УДК 512.77 : 514.001.57

А. Г. БУРАВКИН
(Минск)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Постановка задачи. В статье под получением изображения алгебраической поверхности понимается формирование с любой наперед заданной точностью точечной модели [1] проекции этой поверхности при параллельном проецировании на заданную плоскость.

Пусть алгебраическая поверхность P задана в некоторой системе координат $C1$ уравнением $A(x, y, z)=0$, где $A(x, y, z)$ — многочлен от трех переменных, не имеющий нетривиальных кратных делителей. Пусть, далее, плоскость проекции в системе координат $C0$ имеет вид $z=0$. С помощью линейных преобразований перехода от $C1$ к $C0$ можно получить уравнение поверхности P в системе координат $C0$ вида $F(x, y, z)=0$.

Необходимо получить точечную модель очерка $q(P)$ поверхности P в некотором (наперед заданном) прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 1).

Общая схема решения. Предлагается следующая последовательность нахождения точечной модели очерка.

1. Получить уравнение, определяющее такое множество точек плоскости проекции, которое содержит очерк поверхности.
2. Получить в прямоугольнике $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ с заданной точностью точечную аппроксимацию алгебраических кривых, соответствующих этому уравнению, с выделением (удалением) невидимых и мнимых частей очерка.

Получение уравнения очерка. Пусть $F'_z(x, y, z)$ — производная по переменной z многочлена от трех переменных F. Тогда для любой точки (x_0, y_0) множества $q(P)$ существует такой прообраз (x_0, y_0, z_0) относительно операции проецирования, принадлежащий P, что $F'_z(x_0, y_0, z_0)=0$. Пусть, далее, $R(x, y)$ — результант многочленов F и F'_z по переменной z. Результант $R(x, y) \not\equiv 0$, ибо F — многочлен без кратных компонент, и, значит, F и F'_z не имеют общих делителей [2]. Процедуры вычисления полиномиальных результантов известны [2, 3].

Если $(x_0, y_0) \in q(P)$, то $R(x_0, y_0)=0$, ибо существует $z_0 \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ такое, что $F(x_0, y_0, z_0)=F'_z(x_0, y_0, z_0)=0$. Таким образом, множество точек плоскости, которое определяется уравнением $R(x, y)=0$, содержит очерк поверхности P.

Точечная аппроксимация алгебраической кривой. Вышеуказанный многочлен $R(x, y)$ определяет, как правило, некоторую алгебраическую кривую с кратными компонентами [4]. С помощью алгоритмов нахождения НОД (наибольшего общего делителя) многочленов $R(x, y)$ и $R'_y(x, y)$ [5] и последующего деления $R(x, y)$ на НОД (R, R'_y) можно получить $f(x, y)$ такой, что уравнение $f(x, y)=0$ определяет алгебраическую кривую без кратных компонент. При этом множества точек плоскости, соответствующие уравнениям $R(x, y)=0$ и $f(x, y)=0$, совпадают.

Известны методы точечной аппроксимации (например, метод прогноз-коррекции [6]), которые могут быть применены к алгебраической кривой без кратных компонент при условии, что на каждой из ветвей любой компоненты указана неособая начальная точка.

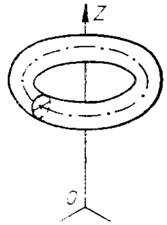

Рис. 1

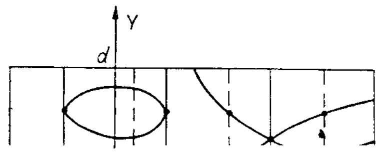

Рис. 2

Таким образом, задача точечной аппроксимации сводится к задаче поиска начальных точек ветвей компонент кривой $f(x, y)=0$.

Ввиду того что многочлен $f(x, y)$ не имеет кратных компонент, существует ненулевой результант $r(x)$ по переменной y многочленов $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. Если (x_0, y_0) — особая точка кривой $f(x, y)=0$ (или f), т. е. $f(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0$, то $r(x_0)=0$. Таким образом, абсциссы всех особых точек кривой f являются корнями уравнения $r(x)=0$.

С помощью алгоритмов нахождения НОД [5] построим многочлен $r_0(x)=r(x)/\text{НОД}(r(x), r'(x))$. Уравнение $r_0(x)=0$ определяет некоторое множество прямых (параллельных оси OY) вида $x=x_i$, где $r_0(x_i)=0$.

Рассмотрим теперь прямоугольник $(a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d)$ и одну из ветвей некоторой компоненты кривой f. Априори возможны следующие варианты.

Ветвь не замкнута. Тогда она не ограничена и пересекает одну из сторон (или несколько сторон) прямоугольника (рис. 2). Если точка пересечения имеет координаты (x_p, y_p), то либо $x_p=a$, либо $x_p=b$, либо $y_p=c$, либо $y_p=d$. Если $f'_y(x_p, y_p)\neq 0$, эту точку можно избрать в качестве начальной.

Ветвь замкнута. Тогда существуют точки разворота относительно y ([6]) ветви (x_s, y_s). В этих точках $f(x_s, y_s)=f'_y(x_s, y_s)=0$, а значит, $r_0(x_s)=0$.

