УДК 519.25

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРИОДА

Задача оценивания периодического процесса на основании наблюдений его зашумленных значений постоянно возникает в практике обработки экспериментальных данных различной природы. При этом наиболее частым является случай, когда наблюдения производятся в равноотстоящие моменты времени. Если величина периода априорно известна, то обычным методом, применяемым при сглаживании такого процесса, служит приближенное представление искомой периодичности с помощью отрезка тригонометрического ряда, что позволяет свести задачу к оцениванию параметров в модели линейной регрессии [1].

Однако на практике нередко встречается случай, когда величина периода неизвестна, но может быть указан интервал T_0 его возможных значений. В этом случае обычно поступают следующим образом. На заданном интервале выбирается некоторая сетка значений периода и производится решение задачи при каждом из выбранных значений. В качестве оптимального выбирается то решение, для которого величина невязки между измеренными и сглаженными значениями процесса минимальна.

Основные недостатки такого метода решения задачи сводятся к следующим. Во-первых, выбор длины отрезка тригонометрического ряда не поддается формализации, что вносит элемент субъективизма. Во-вторых, глобальная аппроксимация периодической функции сложной формы требует достаточно большого набора тригонометрических функций, что приводит к необходимости решения линейной системы высокого порядка. Наконец, стремление к уменьшению ошибки в определении периода, связанной с шагом сетки его значений, заставляет выбирать достаточно частую сетку и, следовательно, многократно повторять процедуру решения линейной системы.

В связи с этим представляет практический интерес исследовать возможность других подходов к решению этой задачи. Ниже рассматривается одна из таких возможностей, основанная на идее локальной аппроксимации искомой функции и свойстве ее периодичности. Предполагается, что гладкость функции и величина шага наблюдения таковы, что в интервале между соседними наблюдениями она может быть достаточно хорошо аппроксимирована линейной. Рассматривается случай, когда ширина интервала T_0 не превосходит величины периода. Показано, что при этих условиях задача приближенного определения величины периода на основании точных значений функции может быть сведена к задаче минимизации квадратичного функционала с учетом системы линейных ограничений, а ее вычислительная сторона — к решению линейной системы, порядок которой определяется числом шагов наблюдения, укладывающихся в интервале T_0.

Рассмотрена возможность использования этого подхода к оцениванию периода для решения задачи сглаживания процесса, которая в этом случае сводится к нахождению собственных векторов симметрической матрицы. Показана возможность применения этого метода сглаживания и для процесса, являющегося суммой двух периодических процессов, период одного из которых известен, а для другого задан только интервал его возможных значений. Эффективность метода показана на модельном примере.

1. **Постановка задачи и метод решения.** Пусть значения $\{y_i\}_1^n$ функции $y(t)$, заданные на равномерной сетке значений аргумента $\{t_i\}_1^n$ с шагом Δ, удовлетворяют модели

$$\begin{gathered} Y = X + \varepsilon;\ E[\varepsilon] = 0;\ D[\varepsilon] = \sigma^2 I; \\ Y = |y_1, \ldots, y_n|^T;\ X = |x_1, \ldots, x_n|^T; \\ x_i = x(t_i),\ i = 1, \ldots, n; \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь m_1, m_2 — целые положительные числа такие, что

$$m_2 - m_1 + 1 \leqslant k; \tag{1.4}$$

$$n \geqslant m_2 + k, \tag{1.5}$$

$k = INT(T)$, где $INT(\cdot)$ — целая часть числа.

Предполагается, что функция $x(t)$ гладкая, и в силу (1.2) приближенно выполняются условия

$$x_{i+1} = a_1 x_{i-k} + a_2 x_{i+1-k},\ i = m_2, \ldots, n-1; \tag{1.6}$$

$$a_1 = |T - k|;\ a_2 = |T - k - 1|. \tag{1.7}$$

Будем считать

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{array}{c|c|c} x_1 & & x_k \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_k & & x_{2k-1} \end{array} \right\| = k. \tag{1.8}$$

Требуется оценить значения периода T и вектора X. Введем обозначения:

$$M(X) = \left\| \begin{array}{c|c|c} x_1 & & x_{m_2+1} \\ & \cdots & \\ x_{n-m_2} & & x_n \end{array} \right\| = \|\underbrace{M_1(X)}_{k} \mid M_2(X)\|;$$

$$\underset{(m_2+1)\times 1}{a} = |0, \ldots, 0, \underbrace{a_1, a_2, 0, \ldots, 0, -1}_{k+2}|^T.$$

Запишем систему (1.6) в форме

$$0 = M(X)a. \tag{1.9}$$

На основании (1.3) последние m_1 компонент вектора a имеют вид

$$0, \ldots, 0, -1,$$

а в результате (1.7)

$$a_1 + a_2 = 1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{m_2} a(i) = 1,$$

