98. **Лапидес А. А.** Фильтрация ТВ-растра с помощью протяженного источника белого света // Техника кино и телевидения.— 1984.— № 8.
99. **Лапидес А. А.** Использование некогерентных источников для фильтрации растра в когерентно-оптической системе // Радиотехника и электроника.— 1985.— **30**, № 7.
100. **Zhabotinski M. B., Lapides A. A.** Spatial coherent optical filtering of color images // Opt. Lett.— 1982.— **7**, N 3.— P. 142.
101. **Лапидес А. А.** Оптическая коррекция одномерных периодических искажений в кинокопировальном аппарате // Техника кино и телевидения.— 1987.— № 4.

Поступила в редакцию 30 января 1989 г.

УДК 519.219 : 519.237.5

О. А. СТЕПАНОВ

(Ленинград)

ПРЕДЕЛЬНО ДОСТИЖИМАЯ ТОЧНОСТЬ СОВМЕЩЕНИЯ ГАУССОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Введение. Сущность задачи совмещения изображений, представляющих собой реализации случайных полей, заключается в определении смещения одного изображения относительно другого. Точность совмещения исследуется в ряде работ [1—5]. При этом, как правило, анализируется точность, соответствующая конкретным субоптимальным алгоритмам оценивания, используемым при решении задачи совмещения. Так, в [4] предполагается, что оценивание осуществляется на основе максимизации взаимной корреляционной функции совмещаемых изображений. В [1—3] исследуется точность, соответствующая обычному методу наименьших квадратов, не учитывающему в своем критерии коррелированность ошибок измерения.

Существенно также, что при проведении анализа точности в рамках упомянутых работ предполагаются известными значения градиентов поля [1, 4], либо считается, что градиенты восстанавливаются по точным значениям поля [2]. Очевидно, что это не соответствует реальным условиям, при которых имеют место лишь зашумленные измерения поля.

Данные предположения, а также использование субоптимальных алгоритмов при проведении анализа точности не позволяют в общем случае определять предельно достижимые точности совмещения изображений. В связи с этим представляется целесообразным провести анализ предельно достижимых точностей, свободный от отмеченных недостатков.

В настоящей работе, опираясь на неравенство Рао — Крамера, проводится такой анализ точности для частного случая задачи совмещения дискретных гауссовых изображений.

Оптимальная постановка задачи совмещения изображений. Пусть имеются изображения, представляющие собой два набора зашумленных измерений случайного поля ψ, выполненных в узлах прямоугольной равномерной сетки координат с общим числом узлов N. Введем индекс i, соответствующий порядковому номеру узла, отсчитываемому от начальных точек изображения (например, левый верхний угол) при последовательном переходе от одной строчки к другой. Представим измерения в виде

$$z_i^l = \psi_i^l + v_i^l, \quad i = \overline{1, N}, \quad l = \mathrm{I},\ \mathrm{II}, \tag{1}$$

где $\psi_i^l = \psi\left(x_i^l\right)$ — значения поля в точках $\mathbf{x}_i^l = \left(x_i^l(1), x_i^l(2)\right)^T$, задающих узлы прямоугольной сетки; v_i^l — ошибки измерения. Пусть координаты, соответствующие одному из наборов измерений (опорному изображению), например $\mathbf{x}_i^{II}$, известны точно, а координаты, соответствующие другому набору (текущему изображению), смещены относительно $\mathbf{x}_i^{II}$ на неизвестный вектор $\mathbf{\Delta}=(\Delta(1), \Delta(2))^T$, т. е.

$$\mathbf{x}_i^I = \mathbf{x}_i^{II} + \mathbf{\Delta}. \tag{2}$$

Задача совмещения изображений заключается в отыскании $\mathbf{\Delta}$ по измерениям (1) при учете соотношения (2). В целях упрощения полагаем, что поворот и масштабные искажения отсутствуют. Такое предположение не нарушает общности получаемых в дальнейшем результатов, так как излагаемый подход может быть использован и при наличии такого рода искажений.

Введем векторы

$$\bar{\mathbf{z}}^l = (z_1^l, \ldots, z_N^l)^T, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}}^l = (\psi_1^l, \ldots, \psi_N^l)^T, \quad \bar{\mathbf{v}}^l = (v_1^l, \ldots, v_N^l)^T, \quad l = \mathrm{I}, \mathrm{II}.$$

Полагаем, что все они гауссовы и, кроме того, $\bar{\mathbf{v}}^{\mathrm{I}}$, $\bar{\mathbf{v}}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{\Delta}$ между собой независимы и не зависят от поля ψ.

