где $\varphi(x, y)$ — случайный фазовый сдвиг. Если ограничить область определения $X(n, m)$ отрезком $[0, 2\pi]$ и положить

$$\varphi(x, y) = X(n, m), \tag{11}$$

то случайная фаза $\varphi(x, y)$ будет обладать всеми свойствами случайного поля $X(n, m)$.

Технология изготовления случайных поглощающих и фазовых экранов описана в [8]. Например, изменение фазы $\varphi(x, y)$ может быть достигнуто либо изменением показателя преломления m_0, либо изменением толщины экрана $h(x, y)$, либо тем и другим вместе. В случае «тонкого» экрана фазовый сдвиг равен

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda}[L(x, y) - L_0], \tag{12}$$

где $L(x, y) = hm_0$ в точке (x, y); L_0 — средняя оптическая длина пути; λ — длина волны излучения.

Бинарное представление случайных полей на рис. 1—3 получено путем пороговой бинаризации полутоновых случайных полей $X(n, m)$. Элементы поля с $X(n, m) > 1$ показаны черным цветом, а элементы с $X(n, m) \leqslant 1$ — белым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Оптико-электронные** методы обработки изображений/Под ред. С. Б. Гуревича.— Л.: Наука, 1982.
2. **Применение** методов Фурье-оптики/Под ред. Г. Старка.— М.: Радио и связь, 1988.
3. **Компьютеры** в оптических исследованиях/Под ред. Б. Фридена.— М.: Мир, 1983.
4. **Гудмен Дж.** Статистическая оптика.— М.: Мир, 1988.
5. **Шалыгин А. С., Палагин Ю. И.** Прикладные методы статистического моделирования.— Л.: Машиностроение, 1986.
6. **Обратные** задачи в оптике/Под ред. Г. П. Болтса.— М.: Машиностроение, 1984.
7. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов.— М.: Мир, 1974.— Вып. 1.
8. **Лукашова С. Г., Красюк И. К., Пашинин П. П., Прохоров А. М.** Аподизация световых пучков как метод повышения яркости лазерных установок на неодимовом стекле // Труды ИОФАН.— М.: Наука, 1987.— Т. 7.

Поступило в редакцию 3 февраля 1989 г.

УДК 621.391

А. Н. КУЧЕНЕВ, Е. А. САМСОНОВА, Ю. М. СМИРНОВ

(Москва)

СГЛАЖИВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РЕЛЬЕФА В ПРОТЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ ЭЛЕКТРОНОВ НИЗКОЙ ЭНЕРГИИ

Применение протяженных электронных и атомных пучков позволяет существенно повысить эффективность экспериментов, выполняемых с целью исследования электрон-атомных столкновений [1, 2]. Вместе с тем, как и при появлении любой новой методики исследования, здесь возникает ряд факторов, влияющих на точность и надежность получаемых результатов.

Один из важнейших среди этих факторов — отрицательный объемный заряд электронного пучка в пространстве столкновений. В идеальном случае пространство столкновений должно быть эквипотенциальным с тем, чтобы скорость электронов при их движении в этой области была неизменной, а траектории не искажались. В реальных пучках независимо от их протяженности это условие не выполняется, что приводит к веерообразному расхождению пучка и к отличию энергии электронов от значения, заданного на входе в пространство столкновений. Неодинаковость отличия в различных элементах объема пучка вызывает эффективное уширение распределения электронов по энергиям.

Угловая расходимость пучка может быть существенно уменьшена применением продольного магнитного поля, которое, однако, не всегда желательно и допустимо. Другая возможность, реально используемая во многих современных экспериментах,— компенсация отрицательного объемного заряда электронов положительным зарядом медленных (околотепловых) ионов, образующихся в пространстве столкновений в результате ионизующих соударений электронов с атомами. При этом уменьшается влияние заряда пучка как на траектории, так и на энергии электронов, поскольку пространство столкновений в целом приближается к эквипотенциальному. Однако такая компенсация эффективна лишь при сравнительно высокой концентрации ато-