где $a(i)$ — i-й элемент вектора a. Следовательно, вектор a удовлетворяет системе ограничений

$$p = Pa, \tag{1.10}$$

$$\underset{(m_1+1)\times 1}{p} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{array} \right|;\quad \underset{(m_1+1)\times(m_2+1)}{P} = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \cdots\ 1 \\ \hline 0 & \underset{m_1\times m_1}{I} \end{array} \right\|.$$

Введем функционал

$$J_1(a) = \|M(X)a\|_2,$$

где $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма вектора, и покажем, что задача

$$\min J_1(a), \qquad (1.11)$$

$$a \in R^{m_2+1},\ p = Pa$$

имеет единственное решение. Рассмотрим матрицу

$$S = \left\| \begin{array}{c:c} M_1(X) & M_2(X) \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{P} \end{array} \right\|.$$

На основании (1.8) при $n - m_2 \geqslant k$ $\operatorname{rank} M_1(X) = k$, а структура матрицы P такова, что ранг последних m_1 столбцов матрицы S равен m_1. Следовательно, принимая во внимание структуру матрицы S, получим

$$\operatorname{rank} S \begin{cases} \geqslant k + m_1, & \text{если } k + m_1 < m_2 + 1; \\ = m_2 + 1, & \text{если } k + m_1 \geqslant m_2 + 1. \end{cases} \qquad (1.12)$$

Запишем общее решение системы (1.10) в форме

$$a = a_0 + Hh, \qquad (1.13)$$

где a_0 — частное решение; h — вектор свободных параметров, H — $(m_2 + 1) \times (m_2 - m_1)$-матрица такая, что $PH = 0$, $\operatorname{rank} H = m_2 - m_1$.

В силу (1.9), (1.10)

$$-M(X)a_0 = M(X)Hh. \qquad (1.14)$$

Как известно [2], если A и B — $n_1 \times m$- и $n_2 \times m$-матрицы такие, что

$$\operatorname{rank} A = m;\ \operatorname{rank} B = m - s, \qquad (1.15)$$

то

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{array}{c} A \\ \hdashline B \end{array} \right\| = \operatorname{rank}(AC) + \operatorname{rank} B,$$

где C — $m \times s$-матрица, удовлетворяющая условиям

$$BC = 0,\ \operatorname{rank} C = s.$$

В силу (1.12), (1.15) и полноты ранга матрицы P

$$\operatorname{rank}(MH) \begin{cases} \geqslant k - 1, & \text{если } k + m_1 < m_2 + 1; \\ = m_2 - m_1, & \text{если } k + m_1 \geqslant m_2 + 1. \end{cases}$$

Следовательно, условие (1.4) гарантирует единственность решения задачи (1.11).

Легко проверить, что в случае точного выполнения условия (1.6) связь между величиной периода T и значением вектора a дается выражением

$$T(a) = \sum_{i=1}^{m_2} (m_2 + 1 - i)\, a(i). \qquad (1.16)$$

Выберем в качестве оценки $\bar{a}$ вектора a решение задачи (1.11), полученное при замене неизвестной матрицы $M(X)$ ее оценкой $M(Y)$, а в качестве оценки искомого периода величину $T(\bar{a})$. Введем матрицу

$$\underset{(n-\tilde{k}-1)\times n}{D} = \left\| \begin{array}{ccccccc} -1 & & & \tilde{a}_2 & & \tilde{a}_1 & 0 \\ & \ddots & 0 & & \ddots & & \ddots \\ 0 & & -1 & & \tilde{a}_2 & & \tilde{a}_1 \end{array} \right\|;$$

$$\bar{a}_1 = |T(\bar{a}) - \tilde{k}|;\ \bar{a}_2 = |T(\bar{a}) - \tilde{k} - 1|;\ \tilde{k} = INT(\bar{a})$$

и рассмотрим систему $Y = X + \varepsilon$; $0 = DX$.

Выберем в качестве оценки вектора X вектор $\hat{X}$, являющийся решением минимизационной задачи

$$\min \|Y - X\|_2,$$
$$X \in R^n, \; 0 = DX.$$

Пусть R — $n \times (\tilde{k} + 1)$-матрица, удовлетворяющая условию

$$R^T R = I \tag{1.17}$$

и такая, что $DR = 0$. Тогда вектор $\hat{X}$ может быть записан в форме

$$\hat{X} = R\hat{r},$$

где $\hat{r}$ — решение метода наименьших квадратов (МНК) для системы $Y = Rr$, откуда в силу (1.17) получим

$$\hat{X} = RR^T Y. \tag{1.18}$$

2. **Обобщение на случай, когда наблюдается сумма двух периодических процессов.** Используя принятые обозначения, рассмотрим случай, когда значения $\{y_i\}_1^n$ удовлетворяют модели

$$Y = X + Z + \varepsilon, \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} Z = |z_1, \ldots, z_n|^T; \; z_i = z(t_i); \; i = 1, \ldots, n; \\ z(t) = z(t + T_0); \; T_0 = \text{const}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть значение T_0 задано, а относительно значения T известно:

$$T \in [m_1, m_2], \tag{2.3}$$

где m_1, m_2 — целые положительные числа такие, что

$$m_2 - m_1 + 1 \leqslant k; \; n \geqslant m_2 + k + l + 1; \; l = INT(T_0). \tag{2.4}$$