Для плотности распределения гауссова вектора «$\mathbf{a}$» с математическим ожиданием $\bar{\mathbf{a}}$ и матрицей ковариаций A используем обозначения $f(\mathbf{a})=N(\mathbf{a};\ \bar{\mathbf{a}}, A)$. Введем следующие плотности:

$$\begin{aligned} &f(\bar{\boldsymbol{\psi}}^l)=N(\bar{\boldsymbol{\psi}}^l;\ 0,\ P^l);\\ &f(\bar{\mathbf{v}}^l)=N(\bar{\mathbf{v}}^l;\ 0,\ R^l);\\ &f(\mathbf{\Delta})=N(\mathbf{\Delta};\ 0,\ P_\Delta),\ l=\mathrm{I},\ \mathrm{II}. \end{aligned} \tag{3}$$

Матрицы P^l, R^l, $l=\mathrm{I}$, II, определяются, исходя из заданных корреляционных функций поля и ошибок его измерения.

Под оптимальной байесовской постановкой задачи совмещения изображений будем понимать такую постановку, которая предполагает отыскание оценки Δ, минимизирующей след безусловной матрицы ковариаций

$$G = \int (\mathbf{\Delta} - \hat{\mathbf{\Delta}})(\mathbf{\Delta} - \hat{\mathbf{\Delta}})^T f(\mathbf{\Delta}, \bar{\mathbf{z}})\, d\mathbf{\Delta} d\bar{\mathbf{z}}, \tag{4}$$

где $\bar{\mathbf{z}}=((\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}})^T, (\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}})^T)^T$; $f(\mathbf{\Delta}, \bar{\mathbf{z}})$ — совместная плотность распределения векторов $\mathbf{\Delta}$ и $\bar{\mathbf{z}}$. Напомним, что особенность байесовской постановки заключается в предположении о случайном характере $\mathbf{\Delta}$.

Известно [6, 7], что в качестве оптимальной оценки выступает математическое ожидание, соответствующее условной плотности $f(\mathbf{\Delta}/\bar{\mathbf{z}})$, т. е.

$$\hat{\mathbf{\Delta}} = \int \mathbf{\Delta} f(\mathbf{\Delta}/\bar{\mathbf{z}})\, d\mathbf{\Delta}. \tag{5}$$

В соотношениях (4), (5) интегралы понимаются как многомерные в бесконечных пределах, а дифференциалы векторов — как произведения дифференциалов компонент этих векторов.

Не останавливаясь на вопросах построения процедур получения оптимальных оценок, проанализируем ожидаемые точности оптимального оценивания $\mathbf{\Delta}$.

Предельно достижимые точности совмещения изображений. Для анализа точности воспользуемся неравенством Рао — Крамера. Для матрицы G при случайном характере $\mathbf{\Delta}$ это неравенство записывается следующим образом [6]:

$$G \geqslant J^{-1}, \tag{6}$$

где

$$J = \int \frac{\partial \ln f(\mathbf{\Delta}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{\Delta}} \left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{\Delta}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{\Delta}}\right)^T f(\mathbf{\Delta}, \bar{\mathbf{z}})\, d\mathbf{\Delta}\, d\bar{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

Из выражения (6) следует, что матрица J^{-1} может быть использована при исследовании предельно достижимых точностей оценивания $\mathbf{\Delta}$, или, что то же самое, предельно достижимых точностей совмещения двух изображений.

Определим матрицу J. Воспользуемся следующим представлением:

$$f(\boldsymbol{\Delta}, \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}}, \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}) = f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}/\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\Delta}) f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}}) f(\boldsymbol{\Delta}), \tag{8}$$

вытекающим из формулы Байеса и условия $f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}}/\boldsymbol{\Delta}) = f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}})$.

Рассмотрим плотность $f(\bar{\mathbf{z}}/\boldsymbol{\Delta})$, которая с учетом обозначений (3) имеет вид

$$f(\bar{\mathbf{z}}/\boldsymbol{\Delta}) = N(\bar{\mathbf{z}}; 0, P_{\bar{z}}), \tag{9}$$

где

$$P_{\bar{z}} = \begin{bmatrix} P^{\mathrm{I}} + R^{\mathrm{I}} & K(\boldsymbol{\Delta}) \\ K^T(\boldsymbol{\Delta}) & P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}} \end{bmatrix}; \tag{10}$$

$$K(\boldsymbol{\Delta}) = \langle \psi(\mathbf{x}_i^{\mathrm{II}} + \boldsymbol{\Delta}) \psi(\mathbf{x}_j^{\mathrm{II}}) \rangle, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{11}$$

Элементы матрицы (11) определяются исходя из известной корреляционной функции поля ψ.