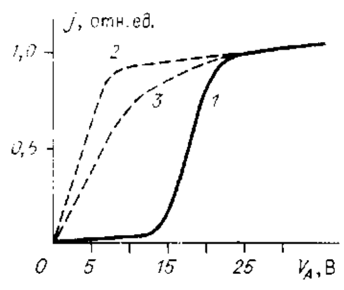


Рис. 1. Влияние пролетного расстояния между второй сеткой и коллектором НЭП (мм):

1 — 35; *2* — 4 (обе без эквипотенциализации); *3* — 26 (с эквипотенциализацией)

мов в пространстве столкновений, в противном случае время формирования ионного объемного заряда становится слишком большим.

Многочисленные эксперименты показали [3], что даже при давлении газа около $1{,}3\cdot10^{-2}$ Па ($1{,}0\cdot10^{-4}$ Тор) вторичные процессы могут существенно искажать получаемые результаты; поэтому желательно дальнейшее снижение концентрации исследуемых атомов, которое неизбежно повлечет за собой ухудшение компенсации объемного заряда. Кроме того, компенсация ионами неэффективна в области низких энергий электронов, когда образование ионов фактически прекращается, а именно в этой области энергий влияние объемного заряда наиболее велико. Самый важный дефект ионной компенсации состоит в том, что концентрация ионов зависит от многих факторов, зачастую трудно контролируемых, и почти не поддается управлению.

Радикальным средством снижения роли объемного заряда, несомненно, является уменьшение самого объемного заряда за счет снижения плотности тока в пучке. Однако этот путь ведет к автоматическому снижению регистрируемого сигнала, который и без того оказывается близок к пределу чувствительности аппаратуры. Применение протяженных пучков и в этом отношении дает значительные преимущества, благодаря общему более высокому уровню сигнала.

Предложен и реализован альтернативный вариант сглаживания потенциального рельефа, обсуждавшийся в [1, 2] и особенно пригодный при использовании протяженных пучков. Вариант основан на применении принудительно заданных эквипотенциалей, расположенных в пространстве столкновений. Эффективность этого способа эмпирически показана путем регистрации ВАХ низковольтной электронной пушки (НЭП), формирующей протяженный электронный пучок, без применения и с применением принудительно заданных эквипотенциалей (рис. 1). Ленточный электронный пучок имеет поперечник 12×200 мм при пролетном расстоянии 26...30 мм; эквипотенциали представляют собой металлические нити диаметром 25...33 мкм, натянутые в пространстве столкновений с шагом 4×4 мм. Прозрачность системы около 95 %.

Опыт эксплуатации такой НЭП (рис. 2) показал, что проблема объемного заряда в значительной мере снимается, однако для численных значений провисания потенциала существуют лишь грубые оценки. Корректные зондовые измерения в условиях нашего эксперимента вряд ли могут быть выполнены. Поэтому распределение потенциала в обеих НЭП рассчитывалось с помощью ЭВМ, результаты расчета излагаются в настоящей работе.

Для расчета брались реальные размеры работающих НЭП и принималось, что энергия электронов на входе в пространство столкновений составляет 10 эВ при плотности тока пучка 1,0 мА/см^2 (реальная плотность тока несколько ниже). Пучок предполагается параллельным и однородным. Поскольку протяженность пучка в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, на порядок превосходит его поперечные размеры, задача может рассматриваться как двумерная.

Математически задача численной оценки провисания потенциала в НЭП сводится к задаче Дирихле, т. е. к решению уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = f$$

при условии, что на границе Γ прямоугольной области G потенциал $\varphi = 0$, а внутри области G есть система точек, где также $\varphi = 0$ (рис. 3). Или короче