Предполагается, что функция $z(t)$ гладкая, и в силу (2.3) приближенно выполняются условия

$$\begin{gathered} z_{i+l+1} = b_1 z_i + b_2 z_{i+1}; \; i = 1, \ldots, n - l - 1; \\ b_1 = |T_0 - l|; \; b_2 = |T_0 - l - 1|. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Введем вектор

$$\overline{Y} = X + Z$$

и матрицу

$$\underset{(n-m_2-l-1)\times(n-m_2)}{L} = \left\| \begin{matrix} b_1 & & b_2 & & -1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & 0 & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{b_1 & & b_2 & & -1}_{l+2} \end{matrix} \right\|$$

и будем считать

$$\operatorname{rank}(LM_1(\overline{Y})) = \operatorname{rank} M_1(\overline{Y}) = k. \tag{2.6}$$

Требуется оценить величину T и значения векторов X и Z.

Введем обозначения

$$d = |d_1, \ldots, d_{n-m_2}|^T = M(Z)\,a;$$

$$\left\| \begin{matrix} \mu_1(X) \\ \vdots \\ \mu_{n-m_2}(X) \end{matrix} \right\| = M(X). \tag{2.7}$$

Очевидно, что в результате (2.5)

$$\begin{gathered} \mu_{i+l+1}(Z)\,a = (b_1 \mu_i(Z) + b_2 \mu_{i+1}(Z))\,a, \\ i = 1, \ldots, n - m_2 - l - 1. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Поскольку в силу (1.9)

$$(\mu_i(X)+\mu_i(Z))a=\mu_i(Z)a,\ i=1,\ \ldots,\ n-m_2,$$

а по определению вектора $\overline{Y}$

$$M(\overline{Y})=M(X)+M(Z),$$

то из (2.7) следует

$$d=M(\overline{Y})a. \tag{2.9}$$

В силу (2.7) и (2.8)

$$d_{i+l+1}=b_1d_i+b_2d_{i+1},\ i=1,\ \ldots,\ n-m_2-l-1.$$

Умножая обе части системы (2.9) слева на матрицу L, получим

$$LM(\overline{Y})a=0. \tag{2.10}$$

Введем функционал

$$J_2(a)=\|LM(\overline{Y})a\|_2$$

и покажем, что задача

$$\begin{gathered}\min J_2(a),\\ a\in R^{m_2+1},\ p=Pa\end{gathered} \tag{2.11}$$

имеет единственное решение. Рассмотрим матрицу

$$S_H=\left\|\begin{array}{c|c}LM_1(\overline{Y}) & LM_2(\overline{Y})\\ \hline \multicolumn{2}{c}{P}\end{array}\right\|.$$

Приемом, использованным в п. 1, легко показать, что

$$\operatorname{rank} S_H\begin{cases}\geqslant k+m_1, \text{ если } k+m_1<m_2+1;\\ =m_2+1, \text{ если } k+m_1\geqslant m_2+1.\end{cases} \tag{2.12}$$

В результате (2.10) и (1.13)

$$-LM(\overline{Y})a_0=LM(\overline{Y})Hh.$$

Поскольку на основании (1.15)

$$\operatorname{rank} S_H=\operatorname{rank}(LM(\overline{Y})h)+\operatorname{rank} P,$$

то в силу (2.12) и полноты ранга матрицы P

$$\operatorname{rank}(LM(\overline{Y})H)\begin{cases}\geqslant k-1, \text{ если } k+m_1<m_2+1;\\ =m_2-m_1, \text{ если } k+m_1\geqslant m_2+1.\end{cases}$$

Следовательно, условие (2.4) гарантирует единственность решения задачи (2.11).

