещения вещественной и мнимой частей оценки $f_n^{(3)}(\lambda)$ оказалось слагаемое, возникающее за счет осреднения по аргументу $\boldsymbol{\omega}$.

Предположим, что исходная выборка из N отсчетов случайного процесса $\xi(k)$ не может быть обработана на ЭВМ целиком и нам неизбежно приходится разбивать ее на массивы меньшего объема, вычислять по каждому из них периодограмму третьего порядка и затем находить осредненную (по числу массивов) периодограмму. Эта последняя (вместо периодограммы (3)) и кладется в основу построения оценки $f_N^{(3)}(\lambda)$

биспектральной плотности. Описанная выше схема расчетов вполне аналогична той, которая была применена ранее [12, 13] при вычислении оценок обычной спектральной плотности $f(\lambda)$ по выборкам большого объема.

Если число отсчетов N случайного процесса $\xi(k)$ достаточно велико, то дисперсия оценки $f_N^{(3)}(\lambda)$ будет мала. Смещение оценки $f_N^{(3)}(\lambda)$, возникающее за счет осреднения периодограммы по аргументу ω, также может быть сделано пренебрежимо малым как за счет сужения области осреднения, так и за счет надлежащего выбора осредняющих весовых функций (см. [6]). И лишь смещение осредненной (по числу массивов) периодограммы с ростом объема выборки N не убывает: оно совпадает со смещением периодограммы, построенной по каждому из массивов меньшего объема. Таким образом, приходим к следующей задаче: как уменьшить смещение периодограммы, построенной по массиву фиксированной (но не слишком малой) длины?

Предположим, что в нашем распоряжении имеется массив из $4n-1$ отсчета случайного процесса $\xi(k)$, $n=2, 3, \ldots$. Определим периодограмму $I_n(\omega_1, \omega_2)$, $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbf{R}^2$, соотношением

$$I_n(\omega_1, \omega_2) = C_n \prod_{j=1}^{3} \sum_{k_j=-2n}^{2n} a(k_j)\, \xi(k_j)\, e^{-ik_j\omega_j}, \tag{4}$$

где $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \equiv 0 \pmod{2\pi}$;

$$a(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3|k| + 6nk^2 - 3|k|^2}{2n(2n^2+1)}, & 0 \leqslant |k| \leqslant n; \\ \dfrac{(2n-|k|)\,[(2n-|k|)^2-1]}{2n(2n^2+1)}, & n-1 \leqslant |k| \leqslant 2n. \end{cases} \tag{5}$$

и

$$C_n = [\pi^2(1979n^8 + 1785n^6 + 1617n^4 + 1675n^2 + 504)]^{-1} 70n(2n^2+1)^3 \tag{6}$$

или

$$a(k) = \begin{cases} 1 - 6\left(\dfrac{k}{2n}\right)^2 + 6\left(\dfrac{|k|}{2n}\right)^3, & 0 \leqslant |k| \leqslant n; \\ 2\left(1 - \left|\dfrac{k}{2n}\right|\right)^3, & n \leqslant |k| \leqslant 2n, \end{cases} \tag{7}$$

и

$$C_n = 560n^7 / [\pi^2(1979n^8 + 77n^4 + 170n^2 + 84)]. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда периодограмма (4) строится с помощью окна данных (5), фактически используются лишь $4n-3$ отсчетов из нашего массива, так как в этом случае $a(k)=0$ для $|k| = 2n-1$. Легко видеть, кроме того, что значения обеих функций в правой части формулы (5) совпадают при $|k| = n-1$ и n.

Известно, что для окон данных (5) и (7) справедливы соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-2n}^{2n} a(k)\, e^{ik\mu} = \frac{3\sin^4(n\mu/2)}{2\pi n(2n^2+1)\sin^4(\mu/2)} \tag{9}$$

и соответственно

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-2n}^{2n} a(k)\, e^{ik\mu} = \frac{2+\cos\mu}{4\pi n^3} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)}\right]^4. \tag{10}$$

Правые части формул (9) и (10) известны как ядра Джексона и Парзена. В дальнейшем ядро Джексона (т. е. правую часть соотношения (9)) будем обозначать $J_n(\mu)$. Формула (5) для коэффициентов Фурье $a(k)$ ядра Джексона была, по-видимому, впервые получена в [14].