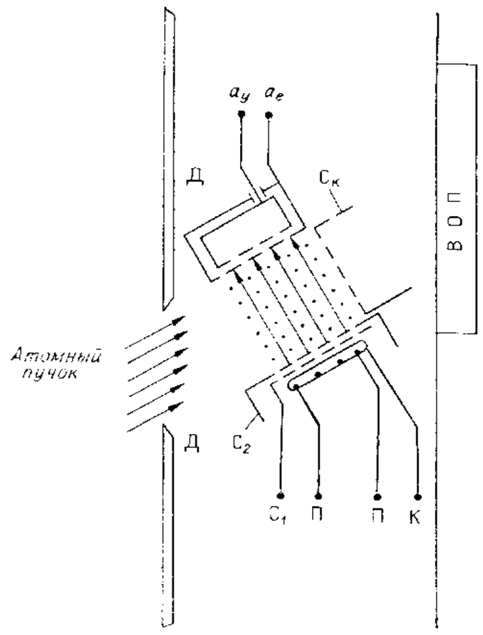
$$\begin{cases} A\varphi = f = -\rho/\varepsilon_0; \\ \varphi\,|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{1}$$

при условии, что внутри G есть особенности. Здесь A — матрица, соответствующая разностной схеме с особенностями внутри области G; ρ[Кл/м^3] — объемная плотность заряда; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Численное решение задачи (1) реализуется методом матрицы емкости [4], для чего заменим задачу (1) привычной задачей Дирихле (как будто в области G нет особенностей) и будем решать уравнение Пуассона с измененной правой частью

$$\begin{cases} B\varphi = f + \omega; \\ \varphi\,|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где B — лапласиан.



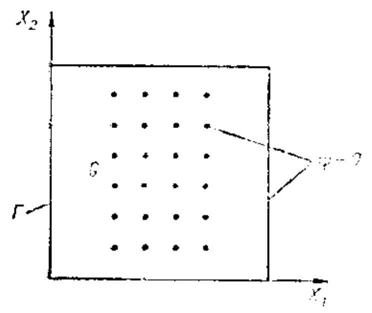


Рис. 3. Схема области задачи Дирихле

Рис. 2. Схема НЭП с эквипотенциализацией:

Д — водоохлаждаемые диафрагмы; a_y, a_e — внутренний и внешний коллекторы электронов; $С_К$ — сетка для проведения калибровки (калибровочная сетка); К — катод; $С_1$ и $С_2$ — управляющие сетки; П — подогреватель; ВОП — водоохлаждаемая панель. (Протяженность НЭП в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, значительно больше длины электронного пучка)

Для того чтобы φ было решением исходной задачи (1), нужно «подправить» правую часть на некоторую величину ω.

Чтобы перейти от задачи (1) к задаче (2) и определить поправку ω, сделаем ряд алгебраических преобразований. Умножим матрицу A на единичную матрицу E:

$$AB^{-1}B\varphi = f. \qquad (3)$$

Сравним матричные уравнения (2) и (3):

$$AB^{-1}(f+\omega) = f \qquad (4)$$

или

$$AB^{-1}\omega = (E - AB^{-1})f = (B - A)B^{-1}f.$$

Обозначив $B^{-1}f = v$, имеем

$$AB^{-1}\omega = (B - A)v. \qquad (5)$$

Теперь решение задачи (1) разбивается на три этапа:

1) решаем задачу Дирихле относительно фиктивной переменной v:

$$\begin{cases} Bv = f; \\ v\,|_{\Gamma} = 0; \end{cases}$$

2) затем решаем матричное уравнение (5) относительно поправки ω;

3) ищем решение φ из задачи (2) со скорректированной правой частью.

Основная особенность состоит в реализации второго этапа.

Заметим, что вектор $(B - A)v$ имеет m компонент, где m — число особенностей внутри области G (в нашем эксперименте $m = 35$). Размерность вектора ω та же, что и m, так как

$$(B - A)v = AB^{-1}\omega = [E - (B - A)B^{-1}]\omega.$$

Введем в подпространство R_m размерности m базис

$$Q = [q_1, q_2, \ldots, q_m],\ q_k = Qe_k,$$

где e_k — единичный орт, $k = \overline{1, m}$.