Выберем в качестве оценки $\tilde{a}$ вектора a решение задачи (2.11), полученное при замене неизвестной матрицы $M(\overline{Y})$ ее оценкой $M(Y)$. Введем матрицу

$$\underset{(n-l-1)\times n}{L^*}=\left\|\begin{matrix}b_1 & & b_2 & & & -1 & & 0\\ & \ddots & & \ddots & 0 & & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{b_1 & & b_2 & & & -1}_{l+2}\end{matrix}\right\|$$

и рассмотрим систему

$$Y=X+Z+\varepsilon;\quad 0=L^*Z\quad 0=DX.$$

В качестве оценки векторов X, Z выберем векторы $\tilde{X}$, $\tilde{Z}$, являющиеся решением задачи

$$\min \|Y - X - Z\|_2;$$
$$X \in R^n,\ 0 = DX;$$
$$Z \in R^n,\ 0 = L^*Z.$$

Покажем, что такое решение единственно. Пусть Q – $n \times (l+1)$-матрица полного ранга, удовлетворяющая условию

$$L^*Q = 0;$$

$$I^* = \left\| \underset{n\times n}{I} \,\middle|\, \underset{n\times n}{I} \right\|; \quad A = \left\| \begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right\|; \quad B = \left\| \begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & L^* \end{array} \right\|; \quad V = \left| \begin{array}{c} \tilde{X} \\ \tilde{Z} \end{array} \right|.$$

Тогда вектор V может быть записан в форме

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{array}{c} I^* \\ \hdashline B \end{array} \right\| = \operatorname{rank}(I^*A) + \operatorname{rank} B,$$

откуда в силу структуры матриц B, $\left\| \begin{array}{c} I^* \\ \hdashline B \end{array} \right\|$ и полноты ранга матриц D и L^* получим

$$\operatorname{rank}(I^*A) = m_2 + l + 1.$$

3. **Алгоритм оценивания и пример.** Отметим, что благодаря простой структуре матрицы P задача определения вектора a_0 и матрицы H не требует вычислений. Непосредственная проверка показывает, что частным решением системы (1.10) является вектор $\underset{(m_2+1)\times 1}{a_0} = \|1, 0, \ldots, 0, -1\|^T$, а матрицей общего решения — матрица

$$\underset{(m_2+1)\times(m_2-m_1)}{H} = \left\| \begin{array}{c:c:c:c} 1/r - 1 & 1/r & & 1/r \\ 1/r & 1/r - 1 & & 1/r \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/r & 1/r & & 1/r - 1 \\ 1/r & 1/r & & 1/r \\ \hdashline \multicolumn{4}{c}{0} \end{array} \right\| \quad r = m_2 - m_1 + 1.$$

Алгоритм вычисления оценок $T(\tilde{a})$ и $\tilde{X}$ состоит из следующей последовательности операций:

1. Составляются матрицы $M(Y)$, H и вектор a_0.
2. Вычисляются значения вектора $-M(Y)a_0$ и матрицы $M(Y)H$.
3. Находится значение вектора $\tilde{h}$, являющегося решением МНК для системы $-M(Y)a_0 = M(Y)Hh$.
4. Вычисляется значение вектора $\tilde{a} = a_0 + H\tilde{h}$.
5. Вычисляется значение $T(\tilde{a})$ по формуле (1.15).
6. Составляется матрица D и вычисляется значение матрицы D^TD.
7. Находятся собственные векторы $\{V_i\}_1^{\tilde{k}}$ матрицы D^TD, соответствующие ее нулевым собственным числам.
8. Составляется матрица $R = \|V_1 | \cdots | V_{\tilde{k}}\|$ и вычисляется значение вектора $\tilde{X}$ по формуле (1.18).

Пример. В качестве примера был рассмотрен случай, когда компоненты вектора X задавались выражением

$$x(i) = \ln(1{,}5 + \sin(2\pi(i-1)/T)),\ i = 1, \ldots, 50,$$

а вектор $\varepsilon \in N(0, \sigma^2 I)$, $\sigma = 0{,}1$.

При каждом наборе значений параметров m_1, m_2, T решение задачи производилось 10 раз при различных статистически независимых значениях вектора ε. Для каждой оценки $\tilde{X}$ находилась оценка $\sigma(\tilde{X})$ среднеквадратической погрешности оценивания. Для полученной выборки $\{\tilde{T}_i\}_1^{10}$ оценок значения T определялась оценка $\bar{T}$ ее среднего и оценка $\sigma(\tilde{T})$ среднеквадратического отклонения от этого среднего. Для выборки $\{\sigma(\tilde{X}_i)\}_1^{10}$ находилась оценка $\bar{\sigma}(\tilde{X})$ среднего значения. Полученные результаты представим в следующем виде:

m_1	m_2	T	$\bar{T}$	$\sigma(\tilde{T})$	$\bar{\sigma}(\tilde{X})$
10	24	19,5	19,38	0,64	0,090
14	24	19,5	19,45	0,24	0,069
19	24	19,5	19,46	0,21	0,068
7	15	12,5	12,46	0,24	0,083
10	15	12,5	12,51	0,097	0,061

Полученные данные показывают, что даже при наличии относительно широкого интервала возможных значений периода использование априорной информации о периодичности процесса позволяет существенно увеличить точность оценивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов.— М.: Мир, 1976.
2. **Рао Р. С.** Линейные статистические методы и их применения.— М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 25 мая 1988 г.