Используя правило отыскания параметров условной гауссовой плотности, из выражений (9), (10) получаем

$$f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}}/\mathbf{z}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{\Delta}) = N(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}}; \hat{\bar{\psi}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\Delta}), R^{\mathrm{I}} + \bar{P}(\boldsymbol{\Delta})), \tag{12}$$

где

$$\hat{\bar{\psi}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\Delta}) = K(\boldsymbol{\Delta}) (P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}})^{-1} \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}; \tag{13}$$

$$\bar{P}(\boldsymbol{\Delta}) = P^{\mathrm{I}} - K(\boldsymbol{\Delta}) (P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}})^{-1} K^T(\boldsymbol{\Delta}). \tag{14}$$

Нетрудно заметить, что матрица $\bar{P}(\boldsymbol{\Delta})$ определяет ковариационные свойства ошибки оптимального оценивания поля в текущем изображении по его измерениям в опорном изображении.

Осуществляя теперь интегрирование в (7) по $\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{I}}$, с учетом представлений (8), (12)—(14), сделанных предположений о независимости $\bar{\mathbf{v}}^{\mathrm{I}}$, $\bar{\mathbf{v}}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{\Delta}$, ψ и результатов работ [6—8], можно получить следующее выражение для матрицы J:

$$J = \int \left(H^T(\boldsymbol{\Delta}) R_{\Sigma}^{-1} H(\boldsymbol{\Delta}) + A(\boldsymbol{\Delta}) + P_{\Delta}^{-1}\right) f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{\Delta})\, d\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}\, d\boldsymbol{\Delta}, \tag{15}$$

где

$$R_{\Sigma} = (\bar{P}(\boldsymbol{\Delta}) + R^{\mathrm{I}}); \tag{16}$$

$$H^T(\boldsymbol{\Delta}) = \{H_{\mu j}(\boldsymbol{\Delta})\} = \left\{\frac{\partial \hat{\bar{\psi}}_j^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\mu)}\right\}; \tag{17}$$

$$H_{\mu j}(\boldsymbol{\Delta}) = \frac{\partial K_j(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\mu)} (P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}})^{-1} \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}, \quad \mu = 1, 2, \quad j = \overline{1, N}; \tag{18}$$

$K_j(\boldsymbol{\Delta})$ — строка матрицы $K(\boldsymbol{\Delta})$.

Элементы матрицы $A(\boldsymbol{\Delta})$ в (15) задаются следующим образом:

$$A_{\mu\nu}(\boldsymbol{\Delta}) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp}\left\{R_{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \bar{P}(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\mu)} R_{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \bar{P}(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\nu)}\right\}, \quad \mu, \nu = 1, 2. \tag{19}$$

С учетом выражения (18) и вида функции $f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}) = N(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}; 0, P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}})$ можно записать

$$\int H^T(\boldsymbol{\Delta}) R_{\Sigma}^{-1} H(\boldsymbol{\Delta}) f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}})\, d\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}} = \left\{\int (\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}})^T (P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}})^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial K^T(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\mu)} R_{\Sigma}^{-1} \frac{\partial K(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\nu)} (P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}})^{-1} \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}} f(\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}})\, d\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{II}}\right\} =$$

$$= \left\{\operatorname{Sp} R_{\Sigma}^{-1} \frac{\partial K(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\nu)} (P^{\mathrm{II}} + R^{\mathrm{II}})^{-1} \frac{\partial K^T(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta(\mu)}\right\}, \quad \nu, \mu = 1, 2.$$

Окончательно для элементов матрицы J получаем

$$J_{\nu\mu}=\int\Big\{\mathrm{Sp}\,R_{\Sigma}^{-1}\frac{\partial K(\Delta)}{\partial\Delta(\nu)}(P^{II}+R^{II})^{-1}\frac{\partial K^{T}(\Delta)}{\partial\Delta(\mu)}+$$
$$+\frac{1}{2}R_{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\bar{P}(\Delta)}{\partial\Delta(\nu)}R_{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\bar{P}(\Delta)}{\partial\Delta(\mu)}+P_{\Delta}^{-1}(\nu,\mu)\Big\}f(\Delta)\,d\Delta,\quad \mu,\ \nu=1,2,\qquad(20)$$

где $P_{\Delta}^{-1}(\nu,\mu)$ — элементы матрицы P_{Δ}^{-1}; R_{Σ} задается выражением (16) и определяет ковариационные свойства суммарной ошибки измерения поля в текущем изображении и ошибки восстановления текущего изображения по опорным измерениям.