Длина N каждого базисного вектора велика: $N = M_1 * N_1$. Здесь M_1 и N_1 — число точек сетки с шагами H_1 и H_2 в направлениях x_1 и x_2 соответственно. Тогда

$$\omega = Q\widehat{\omega},$$

где $\widehat{\omega}$ — вектор-столбец: $\widehat{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{Bmatrix}$,

или

$$\omega = (Q^{T}Q)^{-1}Q^{T}\widehat{\omega}.$$

Аналогично подействуем оператором $(Q^TQ)^{-1}Q^T$ на матричное уравнение (5). В результате получим

$$C\widehat{w} = \varkappa,$$

где

$$\chi = (Q^TQ)^{-1}Q^T(B-A)v; \tag{6}$$

$$C = (Q^TQ)^{-1}Q^TAB^{-1}Q. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что размерность матрицы C есть $m * m$. Отметим, что матрица, обратная C, является матрицей емкости (отсюда и название метода).

Рассмотрим подробнее построение матрицы C. Пусть e_k — единичный орт, $e_k \in R_m$, $m = 35$. Тогда k-й столбец матрицы C определим таким образом:

$$C_k = Ce_k = (Q^TQ)^{-1}Q^TAB^{-1}Qe_k.$$

Введем переменную

$$z_k = B^{-1}q_k, \quad k = \overline{1,\ m}. \tag{8}$$

Записав

$$C = (Q^TQ)^{-1}Q^TAB^{-1}Q = E - (Q^TQ)^{-1}Q(B-A)B^{-1}Q$$

и умножив C на единичный орт e_k, окончательно получим вектор-столбец

$$C_k = Ce_k = e_k - (Q^TQ)^{-1}Q^T(B-A)z_k. \tag{9}$$

Итак, задача (1) численно реализована на ЭВМ БЭСМ-6 в следующем порядке:

1. Решение задачи Дирихле относительно фиктивной переменной v

$$\begin{cases} Bv = f; \\ v|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

С помощью подпрограммы FOIS32, разработанной в лаборатории разностных методов МГУ им. М. В. Ломоносова, найдено решение v в регулярной области G разностного аналога смешанной краевой задачи для эллиптического уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами методом полной редукции [5].

2. Формирование матрицы Q и нахождение вектора χ:

$$\chi = (Q^TQ)^{-1}Q^T(B-A)v.$$

3. Решение уравнения Пуассона относительно фиктивной переменной z:

$$\begin{cases} Bz = q; \\ z|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

На этом этапе определяются векторы z_k, $k = \overline{1,\ m}$, аналогично п. 1.

4. Согласно матричному уравнению (9) формируются столбцы-матрицы емкости C.

5. Решается система линейных алгебраических уравнений

$$C\widehat{\omega} = \chi$$

относительно вектора $\widehat{\omega}$ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу (использовалась подпрограмма ASG1R).

6. Нахождение вектора ω:

$$\omega = Q\widehat{\omega}.$$

Умножение матрицы Q на решение системы линейных алгебраических уравнений (ЛАУ) $\widehat{\omega}$ определяет поправку правой части в уравнении Пуассона задачи (2).

7. Решение уравнения Пуассона в прямоугольной области со скорректированной правой частью

$$\begin{cases} B\varphi = f + \omega; \\ \varphi|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

осуществляется с использованием подпрограммы FOIS32.

Результаты решения задачи Дирихле для распределения потенциала в пространстве столкновений в конструкции без нитей при указанных выше условиях эксперимента представлены системой эквипотенциалей на рис. 4, *а*. В центральной точке провисание потенциала достигает 39 В; такое значение, бессмысленное с точки зрения физической задачи, указывает лишь, что при энергии электронов 10 эВ в этой системе плотность тока 1 мА/см² не может быть реализована и электронный пучок будет заперт собственным объемным зарядом.