Функцию $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$, первоначально определенную лишь для множества Π^2, в дальнейшем будем считать продолженной периодическим образом (по каждому из ее скалярных аргументов) на всю вещественную плоскость $\mathbf{R}^2$. Нам будет также удобно представить биспектральную плотность $f^{(3)}(\lambda)$ в виде $f^{(3)}(\lambda)=g_1(\lambda)+ig_2(\lambda)$, где функции $g_j(\lambda)$, $j=1, 2$, вещественны.

Теорема. Пусть все частные производные второго порядка функций $g_j(\lambda_1, \lambda_2)$, $j=1, 2$, ограничены (по абсолютной величине) одной и той же постоянной K. Тогда для периодограммы $I_n(\omega)$, определенной формулами (4)—(6) или (4), (7) и (8), справедливо соотношение

$$\sup_{\omega\in\Pi^2} \left| \langle I_n(\omega)\rangle - f^{(3)}(\omega) \right| = O(n^{-2}).$$

Доказательство, в силу большого сходства ядер (9) и (10), проведем лишь для окна данных (5) и соответствующего нормирующего множителя (6), т. е. для ядра Джексона. В случае использования окна данных (7) (т. е. окна Парзена) доказательство теоремы лишь слегка видоизменяется.

В соответствии с формулами (4), (1), (2) и (9)

$$\begin{aligned}\langle I_n(\omega_1, \omega_2)\rangle &= C_n \sum_{k_1=-2n}^{2n} a(k_1) \sum_{k_2=-2n}^{2n} a(k_2) \sum_{k_3=-2n}^{2n} a(k_3) \times \\ &\times \exp\{-i[k_1\omega_1 + k_2\omega_2 - k_3(\omega_1+\omega_2)]\} \langle \xi(k_1)\xi(k_2)\xi(k_3)\rangle = \\ &= C_n \sum_{k_1=-2n}^{2n} a(k_1) \sum_{k_2=-2n}^{2n} a(k_2) \sum_{k_3=-2n}^{2n} a(k_3)\, r_3(k_1-k_3, k_2-k_3) \times \\ &\times \exp\{-i[(k_1-k_3)\omega_1 + (k_2-k_3)\omega_2]\} = \\ &= C_n \sum_{k_1=-2n}^{2n} a(k_1) \sum_{k_2=-2n}^{2n} a(k_2) \sum_{k_3=-2n}^{2n} a(k_3) \iint_{\Pi^2} f^{(3)}(\mu_1, \mu_2) \times \\ &\times \exp\{i[(k_1-k_3)(\mu_1-\omega_1) + (k_2-k_3)(\mu_2-\omega_2)]\}\, d\mu_1\, d\mu_2 = \\ &= \iint_{\Pi^2} \Phi_n(\mu_1-\omega_1, \mu_2-\omega_2)\, f^{(3)}(\mu_1, \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_n(\mu_1, \mu_2) &= C_n \sum_{k_3=-2n}^{2n} a(k_3)\, e^{-ik_3(\mu_1+\mu_2)} \prod_{j=1}^{2} \sum_{k_j=-2n}^{2n} a(k_j)\, e^{ik_j\mu_j} = \\ &= 8\pi^3 C_n J_n(\mu_1) J_n(\mu_2) J_n(\mu_1+\mu_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Пользуясь приведенными в [15, гл. 3, упр. 5 и 7] значениями функции

$$\psi_k(n) = \sum_{t=1}^{n} t^k, \quad k = 1, 2, \ldots, 9,$$

и формулами (5), (6) и (12), покажем, что

$$\begin{aligned}\iint_{\Pi^2} \Phi_n(\mu_1, \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2 &= C_n \sum_{k_3=-2n}^{2n} a(k_3) \sum_{k_1=-2n}^{2n} a(k_1) \sum_{k_2=-2n}^{2n} a(k_2) \times \\ &\times \int_{\Pi} e^{i(k_1-k_3)\mu_1}\, d\mu_1 \int_{\Pi} e^{i(k_2-k_3)\mu_2}\, d\mu_2 = 4\pi^2 C_n \sum_{k_3=2n-}^{2n} a^3(k_3) = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