Очевидно, что с помощью соотношения (20), опираясь на известные статистические характеристики полей и ошибок их измерения, можно вычислять элементы матрицы J с целью определения J^{-1}, характеризующей предельно достижимые точности совмещения изображений.

Обсуждение результатов. Измерения $\mathbf{z}^{I}$ могут быть записаны в виде

$$\bar{\mathbf{z}}^{I}=\bar{\psi}^{I}+\hat{\bar{\psi}}^{I}(\Delta)-\hat{\bar{\psi}}^{I}(\Delta)+\bar{\mathbf{v}}^{I}=\hat{\bar{\psi}}^{I}(\Delta)+\bar{\mathbf{v}}^{I}+\bar{\mathbf{n}}(\Delta),$$

где

$$f(\bar{\mathbf{n}}(\Delta)/\bar{\mathbf{z}}^{II},\ \Delta)=N(\bar{\mathbf{n}}(\Delta);\ 0,\ \bar{P}(\Delta)).$$

Представим эти измерения следующим образом:

$$\bar{\mathbf{z}}^{I}\approx H^{T}(\Delta^{*})\,\boldsymbol{\delta}+\hat{\bar{\psi}}^{I}(\Delta^{*})+\bar{\mathbf{v}}^{I}+\bar{\mathbf{n}}(\Delta^{*}),\qquad(21)$$

где $\boldsymbol{\delta}=\Delta-\Delta^{*}$; $H^{T}(\Delta)$ задается соотношением (17).

Нетрудно заметить, что если $f(\boldsymbol{\delta})=f(\Delta)$, то матрица ковариаций, характеризующая точность оценивания δ по линеаризованным измерениям (21), определяется выражением

$$\mathscr{P}(\Delta^{*},\bar{\mathbf{z}}^{II})=(H^{T}(\Delta)R_{\Sigma}^{-1}H(\Delta)+P_{\Delta}^{-1})^{-1}.$$

Учитывая данное выражение, соотношение (15) можно представить так:

$$J=J_1+J_2,$$

где

$$J_2=\int A(\Delta)\,f(\Delta,\mathbf{z}^{II})\,d\Delta\,d\mathbf{z}^{II};$$
$$J_1=\int\mathscr{P}^{-1}(\Delta,\bar{\mathbf{z}}^{II})\,f(\Delta,\bar{\mathbf{z}}^{II})\,d\Delta\,d\bar{\mathbf{z}}^{II}.\qquad(22)$$

Очевидно, что матрица J_1 находится путем вероятностного осреднения обратных матриц ковариаций, характеризующих точность в линеаризованной задаче оценивания при всевозможных значениях Δ и $\bar{\mathbf{z}}^{II}$.

Для приближенной оценки точности может быть использована матрица

$$\bar{\mathscr{P}}=\int\mathscr{P}(\Delta,\bar{\mathbf{z}}^{II})\,f(\Delta,\bar{\mathbf{z}}^{II})\,d\Delta\,d\bar{\mathbf{z}}^{II}.\qquad(23)$$

Опираясь на интегрально-матричный вариант неравенства Коши — Буняковского и учитывая, что $J_2\geqslant 0$, можно показать справедливость следующих соотношений:

$$\bar{\mathscr{P}}\geqslant J_1^{-1}\geqslant J^{-1}.\qquad(24)$$

Неравенства (24) необходимо иметь в виду, когда для приближенного анализа точности привлекается соотношение (23).

Установим теперь смысл входящих в выражение (20) матриц

$$B_{\nu\mu}=\frac{\partial K(\Delta)}{\partial\Delta(\nu)}(P^{II}+R^{II})^{-1}\frac{\partial K^{T}(\Delta)}{\partial\Delta(\mu)},\quad \nu,\ \mu=1,2.\qquad(25)$$

Будем считать, что поле ψ дифференцируемо. Рассмотрим плотность $f(\mathbf{g},\bar{\mathbf{z}}^{II}/\Delta)$, в которой вектор

$$\mathbf{g}\triangleq\mathrm{grad}\,\bar{\psi}^{I}=((\dot{\bar{\psi}}_1^{I})^{T},(\dot{\bar{\psi}}_2^{I})^{T})^{T},\quad \dot{\bar{\psi}}_i^{I}=\frac{\partial\bar{\psi}^{I}}{\partial\Delta(i)},\quad i=1,2,$$