Предлагается найти все корни уравнения $r'_0(x)=0$. Согласно теории Штурма [7], эти корни попадут в промежутки между корнями $r_0(x)$. Это означает, что если $r_0(x_1)=0$, то $r'_0(x_1)\neq 0$. Следовательно, если существует множество $\{y_j\in\mathbf{R}\}$ такое, что $f(x_1, y_j)=0$, то $f'_y(x_1, y_j)\neq 0$ при любом j (см. рис. 2).

Значит, точки пересечения ветвей компонент кривой f с прямыми $x=x_i$, где $r'_0(x_i)=0$, можно взять в качестве начальных для применения алгоритмов точечной аппроксимации [6].

Таким образом, для любой ветви каждой из компонент кривой f найдется по крайней мере одна точка, которую можно избрать в качестве начальной.

Удаление мнимых и невидимых частей очерка. Множество прямых, задаваемых уравнением $r_0(x)=0$, разбивает каждую из ветвей на несколько кусков (см. рис. 2), каждый из которых заключен между двумя (ближайшими) «соседними» прямыми, причем, по построению, на каждом куске имеется начальная точка.

Геометрический смысл очерка заключается в том, что любая ветвь очерка есть граница проекций областей, для точек которых существует одно и то же количество прообразов на поверхности (рис. 3). Поэтому если на ветви существуют видимый (*1*) и мнимый (либо невидимый — *2*) куски, то существует и точка, разделяющая их, причем через эту точку проходит еще одна ветвь границы. Поэтому точка, отделяющая куски,— особая точка кривой f.

Отсюда следует, что начальные точки являются характерными в том смысле, что они определяют видимость кусков ветвей, которым они принадлежат.

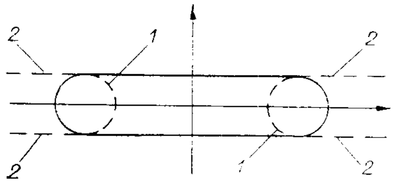

Рис. 3

Таким образом, необходимо проверить все начальные точки на существование прообразов (для невидимых частей ближайший к плоскости $z=0$ по направлению проецирования прообраз M удовлетворяет неравенству $F_z'(M)\neq 0$) известными методами [8].

Наконец, каждый видимый кусок аппроксимируется методом [6].

Методика. Подытоживая предыдущие теоретические рассуждения, имеем:

0. Даны многочлен $F(x, y, z)$, определяющий поверхность $F(x, y, z)=0$, и плоскость проекции $(z=0)$.

1. Построение уравнения очерковой — результанта по z многочленов F и F_z': $R(x, y)=0$.

2. Преобразование многочлена $R(x, y)$ к виду

$$f(x, y)=R(x, y)/\text{НОД}\left(R, R_y'\right).$$

3. Вычисление начальных точек на ветвях компонент f:

А. Вычисление результанта по y $r(x)$ многочленов f и f_y'. Преобразование многочлена $r(x)$ к виду

$$r_0(x)=r(x)/\text{НОД}(r, r').$$

Б. Вычисление корней $\{x_k\}$ многочлена $r_0'(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В. Поиск начальных точек, т. е. решение уравнений вида $f(x_j, y)=0$; $f(a, y)=0$; $f(b, y)=0$; $f(x, c)=0$; $f(x, d)=0$ и проверка каждой пары на выполнение условия

$$f_y'(x_0, y_0)\neq 0.$$

4. Проверка каждой начальной точки на существование прообразов:

А. Мнимые куски. Если уравнение $F(x_0, y_0, z)=0$ не имеет действительных решений.

Б. Невидимые куски. Если $K=\{z_k|F(x_0, y_0, z_k)=0\}$, $z_0=\min K$ и $F_z'(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, то соответствующий кусок является невидимым.

5. Выбираются видимые начальные точки и методами типа прогноз-коррекции строится точечная аппроксимация соответствующих кусков с любой наперед заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рекомендации САПР.** Типовые методы геометрического моделирования объектов проектирования. Р50-34-87/Е. А. Стародетко, А. Г. Буравкин, О. И. Глушков и др.— М.: Госстандарт СССР, 1988.
2. **Бураўкін А. Г., Старадзетка Я. А.** Праецыраванне алгебраічных паверхняў.— Мінск, 1989.— (Прэпрынт/АН БССР, Ін-т тэхн. кібернетыкі; 9).
3. **Collins G. E.** The calculation of multivariate polynomial resultants // JACM.— 1971.— 18, N 4.— P. 515.
4. **Уокер Р.** Алгебраические кривые.— М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
5. **Brown W. S.** On Euclid's algorithm and the computation of polynomial greatest common divisors // JACM.— 1971.— 18, N 4.— P. 478.
6. **Стародетко Е. А., Щепко П. С.** Получение всех ветвей плоской алгебраической кривой.— Минск. 1988.— (Препр./АН БССР, Ин-т техн. кибернетики; 8).
7. **Ван дер Варден Б. Л.** Алгебра.— М.: Наука, 1976.
8. **Стародетко Е. А., Яцкевич И. М.** Решение нелинейных уравнений.— Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1980.

Поступила в редакцию 16 января 1990 г.