В пояснение к полученному нами равенству (13) следует указать, что множитель C_n с самого начала был выбран таким образом, чтобы это равенство выполнялось. Хотелось бы также обратить внимание читателя на то обстоятельство, что вычисление суммы кубов коэффициентов $a(k)$ потребует от него, если он пожелает проверить правильность соотношения (13), немалых усилий.

Пользуясь соотношениями (11) и (13) и разлагая функцию $g_1(\lambda_1, \lambda_2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (ω_1, ω_2), находим

$$\varepsilon_n(\omega) = \langle \operatorname{Re} I_n(\omega)\rangle - g_1(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \Phi_n(\mu_1 - \omega_1, \mu_2 - \omega_2)\,[g_1(\mu_1, \mu_2) - g_1(\omega_1, \omega_2)]\, d\mu_1\, d\mu_2 =$$

$$= \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \Phi_n(\mu_1, \mu_2)\,[g_1(\omega_1 + \mu_1, \omega_2 + \mu_2) - g_1(\omega_1, \omega_2)]\, d\mu_1\, d\mu_2 =$$

$$= \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \frac{\Phi_n(\mu_1, \mu_2)}{2}\left[\frac{\partial g_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial\lambda_1} 2\mu_1 + \frac{\partial g_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial\lambda_2} 2\mu_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 g_1(\omega_1 + \theta\mu_1, \omega_2 + \theta\mu_2)}{\partial\lambda_j\, \partial\lambda_k}\mu_j\mu_k\right] d\mu_1\, d\mu_2, \tag{14}$$

где $0 < \theta = \theta(\omega, \mu) < 1$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2)$.

Заметим теперь, что

$$\int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \mu_2\Phi_n(\mu_1, \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2 = \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \mu_1\Phi_n(\mu_1, \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2 =$$

$$= 8\pi^3 C_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu_1 J_n(\mu_1)\, d\mu_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\mu_2)\, J_n(\mu_1 + \mu_2)\, d\mu_2 = 0,$$

так как функция

$$h(\mu) = \mu J_n(\mu) \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\mu_2)\, J_n(\mu + \mu_2)\, d\mu_2$$

нечетна. Поэтому из (14) следует, что

$$\varepsilon_n(\omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 g_1(\omega_1 + \theta\mu_1, \omega_2 + \theta\mu_2)}{\partial\lambda_j^2}\mu_j^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 g_1(\omega_1 + \theta\mu_1, \omega_2 + \theta\mu_2)}{\partial\lambda_1\, \partial\lambda_2} 2\mu_1\mu_2\right] \Phi_n(\mu_1, \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$$

и в соответствии с условием теоремы, соотношением (12) и формулой (9) для ядра Джексона

$$|\varepsilon_n(\omega)| \leqslant 2^{-1} K \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \Phi_n(\mu_1, \mu_2)\,(|\mu_1| + |\mu_2|)^2\, d\mu_1\, d\mu_2 \leqslant$$

$$\leqslant K \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \Phi_n(\mu_1, \mu_2)\,(\mu_1^2 + \mu_2^2)\, d\mu_1\, d\mu_2 = 2K \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \Phi_n(\mu_1, \mu_2)\,\mu_1^2\, d\mu_1\, d\mu_2 =$$

$$= 16\pi^3 K C_n \int\limits_{\Pi^2}\!\!\int \mu_1^2 J_n(\mu_1)\, J_n(\mu_2)\, J_n(\mu_1 + \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{24\pi^2 K n^3 C_n}{2n^2 + 1} \int\limits_{\Pi} \mu_1^2 J_n(\mu_1)\, d\mu_1 \int\limits_{\Pi} J_n(\mu_2)\, d\mu_2. \tag{15}$$