определяет значения производных поля по двум направлениям в узлах текущего изображения. Эта плотность имеет вид

$$f(\mathbf{g}, \bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}/\boldsymbol{\Delta}) = N\left(\mathbf{g}, \bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}; 0\begin{bmatrix} \mathscr{D} & \mathscr{K}(\boldsymbol{\Delta}) \\ \mathscr{K}^T(\boldsymbol{\Delta}) & P^{\text{II}} + R^{\text{II}} \end{bmatrix}\right), \tag{26}$$

где D — $2N \times 2N$-матрица — задается четырьмя $N \times N$-блоками:

$$\mathscr{D} = \{\mathscr{D}_{\nu\mu}\}; \tag{27}$$

$$\mathscr{D}_{\nu\mu} = \langle \dot{\bar{\psi}}_\nu^{\text{I}} \dot{\bar{\psi}}_\mu^{\text{II}} \rangle = -\frac{\partial^2 K(\boldsymbol{\Delta})}{\partial\Delta(\nu)\,\partial\Delta(\mu)}, \quad \nu, \mu = 1, 2;$$

$$\mathscr{K}(\boldsymbol{\Delta}) = \begin{bmatrix} \langle \dot{\bar{\psi}}_1^{\text{I}} (\bar{\psi}^{\text{II}})^T \rangle \\ \langle \dot{\bar{\psi}}_2^{\text{I}} (\bar{\psi}^{\text{II}})^T \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial K(\boldsymbol{\Delta})}{\partial\Delta(1)} \\ \dfrac{\partial K(\boldsymbol{\Delta})}{\partial\Delta(2)} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Принимая во внимание правило нахождения параметров условных гауссовых плотностей и выражение (26), нетрудно заметить, что матрица

$$\mathscr{D}^1 = \mathscr{D} - \mathscr{K}(\boldsymbol{\Delta})\,(P^{\text{II}} + R^{\text{II}})^{-1}\mathscr{K}^T(\boldsymbol{\Delta}) \tag{29}$$

характеризует точность оптимального оценивания компонент $\operatorname{grad}\bar{\psi}^{\text{I}}$ в узлах текущего изображения по опорным измерениям поля $\bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}$.

Из соотношений (25), (27)—(29) вытекает, что

$$B_{\nu\mu} = \mathscr{D}_{\nu\mu} - \mathscr{D}^1_{\nu\mu}, \tag{30}$$

где $\mathscr{D}'_{\nu\mu}$ — $\nu\mu$-е блоки матрицы $\mathscr{D}^1$; ν, $\mu = 1, 2$.

Анализ соотношения (20) с учетом выражения (30) показывает, что предельно достижимые точности совмещения изображений в значительной степени зависят от точности оценивания компонент градиента поля по измерениям самого поля.

Случай небайесовского оценивания. Связь с оценками метода наименьших квадратов. Часто при решении задач совмещения изображений полагают, что $\boldsymbol{\Delta}$ — не случаен, а представляет собой неизвестный детерминированный вектор [3, 4, 9]. В этой ситуации имеют дело с небайесовской задачей оценивания, когда неравенство Рао — Крамера для любой несмещенной оценки $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}$ записывается следующим образом:

$$\int (\boldsymbol{\Delta} - \tilde{\boldsymbol{\Delta}})(\boldsymbol{\Delta} - \tilde{\boldsymbol{\Delta}})^T f(\bar{\mathbf{z}}/\boldsymbol{\Delta})\,d\bar{\mathbf{z}} \geqslant I^{-1}(\boldsymbol{\Delta}),$$

где

$$I(\boldsymbol{\Delta}) = \int \frac{\partial \ln f(\bar{\mathbf{z}}/\boldsymbol{\Delta})}{\partial\boldsymbol{\Delta}} \left(\frac{\partial \ln f(\bar{\mathbf{z}}/\boldsymbol{\Delta})}{\partial\boldsymbol{\Delta}}\right)^T f(\bar{\mathbf{z}}/\boldsymbol{\Delta})\,d\bar{\mathbf{z}}.$$

Для анализа предельно достижимых точностей может быть использована матрица $I^{-1}(\boldsymbol{\Delta})$.