Система эквипотенциалей для случая, когда есть принудительно заданные локальные эквипотенциали в виде нитей, изображена на рис. 4, *б*. В этом случае максимальное провисание потенциала достигает всего лишь 2,8 В, что отнюдь не препятствует распространению пучка с энергией 10 эВ. Области, в которых потенциал пространства отличается от среднего значения более чем на 1 В, занимают менее 8 % от всего объема электронного пучка. Следует иметь в виду, что в реальном пуч-

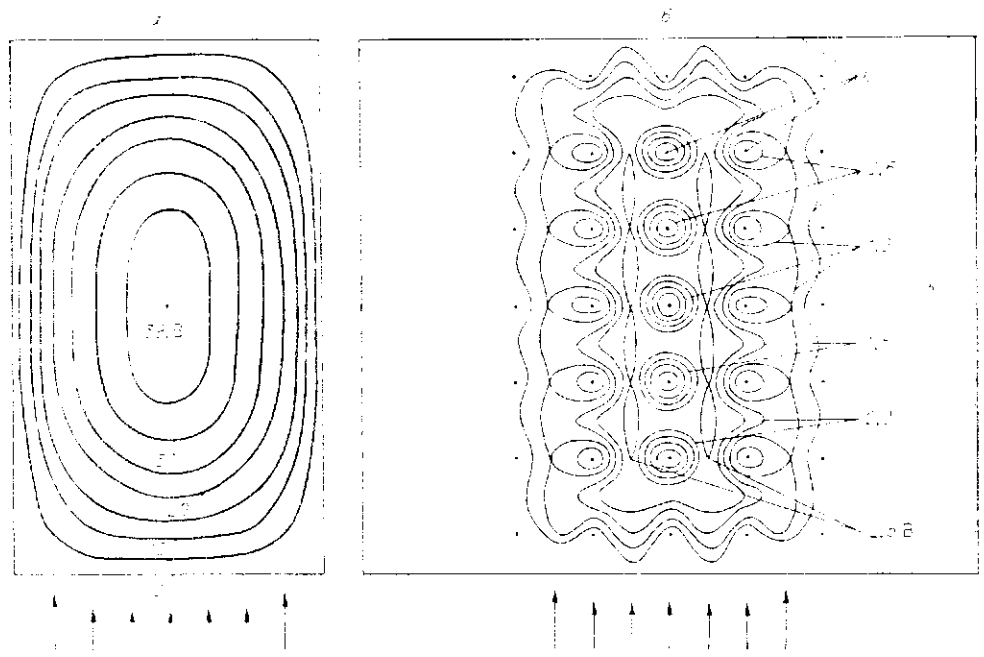


Рис. 4. Распределение потенциала в пространстве столкновений НЭП:
а — без эквипотенциализации; *б* — с эквипотенциализацией. Взято соотношение размеров, имеющееся у реально работавших конструкций. Направление электронного пучка указано стрелками; крайние стрелки — границы пучка. Точки соответствуют металлическим нитям

ке плотность тока по его сечению не остается неизменной; происходит перераспределение объемного заряда под действием поля, приводящее к дополнительному сглаживанию «пиков» и «впадин» потенциального рельефа.

Таким образом, численное решение задачи Дирихле показывает, что применение принудительно заданных локальных эквипотенциалей приводит к эффективному снижению роли объемного заряда и сглаживанию потенциального рельефа. Преимущества этого метода наиболее значительны при работе с протяженными электронными пучками низких энергий, так как в таких пучках минимальна роль вторичных процессов (неупругое рассеяние электронов на нитях и вторичная эмиссия, распыление материала нитей и т. п.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Смирнов Ю. М.** Сечения возбуждения атома гелия электронным ударом // Астрон. журн.— 1984.— **61**, № 6.
2. **Смирнов Ю. М.** Исследование сечений возбуждения атомов с применением протяженных пересекающихся пучков // Физика электронных и атомных столкновений.— Л.: ФТИ АН СССР, 1985.
3. **Van Raan A. F. J., Moll P. G., Van Eck J.** Absolute cross sections for excitation of the 4^3S, 3^3P, and 4^3D levels of helium by electron impact: Measurements at very low target-gas pressures // J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.— 1974.— **7**, N 8.— P. 950.
4. **Самарский А. А., Капорин И. Е., Николаев Е. С.** Некоторые современные методы решения сеточных уравнений // Изв. вузов. Математика.— 1983.— № 7(254).
5. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.

Поступило в редакцию 4 ноября 1988 г.