Правая часть соотношения (15) не зависит от ω. Поэтому из (15), в соответствии с (6) и свойствами ядра Джексона (см., например, [16, гл. II, § 3]), вытекает, что

$$\varepsilon_n = \sup_{\omega\in\Pi^2} |\varepsilon_n(\omega)| = O(n^{-2}). \tag{16}$$

Аналогично, полагая

$$\delta_n(\omega) = \langle \operatorname{Im} I_n(\omega)\rangle - g_2(\omega),$$

находим, что и

$$\delta_n \equiv \sup_{\omega \in \Pi^2} |\delta_n(\omega)| = O(n^{-2}). \tag{17}$$

Утверждение теоремы следует теперь из соотношений (16) и (17) и неравенства

$$\sup_{\omega \in \Pi^2} \left| \langle I_n(\omega) \rangle - f^{(3)}(\omega) \right| \leqslant \varepsilon_n + \delta_n.$$

Видно, что использование окон данных (5) и (7) обеспечивает быральных плотностей порядков $\nu = 4$, 5 и 6 могут быть найдены в [18, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пикиас Х. Л., Рагувер М. Р.** Биспектральное оценивание применительно к цифровой обработке // ТИИЭР.— 1987.— 75, № 7.
2. **Калмыков В. А.** О вычислении биспектров стационарных случайных процессов // ППИ.— 1983.— 19, № 4.
3. **Калмыков В. А.** Особенности биспектров ветровых волн при повороте ветра // Морской гидрофиз. журн.— 1985.— № 4.
4. **Калмыков В. А.** Зависимость биспектров ветровых волн от волнообразующих факторов // Морской гидрофиз. журн.— 1986.— № 2.
5. **Ефимов В. В., Калмыков В. А.** Биспектры ветровых волн // Океанология.— 1984.— 24, № 4.
6. **Алексеев В. Г.** Некоторые вопросы оценивания биспектральной плотности стационарного случайного процесса // ППИ.— 1983.— 19, № 3.
7. **Алексеев В. Г.** Некоторые вопросы биспектрального анализа стационарных случайных процессов и однородных случайных полей // ППИ.— 1985.— 21, № 4.
8. **Алексеев В. Г.** Об оценках биспектральной плотности некоторых моделей случайных процессов // Теория случайных процессов.— 1986.— Вып. 14.
9. **Subba Rao T., Cabr M. M.** An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models. (Lecture Notes in Statistics, N 24).— New York — Berlin — Heidelberg — Tokyo: Springer-Verlag, 1984.
10. **Яглом А. М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
11. **Спектральное оценивание**: Тем. вып. // ТИИЭР.— 1982.— 70, № 9.
12. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема // ППИ.— 1980.— 16, № 1.
13. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектральных плотностей случайных процессов по выборкам большого объема // Вычислительная и прикладная математика.— Киев: Вища шк., 1981.— Вып. 44.
14. **Сафронова Г. П.** О методе суммирования расходящихся рядов, связанном с сингулярным интегралом Джексона // ДАН СССР.— 1950.— 73, № 2.
15. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов.— М.: Мир, 1976.
16. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.
17. **Van Ness J. W.** Asymptotic normality of bispectral estimates // Ann. Math. Statist.— 1966.— 37, N 5.— P. 1257.
18. **Алексеев В. Г.** О свойствах симметрии старших спектральных плотностей стационарных случайных процессов // Матем. заметки.— 1987.— 41, № 5.
19. **Алексеев В. Г.** О свойствах симметрии старших спектральных плотностей стационарных и периодически нестационарных случайных процессов // ППИ.— 1987.— 23, № 3.

Поступила в редакцию 28 марта 1989 г.