Проводя необходимые выкладки по аналогии с рассмотренной байесовской задачей, можно установить следующие соотношения:

$$I(\boldsymbol{\Delta}) = \left\{\operatorname{Sp}\left[R_\Sigma^{-1} B_{\nu\mu} + \frac{1}{2} R_\Sigma^{-1} \frac{\partial\bar{P}(\boldsymbol{\Delta})}{\partial\Delta(\nu)} R_\Sigma^{-1} \frac{\partial\bar{P}(\boldsymbol{\Delta})}{\partial\Delta(\mu)}\right]\right\}, \quad \nu\mu = 1, 2; \tag{31}$$

$$I_1(\boldsymbol{\Delta}) = \int R^{-1}(\boldsymbol{\Delta}, \bar{\mathbf{z}}^{\text{II}})\, f(\bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}/\boldsymbol{\Delta})\, d\bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}. \tag{32}$$

Здесь

$$R(\boldsymbol{\Delta}, \bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}) = (H^T(\boldsymbol{\Delta})\, R_\Sigma^{-1} H(\boldsymbol{\Delta}))^{-1};$$

$$\bar{R} \geqslant I_1^{-1}(\boldsymbol{\Delta}) \geqslant I^{-1}(\boldsymbol{\Delta}), \tag{33}$$

где $\bar{R} = \int R(\boldsymbol{\Delta}, \bar{\mathbf{z}}^{\text{II}})\, f(\bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}/\boldsymbol{\Delta})\, d\bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}$.

Нетрудно заметить, что матрица $R(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{z}^{\text{II}})$ совпадает с матрицей ковариаций, характеризующей точность в линеаризованной задаче оценивания по обобщенному методу наименьших квадратов при фиксированных значениях $\boldsymbol{\Delta}$ и $\bar{\mathbf{z}}^{\text{II}}$. Отметим, что в критерии обобщенного метода наименьших квадратов учитывается вид матрицы ковариаций $R_\Sigma = (\overline{P}^{\text{I}} + \overline{P}(\Delta))$ для суммарной ошибки $\mathbf{v}^{\text{I}} + \overline{\mathbf{n}}(\Delta)$.

В некоторых случаях для приближенного анализа точности целесообразно использовать матрицу

$$\overline{R}^* = \int R^*(\Delta, \overline{\mathbf{z}}^{\text{II}}) f(\overline{\mathbf{z}}^{\text{II}}/\Delta)\, d\overline{\mathbf{z}}^{\text{II}}, \tag{34}$$

где

$$R^*(\Delta, \overline{\mathbf{z}}^{\text{II}}) = (H^T(\Delta)H(\Delta))^{-1} H^T(\Delta) R_\Sigma H(\Delta) (H^T(\Delta)H(\Delta))^{-1} \tag{35}$$

— матрица ковариаций, характеризующая точность в линеаризованной задаче оценивания по обычному методу наименьших квадратов, не учитывающему в своем критерии вид матрицы R_Σ, а предполагающему некоррелированность суммарных ошибок.

Поскольку известно, что [10] $R^*(\Delta, \bar{z}^{\text{II}}) \geqslant R(\Delta, \bar{z}^{\text{II}})$, то очевидна справедливость соотношений

$$\overline{R}^* \geqslant \overline{R} \geqslant I^{-1}(\Delta). \tag{36}$$

С учетом вида матрицы $R^*(\Delta, \mathbf{z}^{\text{II}})$, задаваемой выражением (35), проведем вычисление интеграла (34).

Введем обозначение:

$$L = H^T(\Delta) H(\Delta) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \widehat{\psi}_i^{\text{I}}}{\partial \Delta} \left(\frac{\partial \widehat{\psi}_i^{\text{I}}}{\partial \Delta} \right)^T.$$

Полагая поле эргодическим и считая, что размеры изображений существенно больше интервалов корреляции поля и ошибки его измерения, можно записать приближенное соотношение

$$L \approx \int \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial \Delta} \left(\frac{\partial \widehat{\psi}_{\text{I}}}{\partial \Delta} \right)^T f(\overline{\mathbf{z}}^{\text{II}}/\Delta)\, d\overline{\mathbf{z}}^{\text{II}}. \tag{37}$$

Отсюда с учетом соотношения (18) получаем

$$L \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial K_i(\Delta)}{\partial \Delta} (P^{\text{II}} + R^{\text{II}})^{-1} \frac{\partial K_i^T(\Delta)}{\partial \Delta}$$

или

$$L = \{L_{\nu\mu}\} = \{\operatorname{Sp} B_{\nu\mu}\}, \quad \nu, \ \mu = 1, \ 2, \tag{38}$$

где $B_{\nu\mu}$ задается соотношением (25).

Нетрудно также показать, что

$$\int H^T(\Delta) R_\Sigma^{-1} H(\Delta) f(\overline{\mathbf{z}}^{\text{II}}/\Delta)\, d\overline{\mathbf{z}}^{\text{II}} = \{\operatorname{Sp} R_\Sigma B_{\nu\mu}\}, \quad \nu, \ \mu = 1, 2. \tag{39}$$

Окончательно, принимая во внимание соотношения (34), (35), (37) — (39), можно записать

$$\overline{R}^* = \{\operatorname{Sp} B_{\nu\mu}\}^{-1} \{\operatorname{Sp} R_\Sigma B_{\nu\mu}\} \{\operatorname{Sp} B_{\nu\mu}\}^{-1}, \tag{40}$$

где $B_{\nu\mu}$ задается выражениями (25), смысл которых передается соотношением (30). Фигурные скобки обозначают $2N \times 2N$-матрицы с соответствующими $N \times N$-блоками. Легко заметить, что если в равенствах (10) и (30) положить соответственно

$$\overline{P}(\Delta) = 0 \ \text{и} \ \mathscr{D}^1_{\nu\mu} = 0, \tag{41}$$

то соотношение (40) при $\Delta = 0$ совпадает с выражением, полученным для анализа предельно достижимых точностей совмещения изображений в [1—3].

Пример. Рассмотрим случай одномерного изображения, т. е. Δ — скаляр. В этой ситуации можно записать следующее выражение для J^{-1}:

$$J^{-1} = \left[\int \left(\operatorname{Sp} R_\Sigma^{-1} (\mathscr{D} - \mathscr{D}^1) + \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left(R_\Sigma^{-1} \dot{\overline{P}}(\Delta) \right)^2 + P_\Delta^{-1} \right) f(\Delta)\, d\Delta \right]^{-1},$$

где $\mathscr{D}$ — матрица ковариаций значений производных поля; $\mathscr{D}^1$ — матрица ковариаций ошибок оптимального оценивания производных.

Для небайесовской задачи имеем

$$I^{-1} = I_1(\Delta) + \mathrm{Sp}\left(R_\Sigma^{-1}\dot{\overline{P}}(\Delta)\right)^2,$$

где

$$I_1^{-1}(\Delta) = \left(\mathrm{Sp}\, R_\Sigma^{-1}(\mathscr{D} - \mathscr{D}^1)\right)^{-1};$$

$$\overline{R}^* \approx \frac{\mathrm{Sp}\, R_\Sigma(\mathscr{D} - \mathscr{D}^1)}{(\mathrm{Sp}\,(\mathscr{D} - \mathscr{D}^1))^2}.$$

Полагая $\overline{P}(\Delta) = \mathscr{D}^1 = 0$, получим

$$\tilde{R} = \mathrm{Sp}\, R^{\mathrm{I}}\mathscr{D}/(\mathrm{Sp}\,\mathscr{D})^2, \tag{42}$$

предлагаемое в [1—3].

Следует отметить, что последнее соотношение значительно упрощает процедуру оценки точности и в принципе может быть использовано для проведения приближенных ориентировочных расчетов. В то же время необходимо иметь в виду, что, поскольку считаются выполненными условия (41), результаты будут получаться завышенными. Кроме того, при проведении анализа точности с использованием соотношения (42), в силу пренебрежения вкладом $\overline{P}(\Delta)$ и $\mathscr{D}^1$, в определенных ситуациях можно получать неверные результаты. Проиллюстрируем этот факт. Предположим, что в рассматриваемом примере расстояние между узлами, в которых проведены измерения стационарного процесса, существенно превышают интервалы корреляций процесса и ошибок его измерения. Кроме того, пусть

$$P^{\mathrm{I}} = P^{\mathrm{II}} = \sigma_\psi^2 E; \quad R^{\mathrm{I}} = R^{\mathrm{II}} = rE;$$

$\mathscr{D} = \sigma_{\dot\psi}^2 E$, где E — единичная матрица. Тогда

$$\tilde{R} = r/N\sigma_{\dot\psi}^2. \tag{43}$$

При малых Δ

$$\mathscr{D} - \mathscr{D}^1 \approx \left(\dot{k}^2(\Delta)/\sigma_\Sigma^2\right) E;$$

$$R_\Sigma \approx \left(\sigma_\Sigma^2 - k^2(\Delta)/\sigma_\Sigma^2\right) E,$$

где $\sigma_\Sigma^2 = \sigma_\psi^2 + r$; $k(\Delta)$ — корреляционная функция процесса. Таким образом,

$$I^{-1}(\Delta) = \left[\frac{N\dot{k}^2(\Delta)}{\sigma_\Sigma^4 - k^2(\Delta)} + \frac{2N\dot{k}^2(\Delta)\,k^2(\Delta)}{\left(\sigma_\Sigma^4 - k^2(\Delta)\right)^2}\right]^{-1}. \tag{44}$$

Из выражения (44) следует, что при $\Delta \to 0$ $I^{-1}(\Delta) \to \infty$, т. е. при сделанных предположениях малые значения Δ уточняться не будут. Это объясняется тем, что ошибка оценки производной совпадает с ее априорной дисперсией, т. е. $\mathscr{D}^1 \to \mathscr{D}$ при $\Delta \to 0$. В то же время из соотношения (13) находим конечное значение для $\tilde{R}$, означающее возможность уточнения Δ. Такой ошибочный вывод делается вследствие неучета в выражении (43) эффекта снижения точности за счет неточного знания производной поля.

Заключение. Получены соотношения для матриц J и $I(\Delta)$, с помощью которых, вычисляя J^{-1} и $I^{-1}(\boldsymbol{\Delta})$, можно в рамках байесовского и небайесовского подходов анализировать предельно достижимые точности совмещения дискретных гауссовых изображений, опираясь на известные статистические свойства исходного поля и ошибок его измерения.

Показано, что точность совмещения изображений в значительной степени определяется свойствами погрешности восстановления компонент градиента поля в узлах текущего изображения по зашумленным опорным измерениям поля.

Установлена связь матриц J^{-1} и $I^{-1}(\Delta)$ с матрицами, характеризующими точность совмещения в линеаризованных задачах оценивания, в частности при использовании метода наименьших квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буймов А. Г.** Анализ влияния корреляционных свойств неоднородного яркостного шума на ковариационную матрицу ошибок совмещения изображения // Автометрия.— 1985.— № 4.
2. **Антипин В. В., Буймов А. Г.** Статистический анализ ошибок совмещения изображений по методу наименьших квадратов // Автометрия.— 1985.— № 3.
3. **Буймов А. Г.** Корреляционно-экстремальная обработка изображений.— Томск: ТГУ, 1987.
4. **Mostafavi H., Smith F. W.** Image correlation with geometric distortion // IEEE Trans.— 1978.— **AES-14**, N 3.— P. I, II.— P. 487.
5. **Андросов В. А., Бойко Ю. В., Бочкарев А. Н., Однорог А. П.** Совмещение изображений в условиях неопределенности // Зарубежная радиоэлектрон.— 1985.— № 4.
6. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции.— М.: Сов. радио, 1972.— Т. 1.
7. **Степанов О. А.** Рекуррентный метод вычисления нижней границы точности оценивания в задаче с нелинейными измерениями // Изв. вузов. Приборостроение.— 1986.— № 2.
8. **Розенвассер Е. Н.** О построении матрицы Фишера для задачи оценивания параметров конечномерных систем // АиТ.— 1988.— № 2.
9. **Степанов О. А.** Использование неравенства Рао — Крамера в корреляционно-экстремальных системах // Корреляционно-экстремальные системы.— Томск: ТГУ, 1986.
10. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 5 мая 1989 г.

УДК 519.234

В. Г. АЛЕКСЕЕВ
(Москва)

БИСПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ: ВЫБОРКИ БОЛЬШОГО ОБЪЕМА

1. Вопросы, касающиеся статистического оценивания спектральных плотностей стационарных случайных процессов и однородных случайных полей, широко освещаются как в специальных монографиях, так и в большом количестве журнальных статей. В последние годы, однако, все большее внимание исследователей — физиков и математиков — привлекают спектральные плотности высших порядков (в их числе, прежде всего, биспектральные плотности). Обширный список литературы, посвященной статистическому оцениванию биспектральных плотностей (спектральных плотностей 3-го порядка) и практическим приложениям биспектрального анализа стационарных случайных процессов, может быть найден в [1—9].

В настоящей статье основное внимание уделяется методам биспектрального анализа стационарных случайных процессов по выборкам большого объема. Предложена вычислительная процедура, которая может быть интерпретирована следующим образом: исходная выборка из N отсчетов исследуемого случайного процесса разбивается на конечное число неперекрывающихся или частично перекрывающихся массивов меньшего объема, и дальнейшая обработка каждого из полученных массивов